Exercices avec corrections sur :
La droite dans le plan

Types d'exercices :

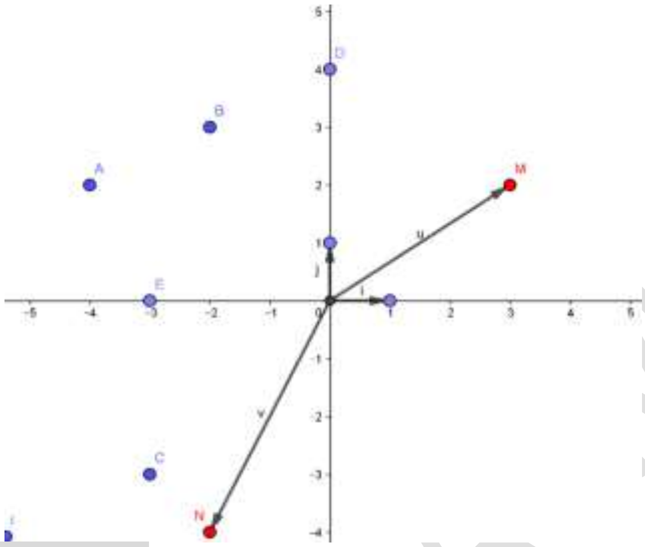
Application directe du cours (*)
Difficulté moyenne (**)
Demande une réflexion (***)

Exercice1 : (*) Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

Construire les points $A\left(-4;2\right)$; $B\left(-2;3\right)$; $C\left(-3;3\right)$ $E\left(0;4\right)$; $F\left(-3;0\right)$ et les vecteurs : $\vec{u}\left(3;2\right)$ et $\vec{v}\left(-2;-4\right)$

Solution : Soit M tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$ donc $M\left(3;2\right)$

Et soit N tel que $\overrightarrow{ON}=\vec{v}$ donc $N\left(-2;-4\right)$



Exercice2 : (*) Dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

Soient les points A (-2 ; 1) et B (1 ; −1).

1) Calculer les coordonnées du point M tel que A soit le milieu du segment [BM]

2) Calculer les coordonnées du point N, symétrique de A par rapport à` B .

3) Démontrer que [AB] et [M N] ont même milieu.

Solution :1) A le milieu du segment [BM]

Signifie que : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BA}$.

On a : $\overrightarrow{AM}\left(x_M+2;y_M-1\right)$ et $\overrightarrow{BA}\left(3;-2\right)$

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BA}$ Signifie que : $\begin{cases}x_M+2=3\\y_M-1=-2\end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases}x_M=1\\y_M=-1\end{cases}$ donc : $M\left(1;-1\right)$

2) N symétrique de A par rapport à B

Signifie que : $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{BN}\left(x_N-1;y_N+1\right)$ et $\overrightarrow{AB}\left(-3;2\right)$

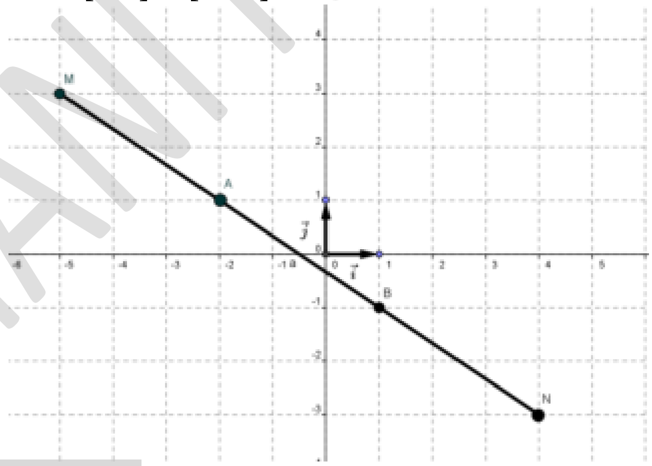
$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}$ Signifie que : $\begin{cases}x_N-1=-3\\y_N+1=2\end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases}x_N=-2\\y_N=1\end{cases}$ donc : $N\left(-2;1\right)$

3) Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $I\left(\frac{x_B+x_A}{2};\frac{y_B+y_A}{2}\right)$ c'est-à-dire : $I\left(\frac{-1}{2};0\right)$

Le milieu J du segment [M N] a pour coordonnées $J\left(\frac{x_M+x_N}{2};\frac{y_M+y_N}{2}\right)$ c'est-à-dire : $J\left(\frac{-1}{2};0\right)$

Donc : [AB] et [M N] ont même milieu car : $I=J$



Exercice3 : (**) Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ et soient $A\left(1;2\right)$; $B\left(-5;4\right)$

1) Déterminer les coordonnées de I ; le milieu du segment [AB] et calculer $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

2) Déterminer les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$

3) Quelle est la nature du quadrilatère $OACB$

4) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{IC}$

5) Déterminer les coordonnées du point D tel que : $ABCD$ est un parallélogramme.

Solution :1) Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $I\left(\frac{1+(-5)}{2};\frac{2+4}{2}\right)$ c'est-à-dire : $I\left(-2;3\right)$

$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{\left(-5-1\right)^2+\left(4-2\right)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

2) On a $A\left(1;2\right)$; $B\left(-5;4\right)$; $O\left(0;0\right)$

Donc $\overrightarrow{OA}\left(x_A-x_O;y_A-y_O\right)$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{OA}\left(1-0;2-0\right)$ alors : $\overrightarrow{OA}\left(1;2\right)$

$\overrightarrow{OB}\left(x_B-x_O;y_B-y_O\right)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{OB}\left(-5;4\right)$

On a $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ donc $\overrightarrow{OC}\left(1+(-5);2+4\right)$

Donc $\overrightarrow{OC}\left(-4;6\right)$ alors : $C\left(-4;6\right)$

3) On a $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$

On a $\overrightarrow{OA}\left(1;2\right)$ ① et $\overrightarrow{BC}\left(-4+5;6-4\right)$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{BC}\left(1;2\right)$ ②

De ① et ② on déduit que : $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$

Et alors : $OACB$ est un parallélogramme.

4) $\overrightarrow{OA}\left(1;2\right)$ et $2\overrightarrow{OB}\left(-10;8\right)$

On a : $\overrightarrow{IC}\left(-4+2;6-3\right)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{IC}\left(-2;3\right)$

On a : $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{IC}$

Donc : $\vec{u}\left(1-10-2;2+8+3\right)$ alors : $\vec{u}\left(-11;13\right)$.

5) $ABCD$ est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

Donc : $\overrightarrow{AB}\left(-5-1;4-2\right)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{AB}\left(-6;2\right)$

Et $\overrightarrow{DC}\left(-4-x;6-y\right)$

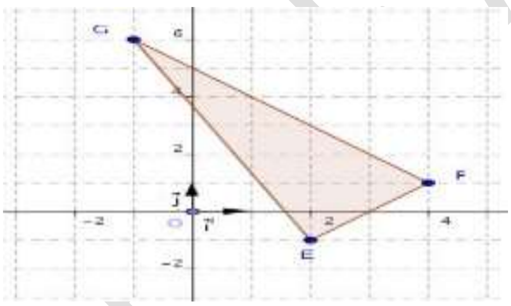
On a : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ Signifie que : $\begin{cases}-4-x=-6\\6-y=2\end{cases}$

Donc : $\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$ et par suite : $D\left(2;4\right)$

Exercice4 : (**)Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1) Placer les points E (2 ; −1), F (4 ; 1) et G (-1 ; 6).
2) Quelle est la nature du triangle EFG ?

Solution :1) Voir figure



2) Calculons les distances suivantes : EF et FG et EG.

$EF=\left\|\overrightarrow{EF}\right\|=\sqrt{\left(x_F-x_E\right)^2+\left(y_F-y_E\right)^2}=\sqrt{\left(4-2\right)^2+\left(1+1\right)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$EG=\left\|\overrightarrow{EG}\right\|=\sqrt{\left(x_G-x_E\right)^2+\left(y_G-y_E\right)^2}=\sqrt{\left(-1-2\right)^2+\left(6+1\right)^2}=\sqrt{58}$

$FG=\left\|\overrightarrow{FG}\right\|=\sqrt{\left(x_G-x_F\right)^2+\left(y_G-y_F\right)^2}=\sqrt{\left(-1-4\right)^2+\left(6-1\right)^2}=\sqrt{50}$

On a : $EF^2+FG^2=8+50=58$ et $EG^2=58$

Donc : $EF^2+FG^2=EG^2$

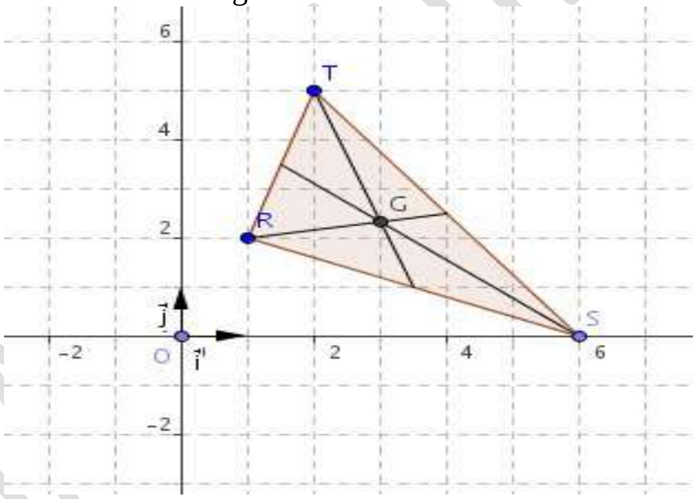
Par suite d'après le théorème de Pythagore réciproque le triangle EFG est rectangle en F

Exercice5 : (**) Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

Le triangle RST est défini par les points :
R(1 ; 2), S (6 ; 0) et T (2 ; 5).
1) Faire une figure et placer le point G centre de gravité du triangle RST .
2) Calculer les coordonnées du point G.

Solution :1) voir figure

Le centre de gravité est le point d'intersection des médianes du triangle



2) le point G centre de gravité du triangle RST

Donc : $\overrightarrow{TG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{TI}$ avec I Le milieu du segment [RS]

Le milieu I du segment [RS] a pour coordonnées :

$I\left(\frac{1+6}{2};\frac{2+0}{2}\right)$ C'est-à-dire : $I\left(\frac{7}{2};1\right)$

On a : $\overrightarrow{TG}\left(x_G-2;y_G-5\right)$ et $\frac{2}{3}\overrightarrow{TI}\left(\frac{2}{3}(\frac{7}{2}-2);\frac{2}{3}(1-5)\right)$

C'est-à-dire : $\frac{2}{3}\overrightarrow{TI}\left(1;-\frac{8}{3}\right)$

On a : $\overrightarrow{TG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{TI}$ Signifie que : $\begin{cases}x_G-2=1\\y_G-5=-\frac{8}{3}\end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases}x_G=3\\y_G=-\frac{8}{3}+5=\frac{7}{3}\end{cases}$ donc : $G\left(3;\frac{7}{3}\right)$

Exercice6 : (*) On considère les vecteurs : $\vec{u}\left(3,-2\right)$ et $\vec{v}\left(-6,4\right)$

Est-ce que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ?

