Tronc commun Sciences BIOF

# Correction Série N°1 : FONCTIONS - *Généralités*

**Exercice 1 :** (*) (**) Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = -x^2 + 2x + 2$

1) Calculer les images de $\frac{-1}{2}$ et $\sqrt{3}$ par f.

2) Montrer que : $1+\sqrt{2}$ est un antécédent de 1 par f

3) Déterminer les antécédents éventuels de 0 par f

4) Donner une interprétation géométrique du résultat de la question 3)

**Solution :** 1) Calcul des images :

$f\left(\frac{-1}{2}\right) = -\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 2\times\left(\frac{-1}{2}\right) + 2 = -\frac{1}{4} - 1 + 2 = \frac{3}{4}$ et $f\left(\sqrt{3}\right) = -\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\times\left(\sqrt{3}\right) + 2 = -3 + 2\sqrt{3} + 2 = -1 + 2\sqrt{3}$

2) Pour montrer que : $1+\sqrt{2}$ est un antécédent de 1 par f il suffit de montrer que : $f\left(1+\sqrt{2}\right) = 1$ ?

$$f\left(1+\sqrt{2}\right) = -\left(1+\sqrt{2}\right)^2 + 2\times\left(1+\sqrt{2}\right) + 2 = -\left(1+2\sqrt{2}+2\right) + 2 + 2\sqrt{3} + 2 = -3 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 4 = 1$$

Donc : $f\left(1+\sqrt{2}\right) = 1$ par suite : $1+\sqrt{2}$ est un antécédent de 1 par f

3) $x$ est l'antécédents de 0 par f signifie que 0 est l'image de $x$ par f

Équivaut à : chercher les réels $x$ tels que : $f(x) = 0$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$

Équivaut à : $-x^2 + 2x + 2 = 0$ $a = -1$ et $b = 2$ et $c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times 2\times(-1) = 4 + 8 = 12 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 > 0$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

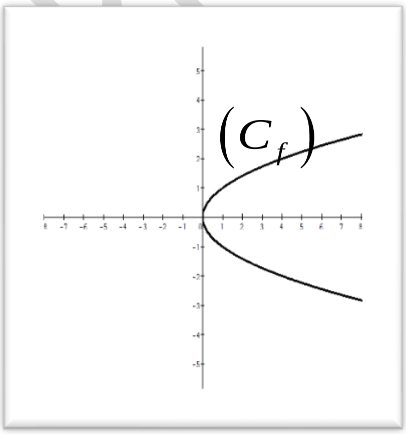
$x_1 = \frac{-2+2\sqrt{3}}{-2} = 1 - \sqrt{3}$ et $x_1 = \frac{-2-2\sqrt{3}}{-2} = 1 + \sqrt{3}$

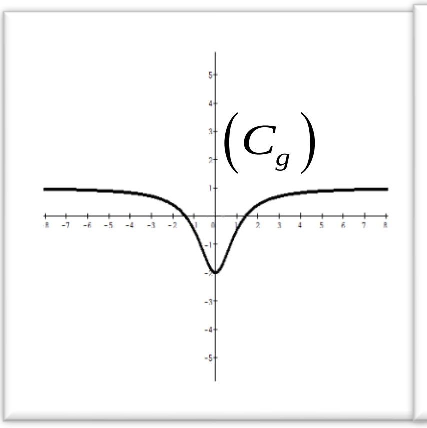
Finalement les antécédents de 0 par f sont : $1-\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{3}$.

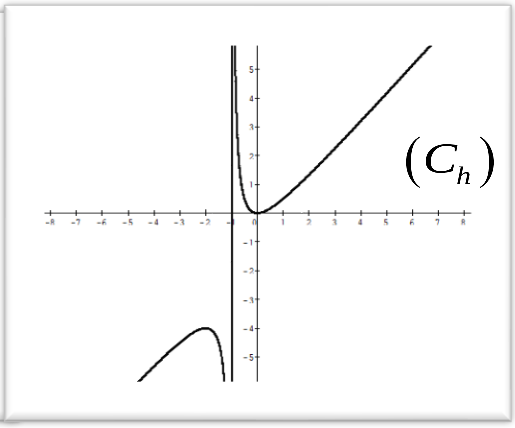
4) les antécédents éventuels de 0 par f sont : $1-\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{3}$.

Donc : l'intersection de $(C_f)$ la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses sont les points : $A\left(1-\sqrt{3};0\right)$ et $B\left(1+\sqrt{3};0\right)$

**Exercice 2 :** (*) Parmi les courbes suivantes déterminer ceux qui représentent une fonction :



**Solution :** La courbe $\left(C_f\right)$ ne représente pas une fonction numérique car par exemple le nombre 1 admet deux images.

La courbe $\left(C_g\right)$ représente une fonction numérique car tout nombre admet une image unique.

La courbe $\left(C_h\right)$ représente une fonction numérique car tout nombre admet au plus une image.

**Exercice 3 :** (*) 1) On considère la fonction réelle de la variable réelle définie par : $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par f ? 0 ; 2 ; -3 ; 3.

2) On considère la fonction définie par : $f\left(x\right)=\sqrt{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par g ? 0 ; 2 ; -3 ; 4.

3) On considère la fonction définie par : $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{7-x}}$ Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par h ? 5 ; -6 ; 9 ; 7.

