Exercice 1

1) Montrer que

$$A=\left(\sqrt{1+\frac{3}{5}}\times\sqrt{1-\frac{3}{5}}\right)=\sqrt{\left(1+\frac{3}{5}\right)\left(1-\frac{3}{5}\right)}=\sqrt{1^2-\left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}\in\mathbb{Q}$$

$$B=\left(\sqrt{2}+\sqrt{8}\right)^2=\left(\sqrt{2}+2\sqrt{2}\right)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2=18=\frac{18}{10^0}\in\mathbb{D}$$

$$C=\frac{\left(8^{n+1}+8^n\right)^2}{\left(4^{n-1}-4^n\right)^3}=\frac{\left(8^n\left(8+1\right)\right)^2}{\left(4^n\left(\frac{1}{4}-1\right)\right)^3}=\frac{\left(\left(2^3\right)^n9\right)^2}{\left(\left(2^2\right)^n\left(\frac{-3}{4}\right)\right)^3}$$

$$=\frac{\left(2^{3n}\times3^2\right)^2}{\left(2^{2n}\left(\frac{-3}{4}\right)\right)^3}=\frac{\cancel{2^{6n}}\times3^4}{\cancel{2^{6n}}\left(\frac{-3}{4}\right)^3}=3^{\cancel{4}}\times\frac{-4^3}{\cancel{3^3}}=-192\in\mathbb{Z}$$

Montrer que $D=\frac{\left(9^{n+1}+9^n\right)^2}{\left(3^{2n+1}-3^{2n}\right)^2}\in\mathbb{N}$

$$D=\frac{\left(9^{n+1}+9^n\right)^2}{\left(3^{2n+1}-3^{2n}\right)^2}=\left(\frac{9^n\left(9+1\right)}{3^{2n}\left(3-1\right)}\right)^2=\left(\frac{\cancel{9^n}\times10}{\cancel{9^n}\times2}\right)^2=25\in\mathbb{N}$$

$$E=\frac{2^m}{5^n}=\frac{2^m\times2^n}{5^n\times2^n}=\frac{2^{n+m}}{10^n}\in\mathbb{D}\quad\left(\begin{array}{l}\text{car }\ m\in\mathbb{N}\text{ et }n\in\mathbb{N};\\ donc\ 2^{n+m}\in\mathbb{N}\end{array}\right)$$

$$F=\sqrt{2\sqrt{\frac{5\sqrt{2}-7}{5\sqrt{2}+7}}+5\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}}$$

$$=\sqrt{2\sqrt{\frac{\left(5\sqrt{2}-7\right)^2}{\left(5\sqrt{2}\right)^2-7^2}}+5\sqrt{\frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2}{3^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}}}$$

$$=\sqrt{2\frac{\left(5\sqrt{2}-7\right)}{1}+5\frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)}{1}}$$

$$=\sqrt{10\sqrt{2}-14+15-10\sqrt{2}}=1\in\mathbb{N}$$

2) soit x un nombre réel $(x>3)$; tel que $x^2-3x-4=0$.

$$x^2-3x-4=0\Leftrightarrow x^2-3x=4$$

Montrer que $2\left(\sqrt{\frac{x-3}{x}}-\sqrt{\frac{x}{x-3}}\right)\in\mathbb{Z}$

$$G=2\left(\sqrt{\frac{x-3}{x}}-\sqrt{\frac{x}{x-3}}\right)=2\left(\frac{\sqrt{x-3}-\sqrt{x}}{\sqrt{x\left(x-3\right)}}\right)$$

$$=2\left(\frac{x-3-x}{\sqrt{x^2-3x}}\right)=\frac{\cancel{2}\times-3}{\cancel{\sqrt{4}}}=-3\in\mathbb{Z}$$