Solution : Methode1 :

$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 3\times4-(-6)\times(-2) = 12-12 = 0$

Donc : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Methode2 : $\vec{u}(3,-2)$ donc : $\vec{u} = 3\vec{i}-2\vec{j}$

On a : $\vec{v}(-6,4)$ donc : $\vec{v} = -6\vec{i}+4\vec{j}$

On remarque que : $\vec{v} = -6\vec{i}+4\vec{j} = -2(3\vec{i}-2\vec{j}) = -2\vec{u}$

Donc : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Exercice7 : (**) Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Soient les points : $A\left(\frac{1}{2};3\right)$; $B(-2;-2)$; $C(1;4)$

et le vecteur $\vec{u}(1;3)$

1) Déterminer le réel x pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}(x-2,5)$ soient colinéaires

2) Montrer que les points A ; B et C sont alignés

Solution : $\vec{u}(1;3)$ et $\vec{v}(x-2,5)$ sont colinéaires

équivaut à : $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$

Équivaut à : $\begin{vmatrix} 1 & x-2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$ Signifie que : $5\times1-3(x-2)=0$

Équivaut à : $5-3x+6=0$ c'est-à-dire : $x = \dfrac{11}{3}$

2) $\overrightarrow{AB}\left(-2-\frac{1}{2};-2-3\right)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{AB}\left(-\frac{5}{2};-5\right)$

On a aussi : $\overrightarrow{AC}\left(1-\frac{1}{2};4-3\right)$ donc : $\overrightarrow{AC}\left(\frac{1}{2};1\right)$

Et on a : $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{5}{2}+\frac{5}{2} = 0$

Donc : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

Par suite les points A ; B et C sont alignés.

Exercice8 : (**) Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et soit m un paramètre réel

Discuter suivant les valeurs de m la colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans chaque cas :

1) $\vec{u}(3;2m+1)$ et $\vec{v}(2;m)$

2) $\vec{u}(m;1)$ et $\vec{v}(1;m)$

Solution :1) On a :

$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2m+1 & m \end{vmatrix} = 3\times m-2(2m+1) = 3m-4m-2$

Donc : $\det(\vec{u};\vec{v}) = -m-2$

$\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$ Équivaut à : $-m-2=0$

C'est-à-dire : $m=-2$

Si $m=-2$ alors $\det(\vec{u};\vec{v})=0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Si $m\neq-2$ alors $\det(\vec{u};\vec{v})\neq0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

2) On a :

$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2-1 = m^2-1^2 = (m+1)(m-1)$.

$\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$ Équivaut à : $(m+1)(m-1)=0$.

Équivaut à : $m=-1$ ou $m=-1$

Si $m=1$ alors $\det(\vec{u};\vec{v})=0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Si $m=-1$ alors $\det(\vec{u};\vec{v})=0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Si $m\neq1$ et $m\neq-1$ alors $\det(\vec{u};\vec{v})\neq0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

Exercice9 : (*) Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Donner une représentation paramétrique de la droite $D(A;\vec{u})$ qui passe par $A(3;-5)$ et $\vec{u}(-2;3)$ un vecteur directeur.

Solution : Une représentation paramétrique de la droite $D(A;\vec{u})$ est : $\begin{cases} x = 3-2t \\ y = -5+3t \end{cases} ;(t\in\mathbb{R})$

Exercice10 : (*) Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ soient les points A(1; 2); B(-3; 0)

1) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

2) Déterminer si chacun des points suivants appartient ou non à la droite (AB) :

$C(0;2)$; $D(-1;1)$; $E(9;6)$.

Solution :1) $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB), ses composantes sont : $\overrightarrow{AB}$ (-4, -2)

La représentation paramétrique de (AB) est donnée par le système :① $\begin{cases} x = -4t+1 \\ y = -2t+2 \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

2) On a $C(0;2)$ on remplace les coordonnées de C dans le système ①

Donc $\begin{cases} 0=-4t+1 \\ 2=-2t+2 \end{cases}$ on trouve $\begin{cases} t=\frac{1}{4} \\ t=0 \end{cases}$ or $\frac{1}{4}\neq 0$

Donc : $C\notin(AB)$

On a $D(-1;1)$ on remplace les coordonnées de D dans le système ①.

Donc $\begin{cases} -1=-4t+1 \\ 1=-2t+2 \end{cases}$ on trouve $\begin{cases} t=\frac{1}{2} \\ t=\frac{1}{2} \end{cases}$

Donc : $D\in(AB)$.

On a $E(9;6)$ on remplace les coordonnées de E

Dans le système ①.Donc $\begin{cases} 9=-4t+1 \\ 6=-2t+2 \end{cases}$ cad $\begin{cases} t=-2 \\ t=-2 \end{cases}$

Donc : $E\in(AB)$.

Exercice11 : (*) Donner un point et un vecteur directeur de la droite D de représentation paramétrique : $\begin{cases} x=7t-1 \\ y=-4t+11 \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

Solution : On a $A(-1;11)\in D$ et $\vec{u}(7;-4)$ est un vecteur directeur de la droite D.

Exercice12 : (**) Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ soient les points $A(-2,1)$; $B(3,7)$

Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) et déterminer les points d'intersections de la droite (AB) avec les axes du repère.

Solution : $\overrightarrow{AB}(3+2;7-1)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{AB}(5;6)$

La droite (AB) passe par $A(-2,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(5;6)$ donc une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$(AB)\begin{cases} x=-2+5t \\ y=1+6t \end{cases}(t\in\mathbb{R})$$

a) L'intersections de la droite (AB) avec l'axe des abscisses est le point tel que : $y=1+6t=0$

Donc $t=-\frac{1}{6}$ c'est-à-dire : $x=-\frac{17}{6}$ par suite le point d'intersections est : $C\left(-\frac{17}{6},0\right)$

b) L'intersections de la droite (AB) avec l'axe des ordonnées est le point tel que : $x=-2+5t=0$

Donc : $t=\frac{2}{5}$ et on trouve : $y=1+6\times\frac{2}{5}=\frac{17}{5}$

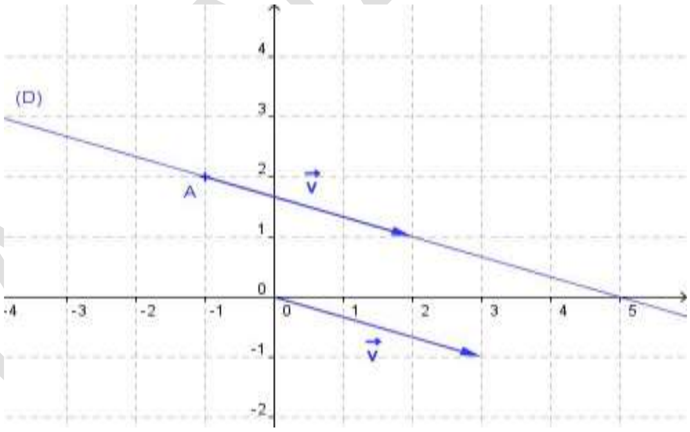
Par suite le point d'intersections est : $D\left(0,\frac{17}{5}\right)$

Exercice13 : (*) Soit la droite (D) passant par A(–1,2) et de vecteur directeur $\vec{v}(3;-1)$

1) Tracer la droite (D) et en écrire une équation cartésienne.
2) Donner les coordonnées d'un point B de cette droite.
3) Le point C (–4,3) appartient-il à cette droite ?

Solution :1) On place le point A, et on applique le vecteur $\vec{v}(3;-1)$ en ce point.

On trace la droite (D) passant par A ayant pour direction celle de $\vec{v}$.



Une équation cartésienne : <u>methode1 :</u>

$M(x;y)\in(D)$ Équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x+1;y-2)$ et $\vec{v}(3;-1)$ sont colinéaires

Si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM};\vec{v})=0$

Équivaut à : $\begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ y-2 & -1 \end{vmatrix}=0$

Équivaut à : $-1(x+1)-3(y-2)=0$

Équivaut à : $-1x-1-3y+6=0$

Équivaut à : (D) : $-x-3y+5=0$

Une équation cartésienne de la droite (D) est : $-x-3y+5=0$

<u>Methode2 :</u> (D) : $ax+by+c=0$ et on a : $\vec{v}(3;-1)$ un vecteur directeur de (D) ($\vec{v}(-b;a)$)

Donc : $a=-1$ et $b=-3$

Donc l'équation devient : (D) $-x-3y+c=0$

Or on sait que : A(–1,2) et $A\in(D)$

Donc : $-(-1)-3(2)+c=0$ donc : $c=5$

Par suite : (D) : $-x-3y+5=0$

2°) Affectons une valeur à x et déterminons la valeur correspondant à y :Par exemple, prenons x = 1.
Comme B appartient à la droite (D), ses coordonnées vérifient l'équation de (D)

À savoir. $-x_B - 3y_B + 5 = 0$ Ainsi $-1 - 3y_B + 5 = 0$

C'est-à-dire : $-3y_B = -4$.

On a finalement: $y_B = \frac{4}{3}$ et $B\left(1;\frac{4}{3}\right) \in (D)$

3°) Le point C(–4,3) appartient-il à cette droite ?

Dire que $C \in (D)$ revient à dire que les coordonnées de C vérifient l'équation de (D).

Or $-x_C - 3y_C + 5 = -(-4) - 3(3) + 5 = 4 - 9 + 5 = 0$

Donc, oui : C est sur (D).

Exercice14: (*) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par les points :
A (2 ; 4) et B (5 ; -1)

Solution : Methode1 :

Soit M un point tel que : $M(x;y) \in (D)$

Ssi $\overrightarrow{AM}(x-2;y-4)$ et $\overrightarrow{AB}(3;-5)$ sont colinéaires

Si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right) = 0$

Équivaut à : $\begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ y-4 & -5 \end{vmatrix} = 0$

Équivaut à : $-5(x-2) - 3(y-4) = 0$

Équivaut à : $-5x + 10 - 3y + 12 = 0$

Une équation cartésienne de la droite (D) est :
$-5x - 3y + 22 = 0$

Methode2 : (D) : $ax + by + c = 0$

$\overrightarrow{AB}(3,-5)$ Un vecteur directeur de (D)

Et on a : $\overrightarrow{AB}(-b,a)$ donc : $a = -5$ et $b = -3$

Donc l'équation devient : (D) $-5x - 3y + c = 0$

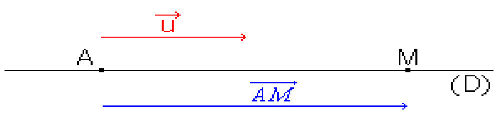
Or on sait que : $A \in (AB)$ donc : $-5\times 2 - 3\times 4 + c = 0$

C'est-à-dire : $c = 22$

Par suite : (D) $-5x - 3y + 22 = 0$.

