Série corrigée
Chap. Calcul vectoriel

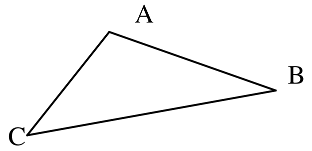
Exercice 1

Soit un triangle *ABC*.

1. Construire les points *D* et *E* vérifiant : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$. Que peut-on en déduire géométriquement ?
3. Montrer que $\overrightarrow{BE} = 2\,\overrightarrow{CA}$. Déduire de cette égalité et de la précédente que *E*, *B* et *D* sont alignés.
4. Soit I le milieu de [AB]. Justifier que $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CI}$. Qu'en déduire pour les droites (*AE*) et (*CI*) ?

Correction

1.



2. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
On en déduit que *ABDC* est un parallélogramme.

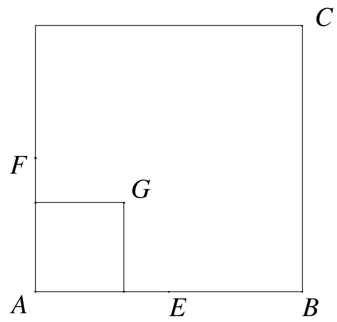
3. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CA}$.
On en déduit que $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{CA} = -2\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{BD}$: $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont donc colinéaires, les points *E*, *B* et *D* sont alignés.

4. Comme *I* est le milieu de [*AB*], on a : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
D'où $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{CI}$.
On en déduit que, comme $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$, alors
$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{CI}$ donc $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont colinéaires. Les droites (*AE*) et (*CI*) sont parallèles.

Exercice 2

Soit *ABCD* un carré, *E* le milieu de [*AB*], *F* le milieu de [*AD*]. On pose *AE* = 1.

1. Donner les coordonnées des points *A*, *B*, *C*, *D*, *E* et *F* dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF})$.
2. a. Ecrire l'équation de la droite (*BF*).
   b. Soit $G(\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3})$. Montrer que *G* appartient à la droite (*BF*).
3. Montrer que les points *D*, *E* et *G* sont alignés.
4. Que représente *G* pour le triangle *ABD* ? Justifier.
5. Que peut-on en déduire sur la droite (*AC*) ? Justifier.