Exercice 2

1) Rendre le dénominateur de chacun des nombres suivants un entier naturel

$$A=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{10-2\sqrt{21}}{7-3}=\frac{10-2\sqrt{21}}{4}=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$$

$$B=\frac{2+3\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}-\frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{2+3\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}\left(3+2\sqrt{2}\right)}{2-\sqrt{2}}$$

$$\frac{2+3\sqrt{2}-\sqrt{2}\left(3+2\sqrt{2}\right)}{2-\sqrt{2}}=\frac{2+\cancel{3\sqrt{2}}-\cancel{3\sqrt{2}}-4}{2-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{-2\left(2+\sqrt{2}\right)}{2^2-\sqrt{2}^2}=\frac{-\cancel{2}\left(2+\sqrt{2}\right)}{\cancel{2}}=-\left(2+\sqrt{2}\right)$$

$$C=3\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\frac{1}{\sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

$$=3\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\frac{1}{\cancel{\sqrt{6}}\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{6}}}\right)}$$

$$=3\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=3\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2}$$

$$=3\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}+\sqrt{2}=4\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$$

2) simplifier les expressions suivantes :

$$A=\frac{8^2\times5^3\times7^2\times63}{5^4\times7^3\times2^8\times9}=\frac{\left(2^3\right)^2\times\cancel{5^3}\times\cancel{7^2}\times\cancel{7}\times\cancel{9}}{5^{\cancel{4}}\times\cancel{7^3}\times2^8\times\cancel{9}};$$

$$=\frac{\cancel{2^6}}{5\times\cancel{2^6}\times2^2}=\frac{1}{20}$$

$$B=\frac{\left(3^7\times2^{-6}\times9^{-1}\right)^2}{\left(9^{-2}\times3^2\times2^{-1}\right)^3}=\frac{3^{14}\times2^{-12}\times9^{-2}}{3^6\times2^{-3}\times9^{-6}};$$

$$=\frac{3^8\times\left(3^2\right)^{-2}\times2^{-9}}{\left(3^2\right)^{-6}}=\frac{3^{8-4+12}}{2^9}=\frac{3^{16}}{2^9}$$

3) Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

$$A=4.5\times10^5\times6.4\times10^4=28,8\times10^9=2,88\times10^9\ ;$$

$$B=\frac{4.8\times10^{-13}\times9\times10^4}{1.2\times10^{-7}}=\frac{4\times\cancel{1.2}\times9\times10^{-9}}{\cancel{1.2}\times10^{-7}}$$

$$=36\times10^{-2}=3.6\times10^{-1}$$

Exercice 3

$a=\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ **et** $b=\sqrt{8-2\sqrt{15}}$

1) Calculer $a\times b$

$a\times b=\sqrt{8+2\sqrt{15}}\times\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{64-60}=2$

2) On pose $u=a+b$ **et** $v=a-b$

$u^2=8+\cancel{2\sqrt{15}}+2\times2+8-\cancel{2\sqrt{15}}=20$

Donc $u=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$v^2=8+\cancel{2\sqrt{15}}-2\times2+8-\cancel{2\sqrt{15}}=12$

Donc $v=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

- **L'écriture simplifiée de** a **et** b

$\begin{cases}u=a+b\\v=a-b\end{cases}\Leftrightarrow u+v=2a\Leftrightarrow a=\dfrac{2\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{2}=a=\sqrt{5}+\sqrt{3}$

$\begin{cases}u=a+b\\v=a-b\end{cases}\Leftrightarrow u-v=2b\Leftrightarrow b=\dfrac{2\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{2}=a=\sqrt{5}-\sqrt{3}$

