

TD d'exercices . CORRECTION : PGCD

Exercice 1.

1) Combien de personnes au maximum pourront bénéficier de ces friandises (*Samir* étant inclus dans ces personnes) ?

Le nombre de personnes doit être un diviseur du nombre de sucettes (84) et du nombre de bonbons (147) à partager. Pour avoir un nombre maximum de personnes, il faut prendre le PGCD de 84 et 147.

Pour le calculer, utilisons la technique des soustractions successives en remplaçant, à chaque fois, la plus grande valeur par la différence des deux.

nombre 1	nombre 2	différence
84	147	$147 - 84 = 63$
84	63	$84 - 63 = 21$
21	63	$63 - 21 = 42$
21	42	$42 - 21 = 21$
21	21	

$\text{PGCD}(84,147) = 21$, le nombre maximal de personnes est de 21.

2) Combien de sucettes et de bonbons aura alors chaque personne ?

$84 = 21 \times 4$, $147 = 21 \times 7$, chaque personne aura 4 sucettes et 7 bonbons.

Exercice 2.

1) Trouver le PGDC de 6 209 et 4 435 en détaillant la méthode.

Utilisons la technique des divisions successives en remplaçant, à chaque fois, la plus grande valeur par le reste obtenu.

nombre 1	nombre 2	quotient	reste
6209	4435	1	1774
4435	1774	2	887
1774	887	2	0

Le PGCD de 6209 et 4435 est 887.

2) Expliquer pourquoi la fraction $\frac{4\ 435}{6\ 209}$ n'est pas irréductible.

Le PGCD des deux nombres est différent de 1, la fraction n'est donc pas irréductible

3) Donner la fraction irréductible égale à $\frac{4\ 435}{6\ 209}$

$$\frac{4435}{6209} = \frac{4435 \div 887}{6209 \div 887} = \frac{5}{7}$$

Exercice 3.

1°) Calculer le PGCD des nombres 675 et 375.

Utilisons la technique des soustractions successives en remplaçant, à chaque fois, la plus grande valeur par la différence des deux.

nombre 1	nombre 2	différence
675	375	675-375 = 300
300	375	375 - 300 = 75
300	75	300 - 75 = 225
225	75	225 - 75 = 150
150	75	150 - 75 = 75
75	75	

Le PGCD de 135 et 210 est 75.

2°) Ecrire la fraction $\frac{675}{375}$ sous forme irréductible.

$$\frac{675}{375} = \frac{675 : 75}{375 : 75} = \frac{9}{5}$$

Exercice 4.

1. Calculer le PGCD des nombres 135 et 210 .

Utilisons la technique des soustractions successives en remplaçant, à chaque fois, la plus grande valeur par la différence des deux.

nombre 1	nombre 2	différence
135	210	210-135 = 75
135	75	135 - 75 = 60
60	75	75 - 60 = 15
60	15	60 - 15 = 45

45 15 45 - 15 = 30
 30 15 30 - 15 = 15
 15 15

Le PGCD de 135 et 210 est 15.

2. a) Déterminer la longueur, en cm, du côté d'un carreau, sachant que le mur mesure 210 cm de hauteur et 135 cm de largeur.

La longueur du côté d'un carreau doit être un diviseur commun à 210 et 135. Comme nous voulons la plus grande valeur possible, nous devons prendre le PGCD, 15 cm.

b) Combien faudra-t-il alors de carreaux ?

Nous aurons $210 : 15 = 14$ carreaux sur la longueur, et $135 : 15 = 9$ carreaux sur la largeur.

Au total il nous faudra $14 * 9 = 126$ carreaux.

Exercice 5.

1) Les nombres 682 et 352 sont-ils premiers entre eux ? Justifier.

Non, les deux nombres sont pairs donc divisibles par 2, leur pgcd est donc supérieur ou égal à 2.

2) Calculer le plus grand diviseur commun (PGCD) de 682 et 352.

Calculons le PGCD en appliquant la méthode des quotients en remplaçant à chaque fois le plus grand nombre par le reste de la division jusqu'à ce que l'on trouve un reste nul :

Nombre 1	Nombre 2	Reste
682	352	330
352	330	22
330	22	0

le PGCD est 22.

3) Rendre irréductible la fraction $\frac{682}{352}$ en indiquant clairement la méthode utilisée.

$$682 : 22 = 31 ; 352 : 22 = 16 ; \text{ donc } \frac{682}{352} = \frac{31 \times 22}{16 \times 22} = \frac{31}{16}$$

Exercice 6.

1) Calculer le PGCD des nombres 1183 et 455 en précisant la méthode utilisée.

Calculons le PGCD en appliquant la méthode des soustractions en remplaçant à chaque fois le plus grand nombre par la différence jusqu'à ce que l'on trouve deux résultats identiques :

Nombre 1	Nombre 2	Différence
1183	455	728
728	455	273
273	455	182
273	182	91
182	91	91
91	91	0

le PGCD est 91.

2) Ecrire sous la forme irréductible la fraction $\frac{1183}{455}$ (on indiquera le détail des calculs).

$$1183 = 91 \times 13 ; 455 = 91 \times 5 ;$$

$$\frac{1183}{455} = \frac{91 \times 13}{91 \times 5} = \frac{13}{5}$$

Exercice 7.

Combien de bouquets identiques pourra-t-elle faire ?

Pour que les bouquets soient identiques, leur nombre doit un un diviseur de 182 et 78. De plus, pour faire beaucoup de bouquets, ce nombre doit être le plus grand possible, il faut donc choisir le PGCD des deux nombres.

Pour calculer ce PGCD, prenons par exemple la technique de la soustraction :

$$182 - 78 = 104 \quad \text{PGCD}(182,78) = \text{PGCD}(78,104)$$

$$104 - 78 = 26 \quad \text{PGCD}(182,78) = \text{PGCD}(78, 26)$$

$$78 - 26 = 52 \quad \text{PGCD}(182,78) = \text{PGCD}(52,26)$$

$$52 - 26 = 26 \quad \text{PGCD}(182,78) = \text{PGCD}(26,26)$$

Aicha peut faire 26 bouquets.

Quelle sera la composition de chaque bouquet ?

$$182 : 26 = 7 ; 78 : 26 = 3 ;$$

Chaque bouquet comprend 7 brins de muguet et 3 roses.