La projection dans le plan

Exercice1 : Soit ABC est un triangle et M le milieu de [AB]

1)Soit P_1 la projection sur (BC) parallèlement à (AC)

Déterminer : $P_1(A)$; $P_1(C)$, $P_1(B)$, $P_1(M)$,

2)Soit P_2 la projection sur (AC) parallèlement à (BC)

Déterminer : $P_2(A)$,, $P_2(C)$ $P_2(B)$, $P_2(M)$

Réponse : 1) soit P_1 la projection sur (BC) parallèlement à (AC)

On a $A\in(AC)$ et $(AC)\cap(BC)=\{C\}$ donc

$P_1(A)=C$

On a $B\in(BC)$ donc B est invariante par la projection P_1 donc $P_1(B)=B$

On a $C\in(BC)$ donc C est invariante par la projection P_1 donc $P_1(C)=C$

Soit $M'=P_1(M)$ **on a** M le milieu de [AB]

La parallèle à (AC) passant par M passe forcément par le milieu de [BC]
donc M' est le milieu de [BC]

1) soit: P_2 la projection sur (AC) parallèlement à (BC)

On a $A\in(AC)$ donc $P_2(A)=A$

On a $C\in(AC)$ donc C est invariante par la projection P_2 donc $P_2(C)=C$

On a $B\in(BC)$ et $(AC)\cap(BC)=\{C\}$ donc

$P_2(B)=C$

On a M le milieu de [AB] donc **la** parallèle à (BC) passant par M coupe [AC] en son milieu

soit: M'' **ce** milieu donc $P_2(M)=M''$

Exercice2 : Soient ABC est un triangle et M un point définie par : $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

1)Construire le point M' le projeté de M sur la droite(AC) parallèlement à (BC)

2)Montrer que $\overrightarrow{AM'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et en déduire que

$\overrightarrow{MM'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Réponse : 1) soit: P la projection sur(AC) parallèlement à (BC)

On a $A\in(AC)$ donc A est invariante par la projection P donc $P(A)=A$

On a $C\in(BC)$ donc C est invariante par la projection P donc $P(C)=C$

On a aussi : $P(B)=C$

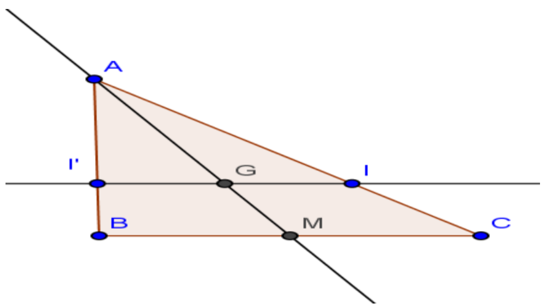
Et puisque $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points

Alors : $\overrightarrow{AM'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

On a

$$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AM'}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

Exercice3 : **(**réciproque de Thales):



Soient ABC est un triangle et I et I' deux points tel que : $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

1) Montrer que I' **est** par la projection de I sur

la droite (AB) parallèlement à (BC)

2) soit M est le milieu de [BC] ; la droite (AM) coupe la droite (II') en G

Montrer que $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

Réponse : 1) On a $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ donc $\|\overrightarrow{AI}\|=\left\|\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right\|$

donc $AI=\frac{2}{3}AC$ donc $\frac{AI}{AC}=\frac{2}{3}$ ①

Et on a : $\overrightarrow{AI'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $\|\overrightarrow{AI'}\|=\left\|\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right\|$ donc

$AI'=\frac{2}{3}AB$ donc $\frac{AI'}{AB}=\frac{2}{3}$ ②

D'après ① et ② on a $\frac{AI}{AC}=\frac{AI'}{AB}$ et d'après la réciproque de Thales : $(II')\parallel(BC)$

Et puisque (AB) coupe (II') en I' donc I' est la projection de I sur la droite (AB) parallèlement à (BC)

2) On a I' est la projection de I sur la droite (AB) parallèlement à (BC) et M est le milieu de [BC] Mq : $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$???