Exercice15 : (*) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point :
A(1 ; -1) et de vecteur directeur $\vec{u}(-1;3)$.

Solution :



Soit M un point de (D) de coordonnées : M (x ; y)

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x-1;y+1)$ et $\vec{u}(-1;3)$ sont colinéaires Équivaut à : $\begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ y+1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

C'est-à-dire : $3(x-1) - (-1)(y+1) = 0$

Équivaut à : $3x - 3 + y + 1 = 0$ c'est-à-dire : $3x + y - 2 = 0$

Par suite une équation cartésienne de la droite (D)
Est : $3x + y - 2 = 0$

Exercice16: (*) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par les points :
A (5 ; 13) et B (10; 23).

Solution : Les points A et B appartiennent à la droite (D), donc le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de cette droite.

On a $\overrightarrow{AB}(10-5;23-13)$ donc $\overrightarrow{AB}(5;10)$ en divisant les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par 5, nous obtenons le vecteur $\vec{u}(1;2)$ qui est aussi un vecteur directeur de la droite (D),

Donc : b = -1 et a = 2 Une équation cartésienne de la droite (D) est donc de la forme :

(D) : $2x - y + c = 0$

Comme le point A (5 ; 13) appartient à la droite (D), ses coordonnées vérifient l'équation :

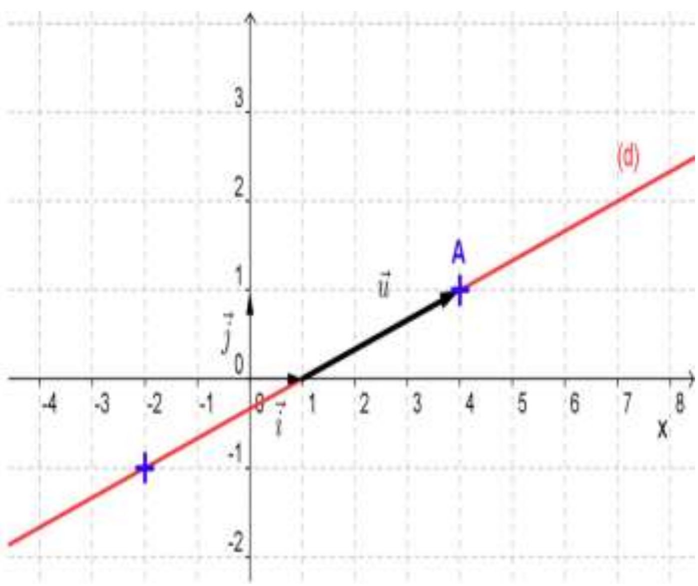
$2\times 5 - 13 + c = 0$

Donc : $10 - 13 + c = 0$ d'où : $c = 3$

Une équation cartésienne de la droite (D)
Est donc (D) : $2x - y + 3 = 0$.

Exercice17 : (**) Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan.

Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) tracée ci-dessous :



Solution : Méthode1: Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (D),

On lit graphiquement $\vec{u}(3;1)$ Donc a =1 et b = -3

Une équation cartésienne de la droite (D) est de la forme : $x-3y+c=0$

Comme le point A (4 ; 1) appartient à la droite (D), ses coordonnées vérifient l'équation :

(D)	x	0	1
	y	3	1

4 - 3 + ***c*** **= 0** Donc :

$c=-1$.

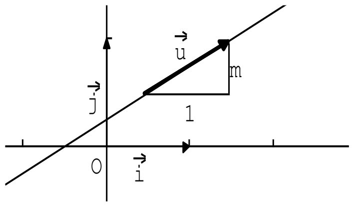
Une équation cartésienne de la droite (D) est :

(D) : $x-3y-1=0$

Méthode 2 : On prend deux points de la droite.
Par exemple A (4 ; 1) et B (-2 ; -1) et on applique la même méthode

Remarque :

- Si *m est* le coefficient directeur de la droite alors un vecteur directeur de cette droite est $\vec{u}(1;m)$



- Si $\vec{u}(-b;a)$ *est* un vecteur directeur de la droite (D) et $b\neq 0$ alors $m=-\frac{a}{b}$ est un coefficient directeur de la droite .

Exercice18 : (*) Soit (D) la droite d'équation cartésienne : *4x + 2 y + 3 = 0*
Déterminer l'équation réduite de la droite(D) et son coefficient directeur et un vecteur directeur

Solution :

• Son équation réduite est: $y=-2x-3$

• *-2 est* le coefficient directeur de la droite (D)

• Un vecteur directeur de cette droite est : $\vec{u}(-2;4)$

ou $\vec{u}(1;-2)$

Exercice19: Représenter graphique les droites suivantes :

1) (D) la droite d'équation cartésienne (D) :

$2x+y-3=0$.

2) (D') la droite de représentation paramétrique:

$\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$

3) (Δ)) la droite d'équation cartésienne (Δ) : $x = 3$

4) (Δ') la droite d'équation cartésienne (Δ') : $y = 2$

Solution :1) Pour Représenter une droite il suffit de connaitre deux points:

Affectons une valeur à x et déterminons la valeur correspondant à y.

Par exemple prenons x = 1 : $2\times 1+y-3=0$

Signifie que : $y=1$.

Ainsi $A(1;1)$ est un point de (D).

Prenons : x = 0 : $2\times 0+y-3=0$ signifie que :

$y=3$ Ainsi $B(0;3)\in(D)$

Donc : $(D)=(AB)$

(voir la figure)

2) (D') : $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$

Par exemple prenons $t=0$

Donc : $\begin{cases} x=1+2\times 0=1 \\ y=2+3\times 0=2 \end{cases}$ par suite : $C(1;2)\in(D')$

Prenons $t=1$ donc : $\begin{cases} x=1+2\times 1=3 \\ y=2+3\times 1=5 \end{cases}$

Par suite : $D(3;5)\in(D')$.

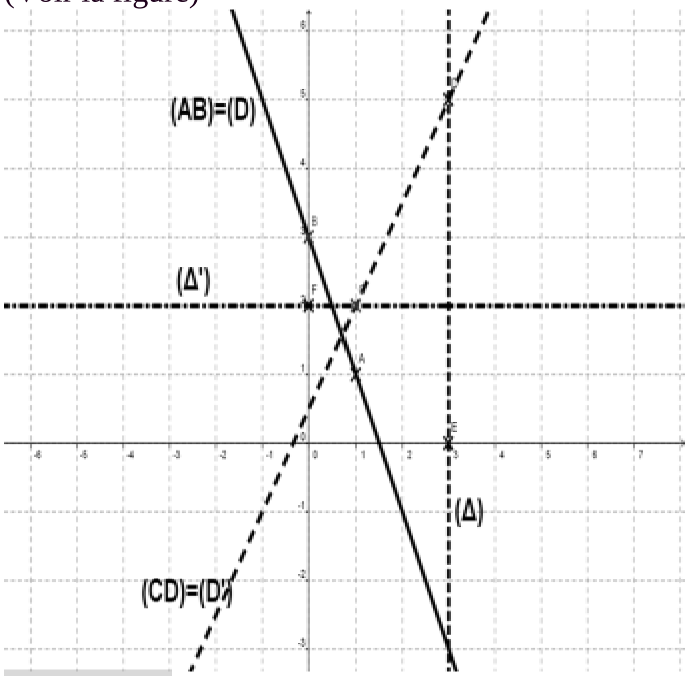
Donc : $(D')=(CD)$

(Voir la figure)

(D')	x	1	3
	y	2	5

3) La droite d'équation cartésienne (Δ) : $x = 3$ passe par $E(3;0)$ et parallèle à l'axe des ordonnées (Voir la figure).

4) la droite d'équation cartésienne (Δ') : $y = 2$ passe par $F(0;2)$ et parallèle à l'axe des abscisses (Voir la figure)

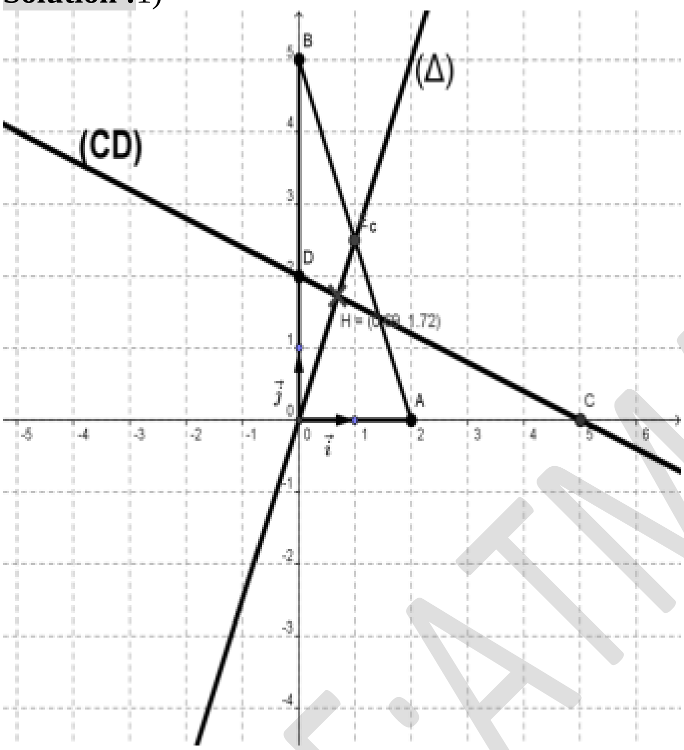


Exercice20 : (***) Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Soient les points :

A (2 ; 0), B (0 ; 5) ; C (5 ; 0) et D (0 ; 2).
1) Placer les points et donner une équation cartésienne de la médiane (Δ) issue de O dans le triangle OAB .
2) Donner une équation cartésienne de la droite (CD).
3) Donner une équation réduite de la droite (CD) et en déduire le coefficient directeur de la droite (CD).
4) Déterminer les coordonnées du point H intersection des droites (Δ) et (CD).
5) Montrer que la médiane issue de O dans le triangle OAB est la hauteur issue de O dans le triangle OCD.

Solution :1)



La médiane (Δ) issue de O dans le triangle OAB passe par O et E le milieu du segment [AB]
Le milieu E du segment [AB] a pour coordonnées $E\left(\frac{x_B+x_A}{2};\frac{y_B+y_A}{2}\right)$ c'est-à-dire : $E\left(1;\frac{5}{2}\right)$

Donc le vecteur $\overrightarrow{OE}\left(1;\frac{5}{2}\right)$ est un vecteur directeur de cette droite (Δ) (b = -1 et a = $\frac{5}{2}$)

Une équation cartésienne de la droite (Δ) est donc de la forme : (Δ) : $\frac{5}{2}x-y+c=0$

Comme le point O (0; 0) appartient à la droite (Δ) ses coordonnées vérifient l'équation : $\frac{5}{2}\times 0-0+c=0$

Donc : $c=0$

D'où une équation cartésienne de la droite (Δ) est donc : $\frac{5}{2}x-y=0$ ou bien : (Δ) : $5x-2y=0$

2) Déterminons une équation cartésienne de la droite (CD).
Le vecteur $\overrightarrow{CD}(-5;2)$ est un vecteur directeur de cette droite (CD). (b = 5 et a = 2)
Une équation cartésienne de la droite (CD).
est donc de la forme : (CD) : $2x+5y+c=0$
Comme le point C (5 ; 0) appartient à la droite (CD) alors : $2\times 5+5\times 0+c=0$
Donc : $c=-10$
D'où une équation cartésienne de la droite (CD) est donc : (CD) : $2x+5y-10=0$

3) Déterminons une équation réduite de la droite (CD) et le coefficient directeur de la droite (CD).
On a : (CD) : $2x+5y-10=0$ donc : $5y=-2x+10$

Par suite : $y=-\frac{2}{5}x+2$: l'équation réduite de la droite (CD)

Donc : $-\frac{2}{5}$ est le coefficient directeur de la droite (CD).

4) Déterminons les coordonnées du point H intersection des droites (Δ) et (CD).

On a : $\overrightarrow{CD}(-5;2)$ est un vecteur directeur de la droite (CD)

Et $\overrightarrow{OE}\left(1;\frac{5}{2}\right)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ)

et $\det\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{OE}\right)=\begin{vmatrix}-5 & 1\\ 2 & \frac{5}{2}\end{vmatrix}=\frac{-25}{2}-2=\frac{-29}{2}\neq 0$

Donc : $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{OE}$ sont non colinéaires
Par suite : des droites (Δ) et (CD) sont sécantes en un point H et le point d'intersection vérifie le système :

$\begin{cases}5x-2y=0\\ 2x+5y-10=0\end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases}5x-2y=0\\ 2x+5y=10\end{cases}$

$\Delta=\begin{vmatrix}5 & -2\\ 2 & 5\end{vmatrix}=25+4=29\neq 0$ donc solution unique :

e $x=\frac{\begin{vmatrix}0 & -2\\ 10 & 5\end{vmatrix}}{29}=\frac{20}{29}$ $y=\frac{\begin{vmatrix}5 & 0\\ 2 & 10\end{vmatrix}}{295}=\frac{50}{29}$

Donc : le point d'intersection est $H\left(\frac{20}{29};\frac{50}{29}\right)$

5) Il suffit de montrer que : le triangle OHD est rectangle en H ? D (0 ; 2).

$OH=\sqrt{\left(\frac{20}{29}\right)^2+\left(\frac{50}{29}\right)^2}$

Et $DH=\sqrt{\left(\frac{20}{29}\right)^2+\left(\frac{50}{29}-2\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{20}{29}\right)^2+\left(\frac{8}{29}\right)^2}$

$OD=\sqrt{(2)^2+(0)^2}=2$

On peut vérifier que ; $OH^2+DH^2=OD^2$ et par suite : le triangle OHD est rectangle en H

Exercice21 : (**) Étudier la position relative des deux droites D) et (D') dans chaque cas suivant :

1) (D) **:** $2x-4y+3=0$ ***et*** (D') **:** $-x+2y+5=0$

2) (D) : $2x+5y-2=0$ ***et*** (D') **:** $x+3y-2=0$

Solution :1) On a : (D) $2x-4y+3=0$

Donc : $\vec{u}(4;2)$ est un vecteur directeur de (D)

Et on a : (D') **:** -x +2 y + 5 = 0 donc $\vec{v}(-2;-1)$ est un vecteur directeur de (D').

$\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}4 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-4+4=0$

Alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Donc (D) et (D') sont parallèles.

Soit $A(x;y)\in(D)$

On prend $x=0$ Alors : $0-4y+3=0$ donc $y=\frac{3}{4}$

donc : $A\left(0;\frac{3}{4}\right)\in(D)$; On vérifie si : $A\left(0;\frac{3}{4}\right)\in(D')$?

On a : $-0+2\times\frac{3}{4}+5=\frac{3}{2}+5=\frac{13}{2}\neq 0$

Donc $A\left(0;\frac{3}{4}\right)\notin(D')$

D'où : $(D)\parallel(D')$ strictement parallèles

2) On a : (D) 2x + 5 y -2 = 0

Donc $\vec{u}(-5;2)$ est un vecteur directeur de (D)

Et on a : (D') **:** x +3 y -2 = 0

Donc $\vec{v}(-3;1)$ est un vecteur directeur de (D')

$\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}-5 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-5+6=1\neq 0$

Alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires

Donc (D) et (D') sont sécantes.

On détermine le point d'intersection de (D) et (D').

Soit $E(x;y)$ ce point d'intersection de (D) et (D')

Alors **:** $(x;y)$ vérifie le système : $\begin{cases}2x+5y-2=0\\ x+3y-2=0\end{cases}$

Donc : $\begin{cases}2x+5y=2\\ x+3y=2\end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases}2x+5y=2\\ x=2-3y\end{cases}$

Donc : $\begin{cases}2(2-3y)+5y=2\\ x=2-3y\end{cases}$ c'est-à-dire: $\begin{cases}4-6y+5y=2\\ x=2-3y\end{cases}$

Donc : $\begin{cases}4-y=2\\ x=2-3y\end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases}y=2\\ x=2-3y\end{cases}$

Donc : $\begin{cases}y=2\\ x=-4\end{cases}$ alors : $E(-4;2)$.

Exercice22 : (***) Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Montrer que les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes

Et déterminer le point d'intersection H (x ; y)

Dans les cas suivants :

1) $(D_1)\begin{cases}x=3t-7\\ y=2t-2\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ et $(D_2)\begin{cases}x=-2k+1\\ y=k+1\end{cases}(k\in\mathbb{R})$

2) $(D_1)\begin{cases}x=-t+2\\ y=-t+3\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ et $(D_2): x+3y-5=0$

Solutions :1) Un vecteur directeur de (D_1) est : $\vec{u_1}(3;2)$ et un vecteur directeur de (D_2) est : $\vec{u_2}(-2;1)$

$\det(\vec{u_1};\vec{u_2})=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3+4=7\neq 0$

Alors les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont non colinéaires

Par suite : (D_1) et (D_2) se coupent

Le point d'intersection vérifie le système :

$\begin{cases}3t-7=-2k+1\\ 2t-2=k+1\end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases}3t+2k=8\\ 2t-k=3\end{cases}$

$\begin{cases}3t+2k=8\\ 2t-k=3\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}3t+2k=8 & (1)\\ 4t-2k=6 & (2)\end{cases}$

$(1)+(2)$ Donne : $7t=14$ c'est-à-dire : $t=2$

Et puisque : $2t-k=3$ alors : $k=1$

Par suite : $\begin{cases}x=3\times 2-7=-1\\ y=2\times 2-2=2\end{cases}$

Par conséquent : $(D_1)\cap(D_2)=\{I(-1;2)\}$.

2) $(D_1)\begin{cases}x=-t+2\\ y=-t+3\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ et $(D_2): x+3y-5=0$

Un vecteur directeur de (D_1) est : $\vec{u}_1(-1;-1)$ et un vecteur directeur de (D_2) est : $\vec{u}_2(-3;1)$

$$\det\left(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{v_2}\right)=\begin{vmatrix}-1 & -3\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-1-3=-4\neq 0$$

Alors les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont non colinéaires

Par suite : (D_1) et (D_2) se coupent.

Le point d'intersection vérifie le système :

$$\begin{cases}x=-t+2\\ y=-t+3\\ x+3y-5=0\end{cases}$$ Donc : $(-t+2)+3(-t+3)-5=0$

C'est-à-dire : $-4t+6=0$ par suite : $t=\frac{3}{2}$

Alors : $I:\begin{cases}x=-\frac{3}{2}+2=\frac{1}{2}\\ y=-\frac{3}{2}+3=\frac{3}{2}\end{cases}$ donc : $(D_1)\cap(D_2)=\left\{I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)\right\}$

Exercice23: (**) Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et soient les points :

$A(1,2)$; $B(1,0)$

Et les droites : $(D):3x-5y+6=0$ et $(D'):x-y=0$.

1) Donner une représentation paramétrique des Droites (D) et (D').

2) Donner une équation cartésienne de la droite (Δ) qui passe par le point $B(1;0)$ et parallèle a (EC) .

Avec : $E(3;3)$ et $C(4;0)$

3) Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de (Δ) et (D) et déterminer les coordonnées du point d'intersection J de (Δ) et (D').

4) Montrer que J est le milieu de $[IB]$.

Solution :1)a)un vecteur directeur de $(D):3x-5y+6=0$

$\vec{u}(-b;a)$ Un vecteur directeur de (D) donc : $\vec{u}(5,3)$

Déterminons un point de (D) ?

Si $x=0$ alors : $(D):3\times0-5y+6=0$ donc $y=\frac{6}{5}$

Donc : $A\left(0;\frac{6}{5}\right)\in(D)$

Donc : une représentation paramétrique de la droites (D) est : $(D)\begin{cases}x=0+5t\\ y=\frac{6}{5}+3t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$

b) Un vecteur directeur de $(D'):x-y=0$ est $\vec{u}'(-b;a)$ donc : $\vec{u}'(1,1)$

Déterminons un point de (D') ?

Si $x=0$ alors : $(D'):0-y=0$ donc $y=0$

Donc : une représentation paramétrique de la droite (D') est : $(D')\begin{cases}x=0+1k\\ y=0+1k\end{cases}(k\in\mathbb{R})$

2) (Δ) passe par le point $B(1;0)$ et parallèle a (EC)

Donc : $\overrightarrow{EC}$ un vecteur directeur de (Δ) : $\overrightarrow{EC}(1;-3)$

Et on sait que: $\vec{u}(-b;a)$ un vecteur directeur

Donc : $b=-1$ et $a=-3$

Par suite (Δ) : $-3x-y+c=0$

Et on sait que (Δ) passe par $B(1;0)$

On trouve : $c=3$ donc : (Δ) $-3x-y+3=0$

3)a)Déterminons les coordonnées du point d'intersection I de (Δ) et (D) ?

On va résoudre le système $(1)\begin{cases}3x-5y=-6\\ -3x-y=-3\end{cases}$

On fait la somme des deux équations membre à membre on trouve : $-6y=-9\Leftrightarrow y=\frac{3}{2}$

Et en remplaçant dans la 2iem équation on trouve :

$-3x-\frac{3}{2}+3=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Donc le point d'intersection I de (Δ) et (D)

Est : $I\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

b) Déterminons les coordonnées du point d'intersection J de (Δ) et (D') ?

On va résoudre le système $(1)\begin{cases}x-y=0\\ -3x-y=-3\end{cases}$

$x-y=0\Leftrightarrow x=y$

Et en remplaçant dans la 2iem équation on trouve :

$-3x-x+3=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{4}$

Donc le point d'intersection J de (Δ) et (D')

Est : $J\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$

4) Montrons que J est le milieu de $[IB]$

Il suffit de montrer que : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{JB}$?

