

## Exercices sur la division euclidienne des polynômes

### Exercice 1

Calculer le quotient et le reste de chacune des divisions suivantes de  $A$  par  $B$  :

- (1)  $A(x) = x^3 + x^2 + x + 1$  et  $B(x) = x^2 + 1$
- (2)  $A(y) = y^3 + 2y^2 + 3$  et  $B(y) = y^2 - y - 1$
- (3)  $A(z) = z^3 - 4z + 5$  et  $B(z) = z^2 - 3z + 2$
- (4)  $A(x) = x^4 + x^3 - x^2 - x + 1$  et  $B(x) = x^2 - 4x + 1$
- (5)  $A(x) = x^4 - 3x^2 + 6$  et  $B(x) = x^3 - 5x^2 + x - 6$
- (6)  $A(x) = x^4 + 2$  et  $B(x) = x^2 + 4x - 2$
- (7)  $A(x) = x^5 - 3x^3 - 2x^2 + x + 6$  et  $B(x) = x^3 - x + 1$
- (8)  $A(y) = y^6 - 5y^5 - 2y^4 - 3y^3$  et  $B(y) = y^3 + y^2 - 2$
- (9)  $A(x) = -2x^3 + 4x^2$  et  $B(x) = x^2 - 2$
- (10)  $A(x) = 3x^3 - 2x + 1$  et  $B(x) = 3x^2 + 3x - 1$
- (11)  $A(x) = x^4 - x$  et  $B(x) = 2x + 1$
- (12)  $A(x) = 3x^3 + 5x^2 + 2$  et  $B(x) = 2x^2 - 1$
- (13)  $A(y) = y^4 + 1$  et  $B(y) = y^2 - \sqrt{2}y + 1$
- (14)  $A(z) = -3z^6 + z^4 - 5z^2 + 1$  et  $B(z) = 3z^2 + z + 1$

Réponses :

- (1)  $Q(x) = x + 1$  et  $R(x) = 0$
- (2)  $Q(y) = y + 3$  et  $R(y) = 4y + 6$
- (3)  $Q(z) = z + 3$  et  $R(z) = 3z - 1$
- (4)  $Q(x) = x^2 + 5x + 18$  et  $R(x) = 66x - 17$
- (5)  $Q(x) = x + 5$  et  $R(x) = 21x^2 + x + 36$
- (6)  $Q(x) = x^2 - 4x + 18$  et  $R(x) = -80x + 38$
- (7)  $Q(x) = x^2 - 2$  et  $R(x) = -3x^2 - x + 8$
- (8)  $Q(y) = y^3 - 6y^2 + 4y - 5$  et  $R(y) = -7y^2 + 8y - 10$
- (9)  $Q(x) = -2x + 4$  et  $R(x) = -4x + 8$
- (10)  $Q(x) = x - 1$  et  $R(x) = 2x$
- (11)  $Q(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{8} - \frac{9}{16}$  et  $R(x) = \frac{9}{16}$
- (12)  $Q(x) = \frac{3x}{2} + \frac{5}{2}$  et  $R(x) = \frac{3x}{2} + \frac{9}{2}$
- (13)  $Q(y) = y^2 + \sqrt{2}y + 1$  et  $R(y) = 0$
- (14)  $Q(z) = -z^4 + \frac{z^3}{3} + \frac{5z^2}{9} - \frac{8z}{27} - \frac{142}{81}$  et  $R(z) = \frac{166z}{81} + \frac{223}{81}$

### Exercice 2

Calculer le quotient et le reste des divisions euclidiennes suivantes à l'aide du schéma de Horner :

(1)  $(2x^3 - 3x + 2) : (x + 2)$

(6)  $(x^3 + 5x^2 + 5x - 2) : (x - 1)$

(2)  $(2x^3 - 3x + 2) : (x - 2)$

(7)  $(x^4 - 2x^3 + x - 2) : (x + 1)$

(3)  $(3y^3 + 2y^2 - 3y - 2) : (y - 1)$

(8)  $(x^4 - 2x^3 + x - 2) : (x - 1)$

(4)  $(3z^3 + 2z^2 - 3z - 2) : (z + 1)$

(9)  $(x^4 - 3x^2 + 1) : (x + 3)$

(5)  $(x^3 + 5x^2 + 5x - 2) : (x + 2)$

(10)  $(x^4 - 3x^2 + 1) : (x - 3)$

Réponses :

