

Conjectures et démonstrations avec des nombres entiers naturels – Correction

Exercice 1 :

1. Calculer $2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 20^2, 21^2$. Quel lien peut-on conjecturer entre la parité d'un entier et celle de son carré ?

$$2^2 = 4 ; 3^2 = 9 ; 4^2 = 16 ; 5^2 = 25 ; 20^2 = 400 ; 21^2 = 441$$

On peut conjecturer que le carré d'un nombre pair (réciproquement impair) est pair (réciproquement impair).

2. Un entier naturel pair n admet une écriture de la forme $n = 2k$ où k est un entier naturel.
Quelle écriture du même type admet un naturel n impair ?

Un entier naturel impair m admet une écriture de la forme $m = 2k + 1$ où k est un entier naturel.

En calculant n^2 dans les deux cas, démontrer la conjecture de la première question.

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

$$m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Enoncer les propriétés démontrées.

Le carré d'un nombre pair (respectivement impair) est pair (respectivement impair).

3. Enoncer la réciproque des propriétés précédentes puis les démontrer.

Si un entier a a un carré pair (respectivement impair), alors il est pair (respectivement impair).

Pour la démontrer on utilise le raisonnement par contraposée :

la contraposée de « (P) implique (Q) » est « (non Q) implique (non P) ». Ces deux propriétés sont équivalentes

Dans notre cas, (P) : « l'entier est pair » et (Q) : « son carré est pair ». Et donc (non Q) : « son carré n'est pas pair, il est donc impair » et (non P) : « l'entier n'est pas pair, il est donc impair ».

On veut maintenant montrer que « Q implique P » on montre donc sa contraposée « non P implique non Q ».

Si le nombre n n'est pas pair son carré n^2 n'est pas pair d'après la question 1 CQFD

Exercice 2 :

1. Calculer sans calculatrice :

$$1000^2 - 999^2 ; 1001^2 - 1000^2 ; 1002^2 - 1001^2.$$

$$1000^2 - 999^2 = (1000+999)(1000-999) = 1999 ; 1001^2 - 1000^2 = (1001+1000)(1001-1000) = 2001 ;$$

$$1002^2 - 1001^2 = (1002+1001)(1002-1001) = 2003 ;$$

Que peut-on conjecturer à partir de ces trois résultats ?

On peut conjecturer que la soustraction de deux carrés d'entiers consécutifs est égale à la somme des deux entiers consécutifs.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $(n+1)^2 - n^2$.

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 = (n+1) + n$$

En déduire une démonstration de la conjecture précédente.

On vient de le démontrer en répondant à la question précédente.

3. Ecrire 199 comme la différence de deux carrés. $199 = 100 + 99 = 100^2 - 99^2$