On a : $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{4},-\frac{3}{4}\right)$ et $\overrightarrow{JB}\left(\frac{1}{4},-\frac{3}{4}\right)$ donc : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{JB}$

Donc : J est le milieu de $[IB]$

Exercice24: (***) Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ et $x\in\mathbb{R}$

Soients : $A(-1;2)$; $B(1;3)$; $C\left(0;\frac{5}{2}\right)$ trois points du plan et $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{v}=-2\vec{i}+3\vec{j}$ deux vecteurs

1)Montrer que : les points A ; B ; C sont alignés.

2)Montrer que : $(A,\vec{u},\vec{v})$ est un repère du plan.

3) Déterminer les coordonnées du point : B dans le repère $(A,\vec{u},\vec{v})$.

Solution : 1) *méthode1 :*

Les points A ; B ; C sont alignés

Si et seulement s'il existe un nombre réel k tel que : $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$

On a : $A(-1;2)$; $B(1;3)$ donc : $\overrightarrow{AB}(2;1)=2\vec{i}+1\vec{j}$

On a : $A(-1;2)$; $C\left(0;\frac{5}{2}\right)$ donc : $\overrightarrow{AC}\left(1;\frac{1}{2}\right)=1\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$

Par suite : $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+1\vec{j}=2\left(\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}\right)=2\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ avec k=2

C'est-à-dire que les points A ; B ; C sont alignés

*Méthode2 :*Nous utilisons « A ; B ; C sont alignés si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=0$ ».

$$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=2\times\frac{1}{2}-1\times1=0$$

C'est-à-dire que les points A ; B ; C sont alignés.

2)Pour montrer que $(A,\vec{u},\vec{v})$ est un repère du plan.

Il suffit de montrer que : $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{v}=-2\vec{i}+3\vec{j}$ sont non colinéaires,

méthode1 : Il suffit de montrer que : $\det(\vec{u};\vec{v})\neq0$.

$$\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=1\times3-(-2)\times1=5\neq0$$

Donc : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires

Par suite : $(A,\vec{u},\vec{v})$ est un repère du plan.

Méthode2 : nous allons utiliser le raisonnement par l'absurde : Supposons que : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Alors il existe un nombre réel k tel que : $\vec{u}=k\vec{v}$

Nous obtenons ainsi : $\begin{cases}-2k=1\\ 3k=1\end{cases}$ D'où: $k=-\frac{1}{2}$ et $k=\frac{1}{3}$

c'est impossible

Par conséquent $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

3) Déterminons les coordonnées $(x;y)$ du point : B dans le repère $(A,\vec{u},\vec{v})$:

Puisque A est l'origine du repère nous avons :

$\overrightarrow{AB}=x\vec{u}+y\vec{v}=x\left(\vec{i}+\vec{j}\right)+y\left(-2\vec{i}+3\vec{j}\right)$

$\overrightarrow{AB}=x\vec{u}+y\vec{v}=(x-2y)\vec{i}+(x+3y)\vec{j}$

D'autre part nous avons : $\overrightarrow{AB}(2;1)=2\vec{i}+1\vec{j}$

Donc : $\begin{cases}x-2y=2\\ x+3y=1\end{cases}$ d'où : $x=\frac{8}{5}$ et $y=\frac{-1}{5}$.

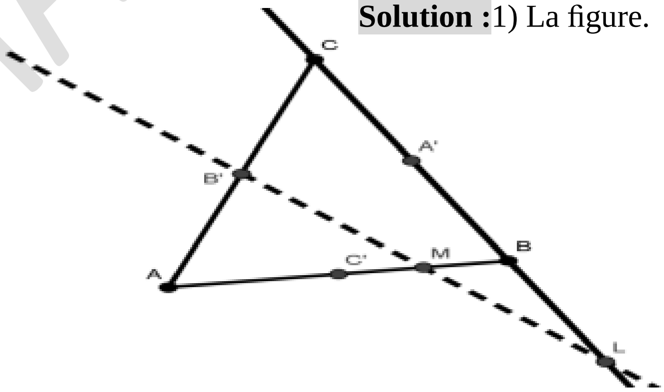
Donc : $\overrightarrow{AB}=\frac{8}{5}\vec{u}-\frac{1}{5}\vec{v}$

Exercice 25 : (***) ABC est un triangle quelconque A', B' et C' sont les milieux respectifs de : [BC], [CA] et [AB] et M est le milieu de [BC'] et L est le symétrique de A' par rapport à B.

1) Faire une figure et Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère : $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

3) Montrer que les points B', M et L sont alignés.

Solution : 1) La figure.



2) On a A est l'origine du repère : $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $A(0;0)$

On a : $\overrightarrow{AB}=1\overrightarrow{AB}+0\overrightarrow{AC}$ donc $B(1;0)$

On a : $\overrightarrow{AC}=0\overrightarrow{AB}+1\overrightarrow{AC}$ donc : $C(0;1)$

On a : $\overrightarrow{AC'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+0\overrightarrow{AC}$ donc : $C'\left(\frac{1}{2};0\right)$

On a : $\overrightarrow{AB'}=0\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ donc : $B'\left(0;\frac{1}{2}\right)$

On a : A' le milieu de [BC]

Donc : $A'\left(\frac{x_B+x_C}{2};\frac{y_B+y_C}{2}\right)$ c'est-à-dire : $A'\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

M est le milieu de [BC'] donc : $M\left(\frac{x_B+x_{C'}}{2};\frac{y_B+y_{C'}}{2}\right)$

c'est-à-dire : $M\left(\frac{3}{4};0\right)$

L est le symétrique de A' par rapport à B
Signifie : $\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{A'B}$

On a : $\overrightarrow{BL}\left(x_L-1;y_L\right)$ et $\overrightarrow{A'B}\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{A'B}$ Signifie que : $\begin{cases} x_L-1=\frac{1}{2} \\ y_L=-\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L=\frac{3}{2} \\ y_L=-\frac{1}{2}\end{cases}$

Donc : $L\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$

3) Montrons que les points B' , M et L sont alignés.
Il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{B'M}$ et $\overrightarrow{B'L}$ sont colinéaires.

On a : $M\left(\frac{3}{4};0\right)$ et $B'\left(0;\frac{1}{2}\right)$ et $L\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$

Donc : $\overrightarrow{B'M}\left(\frac{3}{4};-\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{B'L}\left(\frac{3}{2};-1\right)$

Et on a $\det\left(\overrightarrow{B'M};\overrightarrow{B'L}\right)=\begin{vmatrix}\frac{3}{4} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1\end{vmatrix}=-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=0$

Donc: $\overrightarrow{B'M}$ et $\overrightarrow{B'L}$ sont colinéaires par suite les points B' , M et L sont alignés.

Exercice26: (***) Soient A ; B ; C trois points du plan et E et F deux points tel que :
$\overrightarrow{AF}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

1) Montrer que les points C ; E ; F sont alignés
2) Déterminer les coordonnées des points : A ; B ; C ; E ; F dans le repère : $\left(C,\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$
3) Montrer par une autre méthode que les points : C ; E ; F sont alignés

Solution :1) On a : $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}$

Donc : $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{BC}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)$

Par suite : $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)$ (1)

D'autre part on a : $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}$

Donc : $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{4}\overrightarrow{BA}$

Donc : $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)$ (2).

De (1) et (2) en déduit que : $\overrightarrow{CE}=\frac{4}{3}\overrightarrow{CF}$

Par suite : les points C ; E ; F sont alignés.

2) On considérant le repère: $\left(C,\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$ on a : $C(0;0)$

On a $\overrightarrow{CA}=1\overrightarrow{CA}+0\overrightarrow{CB}$ donc $A(1;0)$

On a $\overrightarrow{CB}=0\overrightarrow{CA}+1\overrightarrow{CB}$ donc $B(0;1)$

On a : $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}$

Donc : $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}-\frac{5}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

Donc : $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ et par suite : $F\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{2}\right)$

Et on a : $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}$

Donc : $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{CE}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$

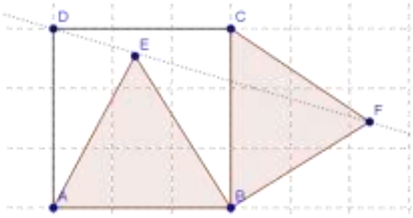
Donc : $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+-\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ par suite : $E\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$

3) Montrons par une autre méthode que les points : C ; E ; F sont alignés ?
Il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires : $\det\left(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CF}\right)=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{4}\end{vmatrix}=-\frac{2}{12}+\frac{2}{12}=0$.

Donc: $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires par suite les points C ; E ; F sont alignés .

Exercice27: (***) Soient $ABCD$ un carré tel que : $AB=a$ avec : $a\in\mathbb{R}^{+*}$ et ABE et BCF deux triangles équilatérales (voir figure ci-dessous)

1) Exprimer les vecteurs : $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2) En déduire les coordonnées des points : A ; B ; C ; E ; F dans le repère : $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.
3)Montrer que les points : D ; E ; F sont alignés.



Solution :1) soit I Le milieu de $[AB]$
Puisque ABE est un triangle équilatéral

Alors : $AE^2 = AI^2 + IE^2$ donc : $a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + IE^2$.

Donc : $IE^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$.

Donc : $IE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ par suite : $\overrightarrow{IE} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AD}$

Or on a : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE}$

Par suite on a : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AD}$.

Soit J Le milieu de $[BC]$

De la même façon on trouve que : $JF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Donc : $\overrightarrow{JF} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AB}$ or on a : $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JF}$

Par suite on a : $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AF} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

2) Déduction des coordonnées des points :
A ; B ; C ; E ; F dans le repère : $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$

On a $A(0;0)$ et $A(1;0)$

On a aussi : $\overrightarrow{AD} = 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Donc : $C(1;1)$ et $D(0;1)$.

On a aussi : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AD}$ donc : $E\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

On a aussi : $\overrightarrow{AF} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ donc : $F\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$

3) Montrons que les points : D ; E ; F sont alignés.

On a : $\overrightarrow{DE}\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)$ et $\overrightarrow{DF}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

$$\det\left(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DF}\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\det\left(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DF}\right) == -\frac{1}{4} - \left(\frac{3}{4} - 1\right) = 0$$

Donc les points : D ; E ; F sont alignés.