(1)  $Q(x) = 2x^2 - 4x + 5$  et  $r = -8$

(2)  $Q(x) = 2x^2 + 4x + 5$  et  $r = 12$

(3)  $Q(x) = 3y^2 + 5y + 2$  et  $r = 0$

(4)  $Q(z) = 3z^2 - z - 2$  et  $r = 0$

(5)  $Q(x) = x^2 + 3x - 1$  et  $r = 0$

(6)  $Q(x) = x^2 + 6x + 11$  et  $r = 9$

(7)  $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$  et  $r = 0$

(8)  $Q(x) = x^3 - x^2 - x$  et  $r = -2$

(9)  $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 18$  et  $r = 55$

(10)  $Q(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 18$  et  $r = 55$

### Exercice 3

- (1) a) Effectuer la division euclidienne de  $P(x) = 2x^2 + x + 5$  par  $x - \frac{3}{2}$ .  
 b) En déduire la division euclidienne de  $P(x)$  par  $\frac{3}{2} - x$ , par  $2x - 3$ , par  $3 - 2x$ , par  $4x - 6$ .  
 c) En déduire aussi la division euclidienne de  $S(x) = 6x^2 + 3x + 15$  par  $x - \frac{3}{2}$ , par  $\frac{3}{2} - x$ , par  $2x - 3$ , par  $3 - 2x$ , par  $4x - 6$ .
- (2) Expliquer comment on peut utiliser un schéma de Horner pour effectuer une division euclidienne d'un polynôme quelconque par un binôme de la forme  $ax + b$ . Appliquer cette méthode pour effectuer les divisions euclidiennes suivantes :

a)  $(2x^3 - 5x + 8) : (2x + 4)$

d)  $(3z^3 + z^2 - 8z - 7) : (3 - 4z)$

b)  $(x^3 - 3x + 2) : (5x - 2)$

e)  $(4x^3 - 5x - 2) : (2x + 3)$

c)  $(3y^3 + 2y^2 - 5) : (1 - y)$

**Exercice 4**

Effectuer la division euclidienne de  $A(x)$  par  $B(x)$  par deux méthodes :

- a) en développant d'abord  $B(x)$  si nécessaire ;  
 b) en utilisant des schémas de Horner successifs.

(1)  $A(x) = x^3 + 2x^2 - x - 4$  et  $B(x) = (x - 3)(x + 1)$

(2)  $A(x) = x^4 - x^2 - 2x - 8$  et  $B(x) = x^2 - 4$

(3)  $A(x) = x^5 + x + 1$  et  $B(x) = (x - 1)^3$

Réponses :

(1)  $Q(x) = x + 4$  et  $R(x) = 10x + 8$

(2)  $Q(x) = x^2 + 3$  et  $R(x) = -2x + 4$

(3)  $Q(x) = x^2 + 3x + 6$  et  $R(x) = 10x^2 - 14x + 7$

**Exercice 5**

Déterminer les paramètres réels  $m$ ,  $p$  et  $r$  tels que :

(1)  $\frac{6x^2 + x - 3}{3x - 1} = mx + p + \frac{r}{3x - 1}$

(2)  $\frac{-6x^2 + x + 5}{2x + 1} = mx + p + \frac{r}{2x + 1}$

(3)  $\frac{2x^3 - 4x^2 - x + 5}{2x^2 - 1} = mx + p + \frac{r}{2x^2 - 1}$

(4)  $\frac{4x^2 - 4x - 7}{2x + 1} = mx + p + \frac{r}{2x + 1}$

Réponses :

(1)  $m = 2, p = 1, r = -2$

(3)  $m = 1, p = -2, r = 3$

(2)  $m = -3, p = 2, r = 3$

(4)  $m = 2, p = -3, r = -4$

**Exercice 6**

a) Déterminer le paramètre réel  $m$  pour que la division du polynôme

(1)  $A(x) = 2mx^2 - (m + 1)x - m$  par  $x + 2$  donne un reste égal à 11.

(2)  $A(x) = mx^2 - 2(m - 1)x + m$  par  $x - 3$  donne un reste égal à 2.

(3)  $A(x) = mx^2 + (4m - 3)x - 2$  par  $x + 2$  soit exacte.

(4)  $A(x) = mx^2 - (2m - 1)x + 3$  par  $x + 3$  donne un reste égal à  $-3$ .

(5)  $A(x) = (m - 1)x^2 - (2m + 1)x - 3m$  par  $x + 2$  donne un reste égal à 8.

(6)  $A(x) = 2mx^2 - (5m - 2)x - 3m$  par  $x - 3$  donne un reste égal à  $-2$ .

(7)  $A(x) = (m + 1)x^3 - (2m - 1)x^2 + 3x - m$  par  $x + 1$  soit exacte.

b) Après avoir remplacé le paramètre réel  $m$  par la valeur trouvée en a), calculer dans chaque cas le quotient et écrire la division euclidienne.

