

Exercices sur la division euclidienne des polynômes

Exercice 1

Calculer le quotient et le reste de chacune des divisions suivantes de A par B :

- (1) $A(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ et $B(x) = x^2 + 1$
- (2) $A(y) = y^3 + 2y^2 + 3$ et $B(y) = y^2 - y - 1$
- (3) $A(z) = z^3 - 4z + 5$ et $B(z) = z^2 - 3z + 2$
- (4) $A(x) = x^4 + x^3 - x^2 - x + 1$ et $B(x) = x^2 - 4x + 1$
- (5) $A(x) = x^4 - 3x^2 + 6$ et $B(x) = x^3 - 5x^2 + x - 6$
- (6) $A(x) = x^4 + 2$ et $B(x) = x^2 + 4x - 2$
- (7) $A(x) = x^5 - 3x^3 - 2x^2 + x + 6$ et $B(x) = x^3 - x + 1$
- (8) $A(y) = y^6 - 5y^5 - 2y^4 - 3y^3$ et $B(y) = y^3 + y^2 - 2$
- (9) $A(x) = -2x^3 + 4x^2$ et $B(x) = x^2 - 2$
- (10) $A(x) = 3x^3 - 2x + 1$ et $B(x) = 3x^2 + 3x - 1$
- (11) $A(x) = x^4 - x$ et $B(x) = 2x + 1$
- (12) $A(x) = 3x^3 + 5x^2 + 2$ et $B(x) = 2x^2 - 1$
- (13) $A(y) = y^4 + 1$ et $B(y) = y^2 - \sqrt{2}y + 1$
- (14) $A(z) = -3z^6 + z^4 - 5z^2 + 1$ et $B(z) = 3z^2 + z + 1$

Réponses :

- (1) $Q(x) = x + 1$ et $R(x) = 0$
- (2) $Q(y) = y + 3$ et $R(y) = 4y + 6$
- (3) $Q(z) = z + 3$ et $R(z) = 3z - 1$
- (4) $Q(x) = x^2 + 5x + 18$ et $R(x) = 66x - 17$
- (5) $Q(x) = x + 5$ et $R(x) = 21x^2 + x + 36$
- (6) $Q(x) = x^2 - 4x + 18$ et $R(x) = -80x + 38$
- (7) $Q(x) = x^2 - 2$ et $R(x) = -3x^2 - x + 8$
- (8) $Q(y) = y^3 - 6y^2 + 4y - 5$ et $R(y) = -7y^2 + 8y - 10$
- (9) $Q(x) = -2x + 4$ et $R(x) = -4x + 8$
- (10) $Q(x) = x - 1$ et $R(x) = 2x$
- (11) $Q(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{8} - \frac{9}{16}$ et $R(x) = \frac{9}{16}$
- (12) $Q(x) = \frac{3x}{2} + \frac{5}{2}$ et $R(x) = \frac{3x}{2} + \frac{9}{2}$
- (13) $Q(y) = y^2 + \sqrt{2}y + 1$ et $R(y) = 0$
- (14) $Q(z) = -z^4 + \frac{z^3}{3} + \frac{5z^2}{9} - \frac{8z}{27} - \frac{142}{81}$ et $R(z) = \frac{166z}{81} + \frac{223}{81}$

Exercice 2

Calculer le quotient et le reste des divisions euclidiennes suivantes à l'aide du schéma de Horner :

(1) $(2x^3 - 3x + 2) : (x + 2)$

(6) $(x^3 + 5x^2 + 5x - 2) : (x - 1)$

(2) $(2x^3 - 3x + 2) : (x - 2)$

(7) $(x^4 - 2x^3 + x - 2) : (x + 1)$

(3) $(3y^3 + 2y^2 - 3y - 2) : (y - 1)$

(8) $(x^4 - 2x^3 + x - 2) : (x - 1)$

(4) $(3z^3 + 2z^2 - 3z - 2) : (z + 1)$

(9) $(x^4 - 3x^2 + 1) : (x + 3)$

(5) $(x^3 + 5x^2 + 5x - 2) : (x + 2)$

(10) $(x^4 - 3x^2 + 1) : (x - 3)$

Réponses :