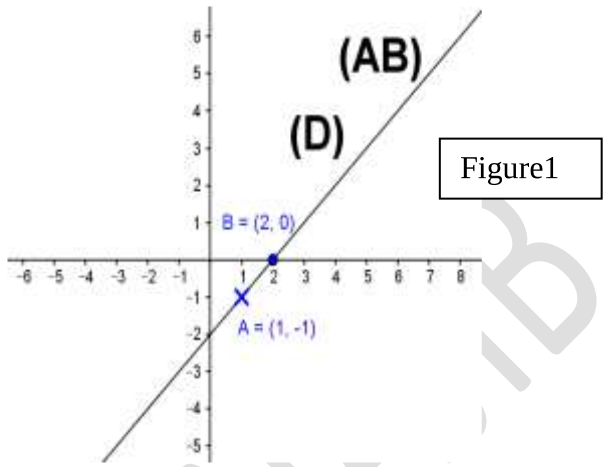
<u>Exercice28:</u> (***) Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Déterminer et représenter l'ensemble (E) des points $M(x;y)$ dans les cas suivants :

1) $x - y - 2 = 0$.

2) $(x + y - 2)^2 - (5x - 3y + 10)^2 = 0$.

Solution : 1) l'ensemble (E) des points $M(x;y)$ tel que : $x - y - 2 = 0$ est une droite (D)



Pour représenter la droite (D) il suffit de trouver deux points qui appartiennent à (D).

Si $x = 1$ alors : $1 - y - 2 = 0$

C'est-à-dire : $y = -1$ est par suite : $A(1;-1) \in (D)$

Si $y = 0$ alors : $x - 0 - 2 = 0$ C'est-à-dire $x = 2$
.

Donc $B(2;0) \in (D)$ (figure1)

2) $(x + y - 1)^2 - (3x - 5y + 7)^2 = 0$

Signifie : $(x + y - 1 - 3x + 5y - 7)(x + y - 1 + 3x - 5y + 7) = 0$

Signifie : $(-2x + 6y - 8)(4x - 4y + 6) = 0$

Signifie : $-2x + 6y - 8 = 0$ ou $4x - 4y + 6 = 0$

Signifie : $-x + 3y - 4 = 0$ ou $2x - 2y + 3 = 0$

Signifie : $x - 3y + 4 = 0$ ou $2x - 2y + 3 = 0$

Considérons les droites : $(D_1): x - 3y + 4 = 0$ et $(D_2): 2x - 2y + 3 = 0$

L'ensemble (E) des points $M(x;y)$ tel que : $(x + y - 1)^2 - (3x - 5y + 7)^2 = 0$ est donc : l'union des droites (D_1) et (D_2) : $(E) = (D_1) \cup (D_2)$

Représentation des droites (D_1) et (D_2) : il suffit de trouver deux points qui appartiennent :

a)Pour : $(D_1): x - 3y + 4 = 0$

Si $y = 0$ alors : $x = -4$ donc $A(-4;0) \in (D_1)$

Si $x = -1$ alors : $y = 1$ donc $B(-1;1) \in (D_1)$

a) Pour : $(D_2): 2x - 2y + 3 = 0$

Si $x = 0$ alors : $y = \frac{3}{2}$ donc : $C\left(0; \frac{3}{2}\right) \in (D_2)$

Si $x=1$ alors : $y=\frac{5}{2}$ donc : $D\left(1;\frac{5}{2}\right)\in(D_2)$

Pour la représentation voir Figure2.

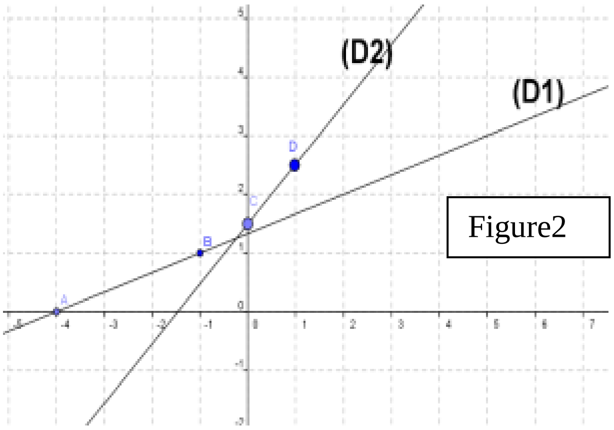


Figure2

Exercice29: (*) Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

Déterminer et représenter l'ensemble (E) des points $M(x;y)$ dans les cas suivants :

1) $2x-y-2<0$ 2) $x-y-3\geq 0$

Solution : 1) Dans un premier temps : de l'inéquation $2x-y-2<0$ on en déduit L'équation de la Droite (D) : $2x-y-2=0$.

Cette droite passe par les points : $A(0;-2)$ et $B(1;0)$ et détermine deux demi-plans P_1 et P_2 (Il nous reste à trouver lequel des deux demi plans qui est la solution de l'inéquation (D))

(Nous choisissons un point pris dans l'un des demi-plans, relevons ses coordonnées et nous contrôlons si ce point vérifie l'inéquation)

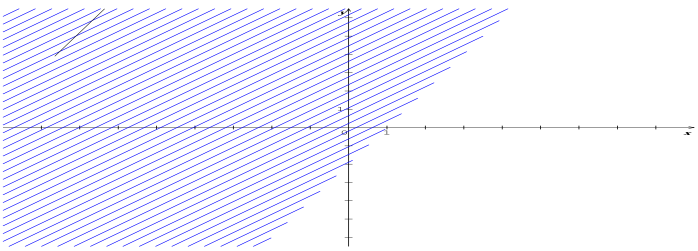
Conseil : On choisit de référence le point « O » de coordonnées (0 ; 0) ; c'est-à-dire x= 0 et y = 0 . Les calculs sont donc simplifiés. (si la droite passe par « O », on prendra un autre point…)

Soit $O(0;0)$ on a : $2\times 0-0-2<0$

Donc : les coordonnes (0 ; 0) vérifie l'inéquation.

Donc : l'ensemble (E) des points $M(x;y)$ tel que $2x-y-2<0$ est le demi- plan P_1 hachuré qui contient le point $O(0;0)$ privé de la droite (D).

2) Dans un premier temps : de l'inéquation



précédente on en déduit l'équation de la droite : (D): $x-y-3=0$ Qui détermine deux demi-plans P_1 et P_2.

Cette droite passe par les points : $A(0;-3)$ et $B(1;-2)$

Et on a : $0-0-3\geq 0$ c'est-à-dire : $-3\geq 0$

On constate que le résultat est impossible

Donc : les coordonnes (0 ; 0) ne vérifie pas l'inéquation.

Donc l'ensemble (E) des points $M(x;y)$ tel que : $x-y-3\geq 0$ est le demi- plan P_1 hachuré qui ne contient pas le point $O(0;0)$.

Exercice30: (***) Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.Soient A(-2 ; -1) et $B\left(\frac{1}{2};-2\right)$.

1)a)Donner une équation cartésienne de la droite (AB)

b) Déterminer les coordonnées du point I d'intersection de la droite (AB) et l'axe des abscisses

2) Soit (Δ) la droite définie par la représentation paramétrique suivante : $(\Delta)\begin{cases}x=3t-1\\ y=4t-4\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

a) Vérifier que : $B\in(\Delta)$.

b) Donner une équation cartésienne de la droite (Δ).

3) Résoudre graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases}4x-3y-8\leq 0\\ 2x+5y+9\geq 0\\ y\leq 0\end{cases}.$$

Solution :1) a) (AB): $ax+by+c=0$

On a : $\overrightarrow{AB}\left(\frac{5}{2};-1\right)$ un vecteur directeur de (AB)

$\overrightarrow{AB}(-b;a)$ Donc : $a=-1$ et $b=-\frac{5}{2}$

Par suite l'équation devient (AB) : $-x-\frac{5}{2}y+c=0$.

Or on sait que : A (–2,-1) et $A\in(AB)$

Donc : $-(-2)-\frac{5}{2}(-1)+c=0$ c'est-à-dire : $c=-\frac{9}{2}$

Par suite (AB): $-x-\frac{5}{2}y-\frac{9}{2}=0$

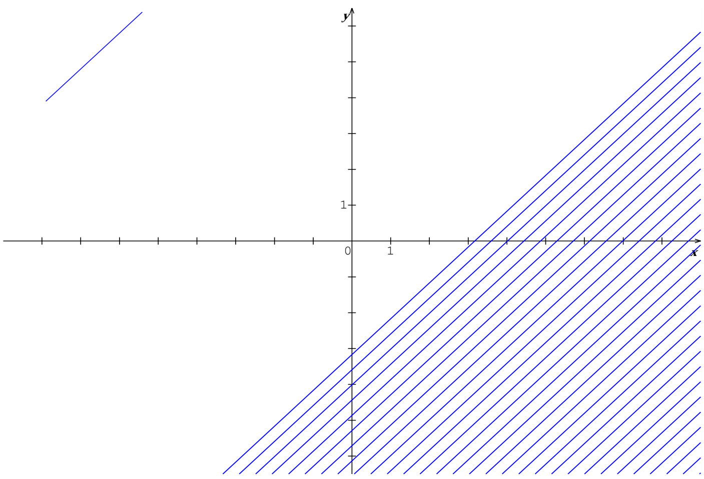
On multiplie cette équation par : -2

On trouve (AB): $2x+5y+9=0$

b) Soit $I(x;y)$ les coordonnées du point I d'intersection de la droite (AB) et l'axe des abscisses

Donc il vérifie le système suivant : $\begin{cases} y=0 \\ 2x+5y+9=0 \end{cases}$

c'est-à-dire : $\begin{cases} y=0 \\ 2x+5\times 0+9=0 \end{cases}$ Donc : $\begin{cases} y=0 \\ x=-\dfrac{9}{2} \end{cases}$



par suite : $I\left(-\dfrac{9}{2};0\right)$

2)a)On a $B\left(\dfrac{1}{2};-2\right)$ et (Δ) $\begin{cases} x=3t-1 \\ y=4t-4 \end{cases}$ ①

$B\in(\Delta)$ S'il existe un réel t tel que : $\begin{cases} \dfrac{1}{2}=3t-1 \\ -2=4t-4 \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{1}{2}=3t-1 \\ -2=4t-4 \end{cases}$ Signifie que : $\begin{cases} t=\dfrac{1}{2} \\ t=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Donc : $B\in(\Delta)$ pour : $t=\dfrac{1}{2}$

b) Une équation cartésienne de la droite (Δ) ?