Correction

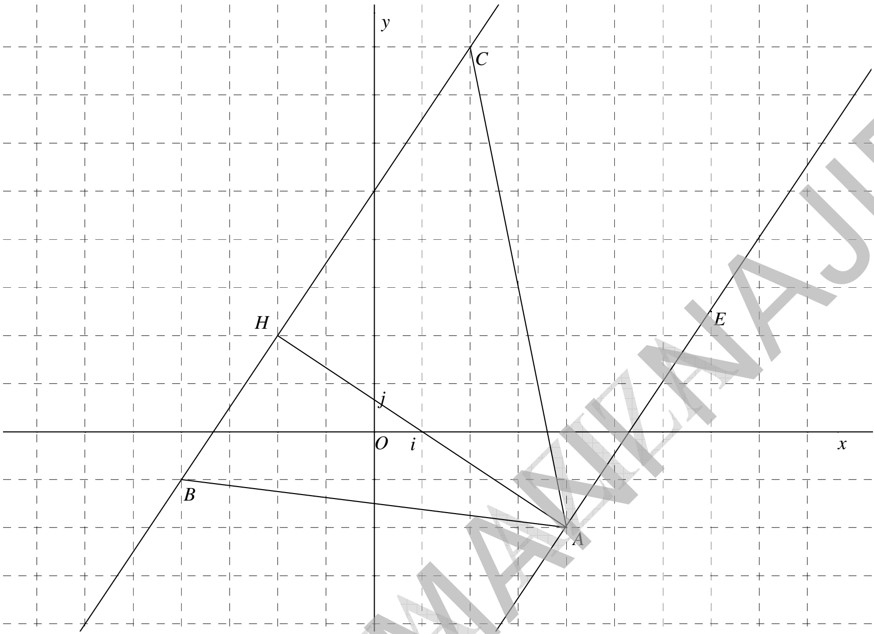
1. *A* (0 ; 0), *B* (2 ; 0), *C* (2 ; 2), *D* (0 ; 2), *E* (1 ; 0) et *F* (0 ; 1).
2. a. Soit M$(x\,;\,y)$ un point du plan ; M ∈ (*BF*) signifie que les vecteurs $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires.
$\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires ⇔ $\begin{vmatrix} x-2 & 0-2 \\ y-0 & 1-0 \end{vmatrix} = 1(x-2)-(-2)y = x+2y-2 = 0$;
D'où une équation de la droite (*BF*) : $x + 2y - 2 = 0$.
   b. On remplace *x* et *y* par les coordonnées de *G* : $\frac{2}{3} + 2\times\frac{2}{3} - 2 = 0$; on déduit que *G* appartient à la droite (*BF*).
3. Pour montrer que les points *D*, *E* et *G* sont alignés on peut monter que les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires.
$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} \frac{2}{3}-1 \\ \frac{2}{3}-0 \end{pmatrix}$; det $(\overrightarrow{DE}\,;\overrightarrow{EG}) = \begin{vmatrix} 1-0 & \frac{2}{3}-1 \\ 0-2 & \frac{2}{3}-0 \end{vmatrix} = 1\times\frac{2}{3} - (-2)\times\left(\frac{2}{3}-1\right) = 0$ donc les points *D*, *E* et *G* sont alignés
4. (*DE*) est une médiane puisque *E* est le milieu de [*AB*], de même (*BF*) est une médiane donc *G* est le centre de gravité du triangle *ABD*.
5. (*AC*) est la troisième médiane puisqu'elle passe par le centre du carré, soit par le milieu de [*DB*]. *A*, *G* et *C* sont alignés.
En fait la droite (*AC*) a pour équation *y* = *x* qui contient évidemment *G*.

Exercice 3

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,)$, on considère les points : $A(4\,;-2)$; $B(-4\,;-1)$; $C(2\,;8)$ et $H(-2\,;2)$.

1. Faire une figure et montrer que les points B, C et H sont alignés.
2. a. Calculer les distances AH, BH et AB.
   b. Démontrer que le triangle AHB est rectangle en H.
3. Calculer l'aire du triangle ABC.
4. Soit (D) la droite qui passe par A et qui est parallèle à (BC).
   a. Déterminer une équation de (D).
   b. Le point $E\left(7\,;\,\frac{5}{2}\right)$ appartient-il à (D) ?
   c. Quelle est l'aire du triangle BCE ?

Correction



Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$, on considère les points $A(4\,;-2)$; $B(-4\,;-1)$; $C(2\,;8)$ et $H(-2\,;2)$.

1. B, C et H sont alignés : $\det(\overrightarrow{BC}\ ;\overrightarrow{BH}\ ) = \begin{vmatrix} 2+4 & -2+4 \\ 8+1 & 2+1 \end{vmatrix} = 0$.

2. a. $AH=\sqrt{(-2-4)^2+(2+2)^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}$, $BH=\sqrt{(-2+4)^2+(2+1)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$,

$AB=\sqrt{(-4-4)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{64+1}=\sqrt{65}$.

b. Pythagore dans AHB : $AH^2+BH^2=52+13=65=AB^2$

3. Le triangle ABC a pour base BC et pour hauteur AH. Il suffit donc de calculer BC :

$BC=\sqrt{(2+4)^2+(8+1)^2}=\sqrt{36+81}=\sqrt{117}$ d'où l'aire du triangle ABC : $\frac{1}{2}AH.BC=\frac{1}{2}\sqrt{52}.\sqrt{117}=39$.

4. a. (D) passe par A et est parallèle à (BC). Soit $M(x\,;y)$ un point du plan ; $M\in(BC)$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

$\det(\overrightarrow{AM}\ ;\overrightarrow{BC}\ ) = \begin{vmatrix} x-4 & 6 \\ y+2 & 9 \end{vmatrix} = 9(x-4)-6(y+2)=0$; une équation de la droite (D). $3x-2y-16=0$.

c. $E(7\,;\ \frac{5}{2}\ )$ appartient à (D) ? $3\times 7-2\times\frac{5}{2}-16=0$: on déduit que $E(7\,;\ \frac{5}{2}\ )$ appartient à (D).

d. L'aire du triangle BCE est la même que celle du triangle ABC… (même base BC et même hauteur AH).

Exercice 4

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On considère les points E et F tels que $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AD}.$

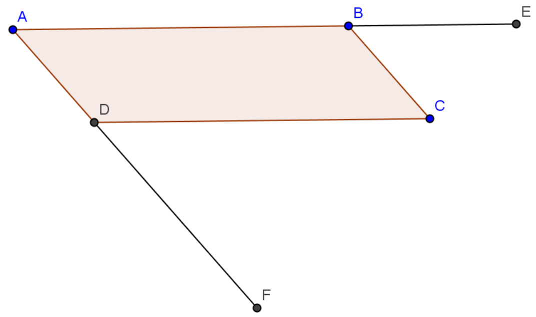
Faire une figure.

b) Démontrer que : $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}$ et que : $\overrightarrow{EF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{DA}.$

En déduire que les points C, E et F sont alignés.

Correction

a)



b) $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

De même, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AD}$

c) $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AD}$ donc $-\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{DA}$. Or $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, donc $3\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{DA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$. D'où $3\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{EF}$. Par suite les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires, donc les points C, E et F sont alignés.

Exercice 5 : Les questions sont indépendantes

Dans un repère on donne A (- 2 ; 1), B (3 ; 3), C(- 5 ; - 3), D(5 ; 1) et T (0 ; - 1). On nomme K le point de coordonnées (- 1 *; y*).

1) Les droites (AC) et (BD) sont-elles parallèles ?
2) Les points C, D et T sont-ils alignés ?
3) Calculer le réel *y* tel que C, K et A soient alignés.
4) Calculer les coordonnées du point M tel que $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
5) Calculer les coordonnées du point E symétrique de T par rapport au point C. Le point R est le milieu de [AC]. Les points E, R, B sont-ils alignés ?

Correction

On a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$. Donc on voit que $(-3)\times(-2) - (-4)\times 2 \neq 0$. D'où ces vecteurs ne sont pas colinéaires et les droites (AC) et (BD) ne sont pas

1) On a $\overrightarrow{DT}\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-10\\-4\end{pmatrix}$. Donc on voit que $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DT}$. D'où ces vecteurs sont colinéaires et les points D, T et C sont alignés (voire même, T est le milieu de [DC]).

2) On a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}1\\y-1\end{pmatrix}$. Or on aura A, K et C alignés ssi $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires. C'est-à-dire ssi : $-3(y-1) - (-4)\times 1 = 0$. On résout cette équation : $-3y + 3 + 4 = 0, -3y = -7, donc\ y = \frac{7}{3}$.

3) On a $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-2-x\\1-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}3-x\\3-y\end{pmatrix}$. Donc on aura $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ ssi les coordonnées du vecteur somme sont nulles. Or ce vecteur a pour coordonnées : $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}-4-2x+9-3x = 5-5x\\2-2y+9-3y = 11-5y\end{pmatrix}$. D'où le système :
$\begin{cases}5-5x = 0\\11-5y = 0\end{cases}$ Par suite on a donc $M\left(1;\frac{11}{5}\right)$.

E sera symétrique de T par rapport à C ssi C est le milieu de [ET]. D'où les coordonnées de E (-10 ; -5).

R milieu de [AC] donc R$\left(-\frac{7}{2};-1\right)$. On a $\overrightarrow{ER}\begin{pmatrix}\frac{13}{2}\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}13\\8\end{pmatrix}$. Donc on voit que $\overrightarrow{ER} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EB}$. D'où ces vecteurs sont colinéaires et les points E, R et B sont alignés (voire même, R est le milieu de [EB]).