On considère P la projection sur (AM) Parallèlement à (BC)

On a $A\in(AM)$ donc A est invariante par la projection P donc $P(A)=A$ ❶

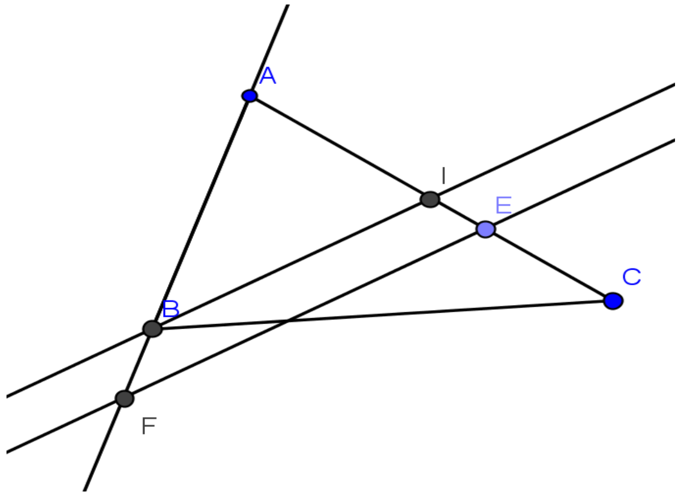
la parallèle à (BC) passant par C est (BC) elle coupe (AM) en M donc $P(C)=M$ ❷

la parallèle à (BC) passant par I est (II') elle coupe (AM) en G donc $P(I)=G$ ❸

Et on a en plus $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ ❹ donc D'après ❶ et ❷ et ❸ et ❹ on a $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ car la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points

Exercice4 : Soient ABC est un triangle et I le milieu de $[AC]$. E un point de (AC) tel que : $\overrightarrow{IE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$ et $P_{((AB);(IB))}(E)=F$

Faire une figure et montrer que : $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$



Solution :

On a : $\overrightarrow{IE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$ **et** I le milieu de $[AC]$

Donc : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IC}$ donc **:** $\overrightarrow{IE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$

Et on a : $P_{((AB);(IB))}(E)=F$ **et** $P_{((AB);(IB))}(I)=B$ **et** $P_{((AB);(IB))}(A)=A$

Et puisque le la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points alors : $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Exercice5 : Soient ABC est un triangle et I le milieu de $[AC]$

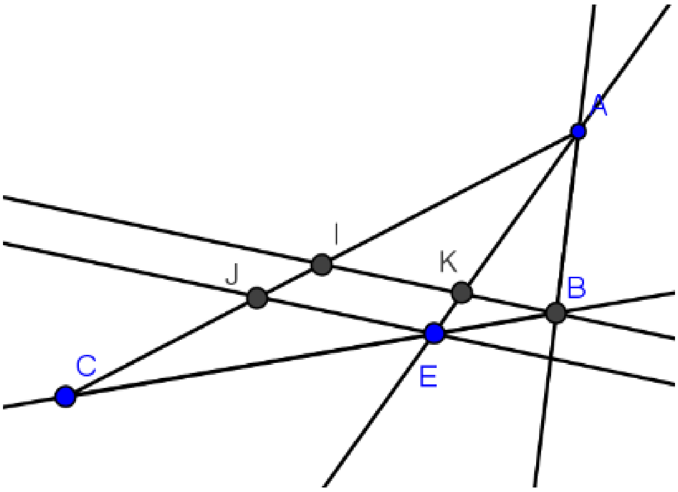
E un point tel que : $\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{BE}$

La droite qui passe par E et parallèle a (IB) coupe (AC) **en** J

1)montrer que $\overrightarrow{IC}=4\overrightarrow{IJ}$ et en déduire que : $\overrightarrow{AJ}=5\overrightarrow{IJ}$

2)si $(IB)\cap(AE)=\{K\}$ montrer que : $\overrightarrow{AE}=5\overrightarrow{KE}$

Solution : 1)soit $P_{((AC);(IB))}$ la projection sur (AC) parallèlement à (IB)



On a : $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BE}$ et $P_{((AC);(IB))}(B) = I$ **et** $P_{((AC);(IB))}(E) = J$ **et** $P_{((AC);(IB))}(C) = C$ et puisque la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points alors : $\overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{IJ}$

La déduction :

On a $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ}$ et I le milieu de $[AC]$

Donc : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$ et par suite :

$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IJ} = 4\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IJ} = 5\overrightarrow{IJ}$

2) soit $P_{((AE);(IB))}$ la projection sur (AE) parallèlement à (IB)

On a : $\overrightarrow{AJ} = 5\overrightarrow{IJ}$ **et** $P_{((AE);(IB))}(A) = A$ et $P_{((AE);(IB))}(I) = K$ **et** $P_{((AE);(IB))}(J) = E$

et puisque la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points alors : $\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{KE}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien