Fiche d'exercices corrigés – Vecteurs

Exercice 1 :

On se place dans un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Soient les points A($-\frac{7}{2}$; 2), B(-2 ; 5), C(5 ; $\frac{13}{2}$), D(3 ; $\frac{5}{2}$).

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. En déduire que le quadrilatère ABCD est un trapèze.
3. On définit le point I par l'égalité : $\overrightarrow{IA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{ID}$.

Montrer que les coordonnées de I sont (-23 ; $\frac{1}{2}$).

4. Les points I, B et C sont-ils alignés ?
5. J et K étant les milieux respectifs de [AB] et [CD], déterminer les coordonnées de J et K.

Démontrer alors que les points I, J et K sont alignés.

Exercice 2 :

ABC est un triangle.

1. Placer les points D, E et F tels que : $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

et F est le milieu de [AC].

2. Exprimer, en justifiant, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{FE}$.
3. **a)** Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   b) En déduire un réel k tel que $\overrightarrow{AD} = k\,\overrightarrow{AE}$.
   c) Que peut-on alors conclure ?
4. **a)** Placer le point M tel que : $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$
   b) Placer le point G symétrique de F par rapport à C.
   Montrer que $\overrightarrow{GA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$ puis que $\overrightarrow{GD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.
   c) En déduire la nature du quadrilatère AMDG.

Exercice 3 :

ABC est un triangle

1. Placer les points H et G vérifiant les relations suivantes :
   $\overrightarrow{AH} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BG} = -\frac{7}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$
2. On choisit le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$)
   a) Donner les coordonnées des points A, B et C dans ce repère.
   b) Déterminer les coordonnées des points H et G dans ce repère.
3. Les points A, G et H sont-ils alignés ?

Correction

Exercice 1:

Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, $A(-\frac{7}{2} ; 2)$, $B(-2 ;5)$, $C(5 ;\frac{13}{2})$ et $D(3 ; \frac{5}{2})$.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 - \left(-\frac{7}{2}\right) \\ 5 - 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3 - 5 \\ \frac{5}{2} - \frac{13}{2} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

2. $xy' - x'y = \frac{3}{2} \times (-4) - (-2) \times 3 = -6 + 6 = 0.$

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
En conclusion, ABCD est un trapèze.

3. $I(x_I ; y_I)$ $\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} - x_I \\ 2 - y_I \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix} 3 - x_I \\ \frac{5}{2} - y_I \end{pmatrix}$. L'égalité $\overrightarrow{IA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{ID}$ nous donne :

$-\frac{7}{2} - x_I = \frac{3}{4}(3 - x_I)$ c'est à dire $-\frac{7}{2} - x_I = \frac{9}{4} - \frac{3}{4}x_I$

$2 - y_I = \frac{3}{4}\left(\frac{5}{2} - y_I\right)$ c'est à dire $2 - y_I = \frac{15}{8} - \frac{3}{4}y_I$

La première égalité donne : $\frac{1}{4}x_I = -\frac{7}{2} - \frac{9}{4} = -\frac{23}{4}$ donc $x_I = -23$

La deuxième égalité donne : $\frac{1}{4}y_I = 2 - \frac{15}{8} = \frac{1}{8}$ donc $y_I = -\frac{1}{2}$ et $I(-23 ; -\frac{1}{2})$

4. $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix} -2 - (-23) \\ 5 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix} 21 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix} 5 - (-23) \\ \frac{13}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix} 28 \\ 6 \end{pmatrix}$

$xy' - x'y = 21 \times 6 - 28 \times \frac{9}{2} = 126 - 126 = 0$

Donc $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont colinéaires et les points I, B et C sont alignés.

5. a) J est le milieu de [AB], d'où $x_J = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-\frac{7}{2} - 2}{2} = -\frac{11}{4}$ et $J(-\frac{11}{4} ; \frac{7}{2})$.

$y_J = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2 + 5}{2} = \frac{7}{2}$

$x_K = \frac{x_C + x_D}{2} = \frac{5 + 3}{2} = 4$

K est le milieu de [CD], d'où donc $K(4 ; \frac{9}{2})$.