(1) $Q(x) = 2x^2 - 4x + 5$ et $r = -8$

(2) $Q(x) = 2x^2 + 4x + 5$ et $r = 12$

(3) $Q(x) = 3y^2 + 5y + 2$ et $r = 0$

(4) $Q(z) = 3z^2 - z - 2$ et $r = 0$

(5) $Q(x) = x^2 + 3x - 1$ et $r = 0$

(6) $Q(x) = x^2 + 6x + 11$ et $r = 9$

(7) $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ et $r = 0$

(8) $Q(x) = x^3 - x^2 - x$ et $r = -2$

(9) $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 18$ et $r = 55$

(10) $Q(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 18$ et $r = 55$

Exercice 3

- (1) a) Effectuer la division euclidienne de $P(x) = 2x^2 + x + 5$ par $x - \frac{3}{2}$.
 b) En déduire la division euclidienne de $P(x)$ par $\frac{3}{2} - x$, par $2x - 3$, par $3 - 2x$, par $4x - 6$.
 c) En déduire aussi la division euclidienne de $S(x) = 6x^2 + 3x + 15$ par $x - \frac{3}{2}$, par $\frac{3}{2} - x$, par $2x - 3$, par $3 - 2x$, par $4x - 6$.
- (2) Expliquer comment on peut utiliser un schéma de Horner pour effectuer une division euclidienne d'un polynôme quelconque par un binôme de la forme $ax + b$. Appliquer cette méthode pour effectuer les divisions euclidiennes suivantes :

a) $(2x^3 - 5x + 8) : (2x + 4)$

d) $(3z^3 + z^2 - 8z - 7) : (3 - 4z)$

b) $(x^3 - 3x + 2) : (5x - 2)$

e) $(4x^3 - 5x - 2) : (2x + 3)$

c) $(3y^3 + 2y^2 - 5) : (1 - y)$

Exercice 4

Effectuer la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ par deux méthodes :

a) en développant d'abord $B(x)$ si nécessaire ;

b) en utilisant des schémas de Horner successifs.

(1) $A(x) = x^3 + 2x^2 - x - 4$ et $B(x) = (x - 3)(x + 1)$

(2) $A(x) = x^4 - x^2 - 2x - 8$ et $B(x) = x^2 - 4$

(3) $A(x) = x^5 + x + 1$ et $B(x) = (x - 1)^3$

Réponses :

(1) $Q(x) = x + 4$ et $R(x) = 10x + 8$

(2) $Q(x) = x^2 + 3$ et $R(x) = -2x + 4$

(3) $Q(x) = x^2 + 3x + 6$ et $R(x) = 10x^2 - 14x + 7$

Exercice 5

Déterminer les paramètres réels m , p et r tels que :

(1) $\frac{6x^2 + x - 3}{3x - 1} = mx + p + \frac{r}{3x - 1}$

(2) $\frac{-6x^2 + x + 5}{2x + 1} = mx + p + \frac{r}{2x + 1}$

(3) $\frac{2x^3 - 4x^2 - x + 5}{2x^2 - 1} = mx + p + \frac{r}{2x^2 - 1}$

(4) $\frac{4x^2 - 4x - 7}{2x + 1} = mx + p + \frac{r}{2x + 1}$

Réponses :

(1) $m = 2, p = 1, r = -2$

(3) $m = 1, p = -2, r = 3$

(2) $m = -3, p = 2, r = 3$

(4) $m = 2, p = -3, r = -4$

Exercice 6

a) Déterminer le paramètre réel m pour que la division du polynôme

(1) $A(x) = 2mx^2 - (m + 1)x - m$ par $x + 2$ donne un reste égal à 11.

(2) $A(x) = mx^2 - 2(m - 1)x + m$ par $x - 3$ donne un reste égal à 2.

(3) $A(x) = mx^2 + (4m - 3)x - 2$ par $x + 2$ soit exacte.

(4) $A(x) = mx^2 - (2m - 1)x + 3$ par $x + 3$ donne un reste égal à -3 .

(5) $A(x) = (m - 1)x^2 - (2m + 1)x - 3m$ par $x + 2$ donne un reste égal à 8.

(6) $A(x) = 2mx^2 - (5m - 2)x - 3m$ par $x - 3$ donne un reste égal à -2 .

(7) $A(x) = (m + 1)x^3 - (2m - 1)x^2 + 3x - m$ par $x + 1$ soit exacte.

b) Après avoir remplacé le paramètre réel m par la valeur trouvée en a), calculer dans chaque cas le quotient et écrire la division euclidienne.