On a : (Δ) $\begin{cases} x=3t-1 \\ y=4t-4 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} x+1=3t \\ y+4=4t \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} 4(x+1)=12t \\ 3(y+4)=12t \end{cases}$ c a d : $4(x+1)=3(y+4)$

Donc : $4x+4-3y-12=0$

Par suite : une équation cartésienne de la droite (Δ) est : $(\Delta): 4x-3y-8=0$

3) Résolution graphique du système:

$\begin{cases} 4x-3y-8\le 0 \\ 2x+5y+9\ge 0 \\ y\le 0 \end{cases}$

Dans un premier temps des inéquations : précédentes on en déduit des équations de droites:

$(\Delta): 4x-3y-8=0$ et (D_2): $2x+5y+9=0$

et $(D): y=0$

Et on représente ces droites .

a)Pour la droite $(\Delta): 4x-3y-8=0$:

par exemple pour $O(0;0)$ on a : $4\times 0-3\times 0-8\le 0$

Équivalent à : $-8\le 0$

Donc : les coordonnes $O(0;0)$ vérifie l'inéquation. $4x-3y-8\le 0$

b) Pour la droite (D_2): $2x+5y+9=0$ par exemple pour $O(0;0)$ on a : $2\times 0+5\times 0+9\ge 0$

Équivalent à : $9\ge 0$

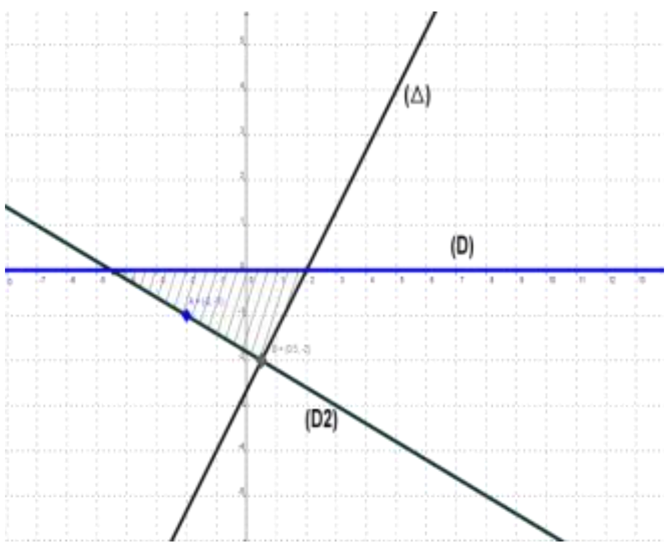
Donc : les coordonnes $O(0;0)$ vérifie l'inéquation. $2x+5y+9\ge 0$

b) Pour la droite $(D): y=0$

Par exemple pour $E(0;1)$ on a $1\le 0$

Donc : les coordonnes $E(0;1)$ vérifie l'inéquation. $y\le 0$

Donc les Solutions du système est l'ensemble des couple $(x;y)$ des points $M(x;y)$ du plan hachuré



Exercice31 : (***) On associe à chaque nombre réel m la droite $(D_m): x+my+m-3=0$

1) Démontrer que toutes les droites (D_m) passent par un point fixe $F(x_F;y_F)$ dont on déterminera les coordonnées

2) Déterminer la valeur de m dans les cas suivants :

a) (D_m) passe par le point $A(-4;2)$

b) (D_m) est parallèle à l'axe des ordonnées

c) $(D_m) \parallel (\Delta)$ telle que : $(\Delta): 3x-4y+6=0$

Solution : 1) $m\in\mathbb{R}$ $(D_m): x+my+m-3=0$

$F(x_F;y_F)\in(D_m)$ Pour tout $m\in\mathbb{R}$ signifie :

$x_F+my_F+m-3=0$

Equivaut à : $x_F-3+m(y_F+1)=0$ pour tout $m\in\mathbb{R}$

Cela Signifie que : $x_F-3=0$ et $y_F+1=0$

C'est-à-dire : $x_F=3$ et $y_F=-1$

Donc quel que soit $m\in\mathbb{R}$ on a $F(3;-1)\in(D_m)$

2)a) (D_m) passe par le point $A(4;3)$

Cela Signifie que : $-4+2m+m-3=0$

Equivaut à : $3m-7=0$ c'est-à-dire : $\boxed{m=\frac{7}{3}}$

b) (D_m) est parallèle à l'axe des ordonnées signifie : $x=a$

Cela signifie que : $\boxed{m=0}$

c)Le vecteur directeur de (D_m) est : $\vec{u}_m(-m;1)$

Et le vecteur directeur de (Δ) est : $\vec{v}(4;3)$

$(D_m)\parallel(\Delta)$ Cela Signifie que : $\det(\vec{u}_m;\vec{v})=0$

Equivaut à : $\begin{vmatrix}-m & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=0$ c'est-à-dire : $-3m-4=0$

Par suite : $\boxed{m=-\frac{4}{3}}$.

Exercice32 : (***) Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On associe à chaque nombre réel m la droite : $(D_m): (3m+1)x-(m-2)y+2m-1=0$

Déterminer la valeur de m dans les cas suivants :

1) (D_m) passe par le point $A(1;2)$

2) (D_m) passe par l'origine de repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

3) (D_m) est parallèle à l'axe des abscisses

4) (D_m) est parallèle à l'axe des ordonnées

5) $(D_m)\parallel(\Delta_1)$ telle que : $(\Delta_1): 2x-3y+1=0$

6) $(D_m)\parallel(\Delta_2)$ telle que : $(\Delta_2): y=2x+1$

7) le nombre 1 est coefficient directeur de la droite (D_m)

Solution : 1) $m\in\mathbb{R}$

$(D_m): (3m+1)x-(m-2)y+2m-1=0$

1) (D_m) passe par le point $A(1;2)$ cela Signifie que :

$(3m+1)1-(m-2)2+2m-1=0$

Équivaut à : $3m+1-2m+4+2m-1=0$

Équivaut à : $m=-\frac{4}{3}$

2) (D_m) passe par l'origine de repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Cela signifie que : $(3m+1)0-(m-2)0+2m-1=0$

Équivaut à : $2m-1=0$ équivaut à : $m=\frac{1}{2}$

3) (D_m) est parallèle à l'axe des abscisses cela signifie que son équation s'écrit sous la forme : $y=d$ (c'est-à-dire le coefficient de x est nul et le coefficient de y est non nul)

Par suite : $3m+1=0$ équivaut à : $m=-\frac{1}{3}$

4) (D_m) est parallèle à l'axe des ordonnées cela signifie que son équation s'écrit sous la forme : $x=d$

(c'est-à-dire le coefficient de x est non nul et le coefficient de y est nul)

Par suite : $m-2=0$ équivaut à : $m=2$

5) Déterminons la valeur de m telle que : $(D_m)\parallel(\Delta_1)$

avec $(D_m): (3m+1)x-(m-2)y+2m-1=0$

et $(\Delta_1): 2x-3y+1=0$

Le vecteur directeur de (D_m) est : $\vec{u}_m(-b;a)$

C'est-à-dire : $\vec{u}_m(m-2;3m+1)$

Et le vecteur directeur de (Δ_1) est : $\vec{v}(3;2)$.

$(D_m)\parallel(\Delta_1)$ Cela signifie que : $\det(\vec{u}_m;\vec{v})=0$

Équivaut à : $\begin{vmatrix}m-2 & 3\\ 3m+1 & 2\end{vmatrix}=0$

Équivaut à : $2(m-2)-3(3m+1)=0$

Équivaut à : $2m-4-9m-3=0$ donc : $-7m-7=0$

Donc $(D_m)\parallel(\Delta_1)$ équivaut à $m=-1$

6) Déterminons la valeur de m telle que :
$(D_m) \parallel (\Delta_2)$ avec $(\Delta_2): y=2x+1$

$(\Delta_2): y=2x+1$ Équivaut à : $(\Delta_2): 2x-y+1=0$

Le vecteur directeur de (D_m) est : $\vec{u}_m(m-2;3m+1)$

Et le vecteur directeur de (Δ_2) est : $\vec{w}(1;2)$

$(D_m) \parallel (\Delta_2)$ Cela Signifie que : $\det(\vec{u}_m;\vec{w})=0$

Signifie que : $\begin{vmatrix} m-2 & 1 \\ 3m+1 & 2 \end{vmatrix}=0$

Equivaut à : $2(m-2)-1(3m+1)=0$

Équivaut à : $2m-4-3m-1=0$ Équivaut à $-m-5=0$

Donc $(D_m) \parallel (\Delta_2)$ Équivaut à $m=-5$

7) Pour déterminer le coefficient directeur d'une droite qui n'est pas parallèle aux axes du repère on écrit son équation sous la forme : $(D): y=ax+b$

$(a \neq 0)$ et a est le coefficient directeur de (D)

On a : $(D_m): (3m+1)x-(m-2)y+2m-1=0$

Si $m-2 \neq 0$ c'est-à-dire : $m \neq 2$

Alors : $(D_m): y=\dfrac{3m+1}{m-2}x+\dfrac{2m-1}{m-2}$

Et puisque le nombre 1 est coefficient directeur de la droite (D_m) donc : $\dfrac{3m+1}{m-2}=1$

Cela signifie que : $3m+1=m-2$; par suite : $m=-\dfrac{3}{2}$

Exercice33: (***) Soient ABCD un parallélogramme et M le point de la droite (AD)

et N le point tel que : $\overrightarrow{BN}=-3\overrightarrow{AM}$

Et on considère le Repère : $(A;\vec{i};\vec{j})$ tel que :

$\vec{i}=\overrightarrow{AD}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{AB}$ et soit m l'abscisse du point M

Dans le Repère $(A;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer les coordonnées du point N .
2) Donner une équation cartésienne de la droite (MN).
3) Montrer que quel que soit la position du point M sur la droite (AD) alors la droite (MN) passe par un point fixe F qui ne dépend pas du point et dont on déterminera les coordonnées.

Solution : 1) On considère le Repère $(A;\vec{i};\vec{j})$:

$\vec{i}=\overrightarrow{AD}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{AB}$

m L'abscisse du point M dans le Repère $(A;\vec{i};\vec{j})$:

Equivaut à : $\overrightarrow{AM}=m\vec{i}$

Equivaut à : $\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AD}$ (car $M\in(AD)$)

Donc : $y_M=0$) c'est-à-dire : $M(m;0)$

Détermination des coordonnées du point N ?

On a : $\overrightarrow{BN}=-3\overrightarrow{AM}$ équivaut à : $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=-3\overrightarrow{AM}$

Equivaut à : $\overrightarrow{AN}=-3\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $\overrightarrow{AN}=-3m\vec{i}+\vec{j}$ par suite : $N(-3m;1)$

2) Détermination d'une équation cartésienne de la droite (MN) :on a : $N(-3m;1)$ et $M(m;0)$

Soit $L(x;y)\in(MN)$ Equivaut à : $\det(\overrightarrow{ML};\overrightarrow{MN})=0$

Equivaut à : $\begin{vmatrix} x-m & -4m \\ y & 1 \end{vmatrix}=0$

Equivaut à : $x-m+4my=0$

Par suite : $(MN): x+4my-m=0$

3) $F\in(MN)$ Quel que soit m on a :

$x_F+4my_F-m=0$ Equivaut à : $x_F+m(4y_F-1)=0$

Equivaut à : $x_F=0$ et $4y_F-1=0$

Equivaut à : $x_F=0$ et $y_F=\dfrac{1}{4}$ par suite : $F\left(0;\dfrac{1}{4}\right)$.