Exercice 6 :

Soit *ABC* un triangle quelconque. *A*' le milieu de [*BC*], *G* le centre de gravité du triangle, *D* et *E* les points tels que $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. On note *I* le milieu de [*DE*].

1. a. Montrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

b. Exprimer $\overrightarrow{AA'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

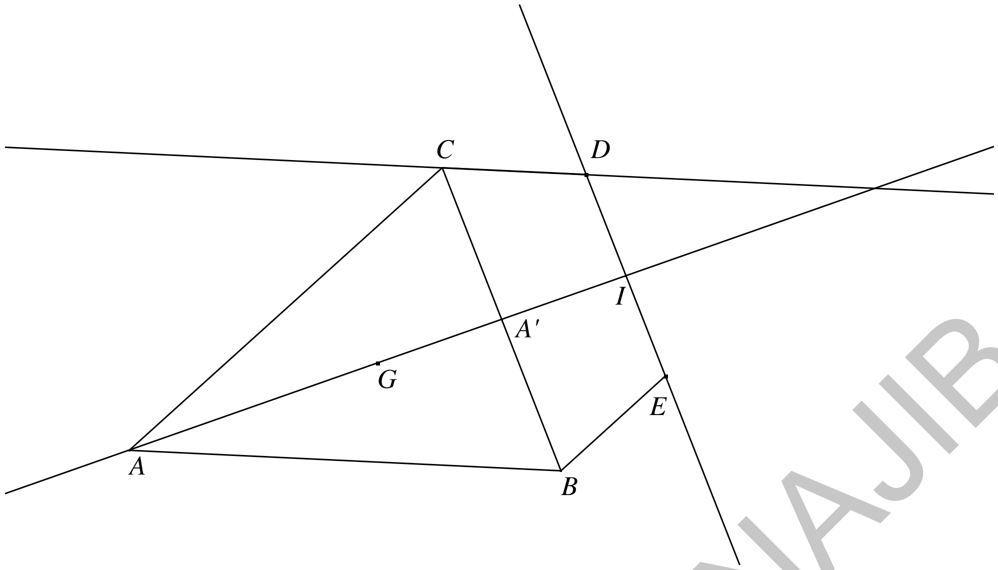
c. Démontrer que les points *A*, *A*' et *I* sont alignés.

2. Démontrer que le point *G* est le milieu de [*AI*].

3. Prouver que les droites (BC) et (ED) sont parallèles.

Correction

(On utilise un repère)



1. a. Prenons le repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right)$ où A a pour coordonnées (0 ; 0), B(1 ; 0) et C(0 ; 1).

Des données de construction on tire que $E\left(1 ; \frac{1}{3}\right)$ et $D\left(\frac{1}{3} ; 1\right)$, soit $I\left(\frac{2}{3} ; \frac{2}{3}\right)$ ou encore $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

b. Les coordonnées de A' sont $A'\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ d'où $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

c. Calculons le déterminant des vecteurs : $\det\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AI}\right) = \begin{vmatrix} 1/2 & 2/3 \\ 1/2 & 2/3 \end{vmatrix} = 0$

On peut également remarquer que $2\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AA'}$.

2. Les coordonnées de G sont $G\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$ d'où $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AG}$ et G est le milieu de [AI].

3. $\det\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{ED}\right) = \begin{vmatrix} 0-1 & \frac{1}{3}-1 \\ 1-0 & 1-\frac{1}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$ donc les droites (BC) et (ED) sont parallèles.

Exercice 4 **Correction en classe**

Soit (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$), un repère orthonormé du plan. (Aucun schéma n'est demandé)

On considère les points $A(0\ ,\ 4)$; $B(-2\ ,0)$ et $C(6\ ,1)$.

1) Montrer que ($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$) est une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

2) a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

b) Déduire la nature du triangle ABC.

3) Soit D$(-6{,}7)$. Les points A, C et D sont-ils alignés ?

4) Calculer les distances BC et BD. Déduire que le point B appartient à la médiatrice du segment [CD].

Prof : ATMANI NAJIB