Réponses :

- (1) $m = 1$; $2x^2 - 2x - 1 = (x + 2)(2x - 6) + 11$
- (2) $m = -1$; $-x^2 + 4x - 1 = (x - 3)(-x + 1) + 2$
- (3) $m = 1$; $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$
- (4) $m = -\frac{1}{5}$; $-\frac{1}{5}x^2 + \frac{7}{5}x + 3 = (x + 3)(-\frac{1}{5}x + 2) - 3$
- (5) $m = 2$; $x^2 - 5x - 6 = (x + 2)(x - 7) + 8$
- (6) impossible !
- (7) $m = -\frac{3}{4}$; $\frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 3x + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(x + 1)(x^2 + 9x + 3)$

Exercice 7

Déterminer les paramètres réels a et b tels que le polynôme $x^4 + x^3 + ax^2 + bx + 2$ soit divisible par $x^2 + 2$. Quelle factorisation obtient-on alors ?

Réponse : $a = 3$ et $b = 2$. La factorisation est :

$$x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = (x^2 + 2)(x^2 + x + 1)$$

Exercice 8

Factoriser les polynômes suivants autant que possible :

- (1) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$
- (2) $P(x) = 3x^3 - 11x^2 - 6x + 8$
- (3) $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$
- (4) $P(x) = 9x^3 - 6x^2 - 20x - 8$
- (5) $P(x) = 4x^4 - 8x^3 - 13x^2 + 2x + 3$

Réponses :

- (1) $P(x) = (x + 2)(x - 3)(2x - 1)$
- (2) $P(x) = (x + 1)(x - 4)(3x - 2)$
- (3) $P(x) = (x - 1)(x + 2)(3x - 1)$
- (4) $P(x) = (x - 2)(3x + 2)^2$
- (5) $P(x) = (x + 1)(x - 3)(2x - 1)(2x + 1)$

Exercice 9

Simplifier les fractions rationnelles suivantes après avoir précisé les conditions d'existence :

$$(1) \quad R(x) = \frac{6x^3 + 7x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2}$$

$$(2) \quad R(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{4x^3 - 12x^2 - x + 3}$$

$$(5) \quad R(x) = \frac{3x^3 - 7x^2 + x + 2}{x^2 - 4x + 4}$$

$$(7) \quad R(x) = \frac{4x^3 + 3x^2 - 2x - 1}{3x^2 + x - 2}$$

$$(3) \quad R(x) = \frac{9x^3 - 4x + 27x^2 - 12}{3x^2 + 7x - 6}$$

$$(4) \quad R(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 + 2x - 3}{x^2 - 9}$$

$$(6) \quad R(x) = \frac{3x^3 + 7x^2 - 5x + 3}{x^2 + 6x + 9}$$

Réponses :

$$(1) \quad C.E. : x \neq -1 \text{ et } x \neq -2 ; R(x) = \frac{6x^2 + x - 2}{x + 2}$$

$$(2) \quad C.E. : x \neq 3 \text{ et } x \neq \pm \frac{1}{2} ; R(x) = \frac{x - 3}{4x^2 - 1}$$

$$(3) \quad C.E. : x \neq -3 \text{ et } x \neq \frac{2}{3} ; R(x) = 3x + 2$$

$$(4) \quad C.E. : x \neq -3 \text{ et } x \neq 3 ; R(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x - 3}$$

$$(5) \quad C.E. : x \neq 2 ; R(x) = \frac{3x^2 - x - 1}{x - 2}$$

$$(6) \quad C.E. : x \neq -3 ; R(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x + 3}$$

$$(7) \quad C.E. : x \neq -1 \text{ et } x \neq \frac{2}{3} ; R(x) = \frac{4x^2 - x - 1}{3x - 2}$$

Exercice 10

Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} :

$$(1) \quad 4x^3 - 20x^2 + 33x - 18 = 0$$

$$(2) \quad 2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0$$

$$(3) \quad 2x^3 + 4x^2 - x - 2 = 0$$

$$(4) \quad 9x^3 + 15x^2 - 32x + 12 = 0$$

$$(5) \quad 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(6) \quad 4x^3 = 16x^2 - 13x + 3$$

$$(7) \quad 4x^3 - 4x^2 = 5x - 5$$

Réponses :

$$(1) \quad S = \left\{ \frac{3}{2}, 2 \right\}$$

$$(2) \quad S = \left\{ -\frac{1}{2}, 1, 2 \right\}$$

$$(3) \quad S = \left\{ -2, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

$$(7) \quad S = \left\{ 1, \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \right\}$$

$$(4) \quad S = \left\{ \frac{2}{3}, -3 \right\}$$

$$(5) \quad S = \left\{ -1, \frac{1}{2}, 2 \right\}$$

$$(6) \quad S = \left\{ \frac{1}{2}, 3 \right\}$$