Exercice34: (***) Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On associe à chaque nombre réel m la droite : $(D_m): x+y-m=0$

Et soient les droites : $(\Delta): 3x+2y-5=0$ et $(\Delta'): 3x+y-2=0$

1) Montrer que tous les droites $(D_m): x+y-m=0$ sont parallèles pour tout m dans $\mathbb{R}$
2) Montrer que pour tout m dans $\mathbb{R}$ la droite : (D_m) coupe la droite (Δ) en un point A_m et la droite (D_m) coupe la droite (Δ') en un point A'_m et déterminer les coordonnées des points A_m et A'_m
3) Soit I_m le milieu du segment $[A_mA'_m]$
a) Déterminer les coordonnées des points I_m en fonction de m
b) Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m varie dans $\mathbb{R}$

Solution : 1) On a : $(D_m): x+y-m=0$ et $m\in\mathbb{R}$

Donc : $\vec{u}(-1;1)$ est un vecteur directeur de (D_m)

Et puisque $\vec{u}(-1;1)$ est un vecteur constant (ne dépend pas de m) alors tous les droites $\left(D_m\right): x+y-m=0$ ont la même direction

Donc sont parallèles pour tout m dans $\mathbb{R}$.

2)a) On a : $(\Delta): 3x+2y-5=0$

Donc : $\vec{v}(-2;3)$ est un vecteur directeur de (Δ)

Et on a : $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-1\neq 0$

Donc : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

Par suite la droite $\left(D_m\right)$ coupe la droite (Δ) en un point A_m

b) On a : $(\Delta'): 3x+y-2=0$

Donc : $A\left(\frac{-5}{4};\frac{9}{4}\right)$ est un vecteur directeur de (Δ')

Et on a : $\det\left(\vec{u};\vec{v}'\right)=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-2\neq 0$

Donc : $\vec{u}$ et $\vec{v}'$ sont non colinéaires.

Par suite la droite $\left(D_m\right)$ coupe la droite (Δ') en Un point A'_m

c)Déterminons les coordonnées des points A_m :

Posons : $A_m(x;y)$ et pour déterminer le couple $(x;y)$ on va résoudre le système $(1)\begin{cases}x+y-m=0\\ 3x+2y-5=0\end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases}-2x-2y+2m=0(1)\\ 3x+2y-5=0(2)\end{cases}$

$(1)+(2)$ Donne : $x+2m-5=0$

C'est-à-dire : $x=-2m+5$ et donc : $y=3m-5$

Et par suite : $A_m(-2m+5;3m-5)$

d) Déterminons les coordonnées des points A'_m :

Posons : $A'_m(x;y)$ et pour déterminer le couple $(x;y)$ on va résoudre le système $(1)\begin{cases}x+y-m=0\\ 3x+y-2=0\end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases}-x-y+m=0(1)\\ 3x+y-2=0(2)\end{cases}$

$(1)+(1)$ Donne : $2x+m-2=0$

C'est-à-dire : $x=\frac{2-m}{2}$ et donc : $y=\frac{3m-2}{2}$

Et par suite : $A'_m\left(\frac{2-m}{2};\frac{3m-2}{2}\right)$.

3) a) I_m le milieu du segment $\left[A_mA'_m\right]$

Donc : $x_{I_m}=\frac{x_{A_m}+x_{A'_m}}{2}=\frac{-5m+12}{4}$

Et $y_{I_m}=\frac{y_{A_m}+y_{A'_m}}{2}=\frac{9m-12}{4}$

Par suite : $I_m\left(\frac{-5m+12}{4};\frac{9m-12}{4}\right)$

C'est-à-dire : $I_m\left(3-\frac{5}{4}m;-3+\frac{9}{4}m\right)$.

b) Soit (E) l'ensemble des points I_m lorsque m varie dans $\mathbb{R}$

$M(x;y)\in(E)$ Équivaut à :qu'il existe un réel m tel que : $\begin{cases}x=3+\frac{-5}{4}m\\ y=-3+\frac{9}{4}m\end{cases}$

Ce système est la représentation paramétrique d'une droite qui passe par le point $A(3;-3)$ et de vecteur directeur : $\vec{w}\left(\frac{-5}{4};\frac{9}{4}\right)$

Donc : l'ensemble (E) des points I_m lorsque m varie dans $\mathbb{R}$ est une droite d'équation cartésienne :

$(E)\ 9x+5y-12=0$

Exercice35 : (***) Soient ABCD un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$

Les diagonales $[BD]$ et $[AC]$ se coupent I et les droites (AD) et (BC) se coupent J

Et on considère le Repère : $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$ et on pose :

$a=x_C$ avec : $a\succ 0$

1) Donner une équation cartésienne des droites (AC) et (BD) et vérifier que $\left(\frac{a}{a+1};\frac{1}{a+1}\right)$ sont les coordonnées du point I

2) Donner une équation cartésienne des droites (AD) et (BC)

Et en déduire les coordonnées du point J

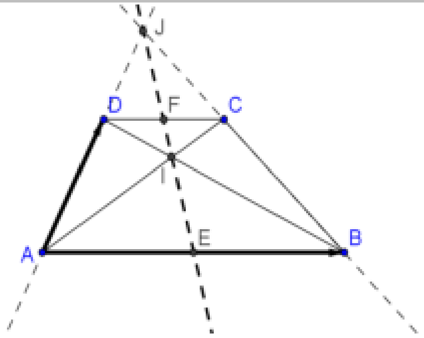
3) a)Donner une équation cartésienne de la droite (IJ) et montrer que

les points E et F les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$ appartiennent à la droite (IJ)

(voir la figure).

b) Que peut-on dire des points : I ; E ; F et J ?

Solution :



On considère le Repère : $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$

On pose : $a = x_C$ avec : $a \succ 0$

On a : $A(0;0)$ et $B(1;0)$ et $D(0;1)$ et $C(a;1)$

1) a)Détermination d'une équation cartésienne de la droite (AC).

On a : $A(0;0)$ et $C(a;1)$ donc : $\overrightarrow{AC}(a;1)$

Soit $M(x;y)\in(AC)$ Equivaut à : $\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AC}\right)=0$

Equivaut à : $\begin{vmatrix} x & a \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0$ Equivaut à : $x - ay = 0$

Par suite : $(AC): x - ay = 0$

b) Détermination d'une équation cartésienne de la droite (BD) :

On a : $B(1;0)$ et $D(0;1)$ donc : $\overrightarrow{BD}(-1;1)$

Soit $M(x;y)\in(BD)$ Equivaut à : $\det\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BD}\right)=0$

Equivaut à : $\begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0$ donc : : $x + y - 1 = 0$

Par suite : $(BD): x + y - 1 = 0$.

Vérifions que : $\left(\frac{a}{a+1};\frac{1}{a+1}\right)$ sont les coordonnées du point I ?

On a I est le point d'intersection des droites : (AC) et (BD)

Puisque: $\frac{a}{a+1} - a\frac{1}{a+1} = 0$ alors : $G\left(\frac{a}{a+1};\frac{1}{a+1}\right)\in(AC)$

Et puisque : $\frac{a}{a+1} + \frac{1}{a+1} - 1 = \frac{a+1}{a+1} - 1 = 1 - 1 = 0$

alors : $G\left(\frac{a}{a+1};\frac{1}{a+1}\right)\in(BD)$

Donc : $G\left(\frac{a}{a+1};\frac{1}{a+1}\right)$ est le point d'intersection des droites (AC) et (BD)

Donc : $G = I$ et par suite : $I\left(\frac{a}{a+1};\frac{1}{a+1}\right)$

2) a) *Méthode 1:* Détermination d'une équation cartésienne de la droite (AD)

On a : $A(0;0)$ et $D(0;1)$ donc : $\overrightarrow{AD}(0;1)$

Soit $M(x;y)\in(AD)$ équivaut à : $\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AD}\right)=0$

Équivaut à : $\begin{vmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0$ cela est équivaut à : $x = 0$

Par suite : $(AD): x = 0$

Méthode 2: (AD) est l'axe des ordonnées

Donc son équation est : $(AD): x = 0$

b) Détermination d'une équation cartésienne de la droite (BC) On a : $B(1;0)$ et $C(a;1)$

Donc : $\overrightarrow{BC}(a-1;1)$

Soit $M(x;y)\in(BC)$ Equivaut à : $\det\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BC}\right)=0$

Équivaut à : $\begin{vmatrix} x-1 & a-1 \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0$

Équivaut à : $x - 1 - (a-1)y = 0$

Par suite : $(BC): x - (a-1)y - 1 = 0$

Détermination des coordonnées du point J ?

On a J est le point d'intersection des droites : (BC) et (AD)

Et puisque : $J\in(AD)$ alors : $x_J = 0$

Donc : $J(0;\alpha)$ Et puisque : $J\in(BC)$

Et $(BC): x - (a-1)y - 1 = 0$

Alors : $0 - (a-1)\alpha - 1 = 0$

Donc : $(a-1)\alpha = -1$ et puisque : les droites (AD) et (BC) se coupent J alors $a \neq 1$

Car si non ABCD sera un parallélogramme.

Donc : $\alpha = \frac{-1}{a-1} = \frac{1}{1-a}$ et par suite : $J\left(0;\frac{1}{1-a}\right)$

3)a) Détermination d'une équation cartésienne de la droite (IJ)

On a : $I\left(\frac{a}{a+1};\frac{1}{a+1}\right)$ et $J\left(0;\frac{1}{1-a}\right)$

Donc : $\overrightarrow{IJ}\left(0-\frac{a}{a+1};\frac{1}{1-a}-\frac{1}{a+1}\right)$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{-a}{a+1};\frac{-2a}{a^2-1}\right)$

Soit $M(x;y)\in(IJ)$ Equivaut à : $\det\left(\overrightarrow{JM};\overrightarrow{IJ}\right)=0$

Equivaut à : $\begin{vmatrix} x & \frac{-a}{a+1} \\ y+\frac{1}{a-1} & \frac{-2a}{a^2-1} \end{vmatrix}=0$ Équivaut à : $\frac{-2a}{a^2-1}x+\frac{a}{a+1}\left(y+\frac{1}{a-1}\right)=0$

Après simplification on trouve : $(IJ):-2x+(a-1)y+1=0$

Montrons que les points E et F appartiennent à la droite (IJ) ?

On a : $A(0;0)$ et $B(1;0)$ et $D(0;1)$ et $C(a;1)$

E Est le milieu du segment $[AB]$

Donc : $E\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ par suite : $E\left(\frac{1}{2};0\right)$

F est le milieu du segment $[CD]$

Donc : $F\left(\frac{x_C+x_D}{2};\frac{y_C+y_D}{2}\right)$ par suite : $F\left(\frac{a}{2};1\right)$

On a : $(IJ):-2x+(a-1)y+1=0$

Puisque : $-2\frac{1}{2}+(a-1)0+1=0$ alors : $E\in(IJ)$

Puisque : $-2\frac{a}{2}+(a-1)1+1=-a+a-1+1=0$ Alors : $F\in(IJ)$.

b) Puisque : $F\in(IJ)$ et $E\in(IJ)$ alors les points :

I ; E ; F et J sont alignés.