$y_K = \frac{y_C + y_D}{2} = \frac{\frac{13}{2} + \frac{5}{2}}{2} = \frac{9}{2}$

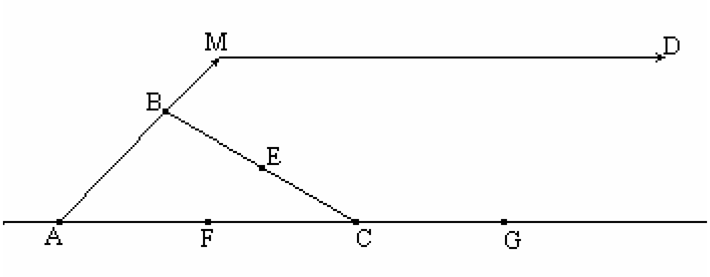
b) $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -\frac{11}{4} - (-23) \\ \frac{7}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} \frac{81}{4} \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} 4 - (-23) \\ \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} 27 \\ 4 \end{pmatrix}$

or $xy' - x'y = \frac{81}{4} \times 4 - 27 \times 3 = 81 \times 81 = 0$

Donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires et les points I ,J et K sont alignés.

Exercice 2 :

1.



2. Dans le triangle ABC, E est le milieu de [BC]

F est le milieu de [AC]

Donc d'après le théorème des milieux, $\overrightarrow{AB} = 2\ \overrightarrow{FE}$.

3. a) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ d'après la relation de Chasles

$= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

b) $3\overrightarrow{AE} = 3\times\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 3\times\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ d'où $\overrightarrow{AD} = 3\ \overrightarrow{AE}$.

c) Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont alors colinéaires et les points A, D et E sont alignés.

4. a) $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$ nous donne $\overrightarrow{MA} - 3\ \overrightarrow{MA} - 3\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$

on a alors $-2\ \overrightarrow{MA} = 3\ \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ (ceci nous permet alors de placer le point M).

b) G est le symétrique de F par rapport à C, d'où C est le milieu de [FG] et $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{FC}$.

$\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ d'où $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$.

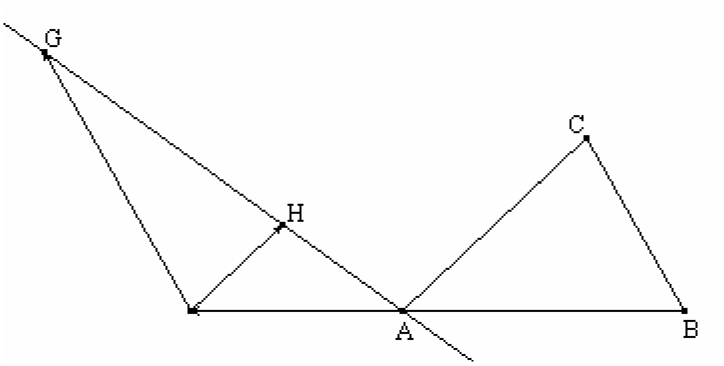
$\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

c) On a alors $\overrightarrow{GD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

d'où $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{AM}$ et le quadrilatère AMDG est un parallélogramme.

Exercice 3 :

1.



2. Dans le repère $(A\ ;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

a) A(0 ; 0) B(1 ; 0) et C(0 ; 1)

b) • $\overrightarrow{AH} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $H(-\frac{3}{4}\,;\,\frac{1}{2})$ car A est l'origine du repère

• $\overrightarrow{BG} = -\frac{7}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0-1\\1-0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}-\frac{7}{4}-\frac{3}{2}\\ 0+\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}-\frac{13}{4}\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}x_G-1\\y_G\end{pmatrix}$

d'où $x_G - 1 = -\frac{13}{4}$ ce qui donne $x_G = -\frac{9}{4}$ et $y_G = \frac{3}{2}$. Donc $G(-\frac{9}{4}\,;\,\frac{3}{2})$.

3. A étant l'origine du repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}-\frac{9}{4}\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$xy' - x'y = -\frac{9}{4}\times\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{4}\right)\times\frac{3}{2} = -\frac{9}{8} + \frac{9}{8} = 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et les points A, G et H sont alignés.