3) On pose $X=\sqrt{17+12\sqrt{2}}$ **et** $Y=\sqrt{17-12\sqrt{2}}$

$XY=\sqrt{17+12\sqrt{2}}\times\sqrt{17-12\sqrt{2}}=\sqrt{289-288}=1$

$(X+Y)^2=X^2+2XY+Y^2=36$

$(X-Y)^2=X^2-2XY+Y^2=32$

Exercice ❹

1. **Développer puis réduire les expressions suivantes :**

$A=(2x-1)^2+(x+2)^3=4x^2-4x+1+x^3+6x^2+12x+8$

$=x^3+10x^2+8x+9$

$B=(x+2)(x^2-2x+4)=x^3+8$

$C=(x-3)(x^2+3x+9)=x^3-27$

$D=(2x-1)^3-(x+4)^2=8x^3-12x^2+6x-1-(x^2+8x+16)$

$=8x^3-12x^2+6x-1-x^2-8x-16=8x^3-20x^2-2x-17$

2. **factoriser les expressions suivantes**

$E=x^2-4+(x+3)(x-2)-3(x-2)^2$

$=(x-2)(x+2)+(x+3)(x-2)-3(x-2)(x-2)$

$=(x-2)[x+2+x+3-3(x-2)]$

$=(x-2)(2x+5-3x+6)=(x-2)(-x+11)$

$F=x^3-27+2(x^2-9)-3x+9$

$=(x-3)(x^2+3x+9)+2(x-3)(x+3)-3(x-3)$

$=(x-3)[x^2+3x+9+2x+6-3]=(x-3)(x^2+5x-12)$

$H=x^3+1+3(x^2-1)-x-1$

$=(x+1)(x^2-x+1)+3(x-1)(x+1)-(x+1)$

$=(x+1)[x^2-x+1+3x-3-1]=(x+1)(x^2+2x-3)$

Exercice ❺

1) $x+y=2$ **et** $x^2+y^2=6$

Calculer : xy ; x^3+y^3 ; x^4+y^4 et x^6+y^6

$x+y=2\Leftrightarrow(x+y)^2=4\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2=4$

$\Leftrightarrow 2xy=4-6\Leftrightarrow xy=-1$

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=2(6-(-1))=14$

$(x^2+y^2)^2=36\Leftrightarrow x^4+2x^2y^2+y^4=36\Leftrightarrow x^4+y^4=36-2=34$

$x^6+y^6=(x^2)^3+(y^2)^3$

$=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)=6(34-1)=198$

2) Soit $a\in\mathbb{R}^*$ **tel que** $a+\dfrac{1}{a}=2$ **.**

On a $a+\dfrac{1}{a}=2\Leftrightarrow\dfrac{a^2+1}{a}=2\Leftrightarrow a^2-2a+1=0$

$\Leftrightarrow(a-1)^2=0\Leftrightarrow a=1$

$a^2+\dfrac{1}{a^2}=2$ **;** $a^3+\dfrac{1}{a^3}=2$ **et** $a^4+\dfrac{1}{a^4}=2$

Exercice ❻

Soit $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

1) Montrer que $1-x^6=(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$

$1-x^6=1^3-(x^2)^3=(1-x^2)(1+x^2+x^4)$

$=(1-x)(1+x)(1+x^2+x^4)=(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$

2) Déduire la valeur de $A=1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{9}+....+\dfrac{32}{243}$

On a $1-x^6=(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$

Alors $\dfrac{1-x^6}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$

Pour $x=\dfrac{2}{3}$ **on a** $A=1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{9}+....+\dfrac{32}{243}=\dfrac{665}{243}$

Exercice ❼

3) Soient $x;y\ et\ z$ **trois nombres réels non nul tels que**

$xy+xz+yz=0\Leftrightarrow\begin{cases}xy=-xz-yz\\xz=-xy-yz\\yz=-xy-xz\end{cases}$

c) Montrer que $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$

Rendre au même dénominateur

d) Montrer que $\dfrac{x+y}{z}+\dfrac{x+z}{y}+\dfrac{y+z}{x}=-3$

Rendre au même dénominateur puis remplacer

xy ; yz **et** xz **par leurs valeurs**

4) Soient $a;b$ **et** c **trois nombres réels positifs tels que**

$abc=1$

Montrer que $\dfrac{a}{ab+a+1}+\dfrac{b}{bc+b+1}+\dfrac{c}{ac+c+1}=1$

Rendre au même dénominateur

Le dénominateur soit $ab+a+1$ **ou bien** $bc+b+1$ **ou**

$ac+c+1$