Réponses :

- (1)  $m = 1$  ;  $2x^2 - 2x - 1 = (x + 2)(2x - 6) + 11$
- (2)  $m = -1$  ;  $-x^2 + 4x - 1 = (x - 3)(-x + 1) + 2$
- (3)  $m = 1$  ;  $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$
- (4)  $m = -\frac{1}{5}$  ;  $-\frac{1}{5}x^2 + \frac{7}{5}x + 3 = (x + 3)(-\frac{1}{5}x + 2) - 3$
- (5)  $m = 2$  ;  $x^2 - 5x - 6 = (x + 2)(x - 7) + 8$
- (6) impossible !
- (7)  $m = -\frac{3}{4}$  ;  $\frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 3x + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(x + 1)(x^2 + 9x + 3)$

### Exercice 7

Déterminer les paramètres réels  $a$  et  $b$  tels que le polynôme  $x^4 + x^3 + ax^2 + bx + 2$  soit divisible par  $x^2 + 2$ . Quelle factorisation obtient-on alors ?

Réponse :  $a = 3$  et  $b = 2$ . La factorisation est :

$$x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = (x^2 + 2)(x^2 + x + 1)$$

### Exercice 8

Factoriser les polynômes suivants autant que possible :

- (1)  $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$
- (2)  $P(x) = 3x^3 - 11x^2 - 6x + 8$
- (3)  $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$
- (4)  $P(x) = 9x^3 - 6x^2 - 20x - 8$
- (5)  $P(x) = 4x^4 - 8x^3 - 13x^2 + 2x + 3$

Réponses :

- (1)  $P(x) = (x + 2)(x - 3)(2x - 1)$
- (2)  $P(x) = (x + 1)(x - 4)(3x - 2)$
- (3)  $P(x) = (x - 1)(x + 2)(3x - 1)$
- (4)  $P(x) = (x - 2)(3x + 2)^2$
- (5)  $P(x) = (x + 1)(x - 3)(2x - 1)(2x + 1)$

### Exercice 9

Simplifier les fractions rationnelles suivantes après avoir précisé les conditions d'existence :

$$(1) \quad R(x) = \frac{6x^3 + 7x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2}$$

$$(2) \quad R(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{4x^3 - 12x^2 - x + 3}$$

$$(5) \quad R(x) = \frac{3x^3 - 7x^2 + x + 2}{x^2 - 4x + 4}$$

$$(7) \quad R(x) = \frac{4x^3 + 3x^2 - 2x - 1}{3x^2 + x - 2}$$

$$(3) \quad R(x) = \frac{9x^3 - 4x + 27x^2 - 12}{3x^2 + 7x - 6}$$

$$(4) \quad R(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 + 2x - 3}{x^2 - 9}$$

$$(6) \quad R(x) = \frac{3x^3 + 7x^2 - 5x + 3}{x^2 + 6x + 9}$$

Réponses :

$$(1) \quad C.E. : x \neq -1 \text{ et } x \neq -2 ; R(x) = \frac{6x^2 + x - 2}{x + 2}$$

$$(2) \quad C.E. : x \neq 3 \text{ et } x \neq \pm \frac{1}{2} ; R(x) = \frac{x - 3}{4x^2 - 1}$$

$$(3) \quad C.E. : x \neq -3 \text{ et } x \neq \frac{2}{3} ; R(x) = 3x + 2$$

$$(4) \quad C.E. : x \neq -3 \text{ et } x \neq 3 ; R(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x - 3}$$

$$(5) \quad C.E. : x \neq 2 ; R(x) = \frac{3x^2 - x - 1}{x - 2}$$

$$(6) \quad C.E. : x \neq -3 ; R(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x + 3}$$

$$(7) \quad C.E. : x \neq -1 \text{ et } x \neq \frac{2}{3} ; R(x) = \frac{4x^2 - x - 1}{3x - 2}$$

### Exercice 10

Résoudre les équations suivantes dans  $\mathbb{R}$  :

$$(1) \quad 4x^3 - 20x^2 + 33x - 18 = 0$$

$$(2) \quad 2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0$$

$$(3) \quad 2x^3 + 4x^2 - x - 2 = 0$$

$$(4) \quad 9x^3 + 15x^2 - 32x + 12 = 0$$

$$(5) \quad 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(6) \quad 4x^3 = 16x^2 - 13x + 3$$

$$(7) \quad 4x^3 - 4x^2 = 5x - 5$$

Réponses :

$$(1) \quad S = \left\{ \frac{3}{2}, 2 \right\}$$

$$(2) \quad S = \left\{ -\frac{1}{2}, 1, 2 \right\}$$

$$(3) \quad S = \left\{ -2, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

$$(7) \quad S = \left\{ 1, \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \right\}$$

$$(4) \quad S = \left\{ \frac{2}{3}, -3 \right\}$$

$$(5) \quad S = \left\{ -1, \frac{1}{2}, 2 \right\}$$

$$(6) \quad S = \left\{ \frac{1}{2}, 3 \right\}$$