**Solution :** 1) 0 ; 2 ; -3 ont des images par f mais 3 n'a pas d'images par f car : $f\left(3\right)=\dfrac{1}{3-3}=\dfrac{1}{0}\notin\mathbb{R}$

2) 4 a une image par g mais 0 ; 2 ; -3 n'ont pas d'images par g car :

$g\left(0\right)=\sqrt{0-3}=\sqrt{-3}\notin\mathbb{R}$ et $g\left(2\right)=\sqrt{2-3}=\sqrt{-1}\notin\mathbb{R}$ et $g\left(-3\right)=\sqrt{-3-3}=\sqrt{-6}\notin\mathbb{R}$

3)5 et -6 ont une image par h mais 9 ; 7 : n'ont pas d'images par h car :

$h\left(9\right)=\dfrac{1}{\sqrt{7-9}}=\dfrac{1}{\sqrt{-2}}\notin\mathbb{R}$ et $h7=\dfrac{1}{\sqrt{7-7}}=\dfrac{1}{\sqrt{0}}\notin\mathbb{R}$

**Exercice 4 :** Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+1}{5x^2-4x}$ 2) $f\left(x\right)=\dfrac{\left|-5x^2+2\right|}{2x^2-x-6}$ 3) $f\left(x\right)=\dfrac{2x^5-2023}{x^2+3x+10}$

4) $f\left(x\right)=\dfrac{6x-5}{x^4-2x^2+1}$ 5) $f\left(x\right)=\dfrac{-\sqrt{x-1}+1}{\left|7x-10\right|-\left|6+3x\right|}$ 6) $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x}}{6\left|x+5\right|+2}$

7) $f\left(x\right)=\dfrac{x+2}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$ 8) $f\left(x\right)=\dfrac{\left|x^2-6\right|}{\sqrt{-2x^2+4x-2}}$ 9) $f\left(x\right)=\sqrt{\dfrac{-3x^2+x+5}{2x^2+x-5}}$

10) $f\left(x\right)=\sqrt{2\left|x-9\right|-1}$ 11) $f(x)=2\sin^2 x+3\cos x-1$ 12) $f\left(x\right)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{3-5x}$ .

13) $f(x)=\dfrac{\left|x-4\right|-\left|x-1\right|}{x^2+2\left|x\right|-3}$ 14) $f(x)=\dfrac{2\sin x}{2\cos x-1}$

**Solution :**1) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+1}{5x^2-4x}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/5x^2-4x\neq0\right\}$

$5x^2-4x=0$ Signifie que : $x\left(5x-4\right)=0$

Signifie que : $x = 0$ ou $5x-4=0$ c'est-à-dire : $x = 0$ ou $x=\dfrac{4}{5}$

D'où : $D_f=\mathbb{R}-\left\{0;\dfrac{4}{5}\right\}$

2) $f\left(x\right)=\dfrac{\left|-5x^2+2\right|}{2x^2-x-6}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2x^2-x-6\neq0\right\}$

Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-x-6=0$ : a = 2, b = -1 et c = -6

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times 2} = -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times 2} = 2$$

D'où : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2} ; 2\right\}$

3) $f(x) = \dfrac{2x^5 - 2023}{x^2 + 3x + 10}$

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x^2 + 3x + 10 \neq 0\right\}$

Calculons le discriminant de l'équation $x^2 + 3x + 10 = 0$ : a = 1, b = 3 et c = 10

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 10 = -31$.

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle

C'est-à-dire : $D_f = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \dfrac{6x - 5}{x^4 - 2x^2 + 1}$

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x^4 - 2x^2 + 1 \neq 0 \right\}$

$x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ Equivalent à : $(x^2)^2 - 2x^2 + 1 = 0$

Faisons un changement de variable en posant : $X = x^2$ nous obtenons l'équation : $X^2 - 2X + 1 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0$

La solution double de : $X^2 - 2X + 1 = 0$ est : $X = \dfrac{-(-2)}{2\times 1} = \dfrac{2}{2} = 1$

Donc on a : $x^2 = 1$

Donc : $x = 1$ ou $x = -1$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$

5) $f(x) = \dfrac{-\sqrt{x-1}+1}{|7x-10| - |6+3x|}$

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / |7x-10| - |6+3x| \neq 0 \;\; et \;\; x - 1 \geq 0 \right\}$

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / |7x-10| - |6+3x| \neq 0 \;\; et \;\; x \geq 1 \right\}$

$|7x-10| - |6+3x| = 0$ Équivalent à : $|7x-10| = |6+3x|$

Équivalent à : $7x - 10 = 6 + 3x$ ou $7x - 10 = -(6+3x)$

Équivalent à : $4x = 16$ ou $10x = 4$ équivalent à $x = 4$ ou $x = 2/5$

Donc : $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{2}{5} \;\; et \;\; x \neq 4 \;\; et \;\; x \geq 1 \right\}$

Donc : $D_f = [1 ; 4[ \cup ]4 ; +\infty[$

6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{6|x+5| + 2}$

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / 6|x+5| + 2 \neq 0 \;\; et \;\; x \geq 0 \right\}$

On a : $|x+5| \geq 0$ donc : $6|x+5| \geq 0$ donc : $6|x+5| + 2 \geq 2 > 0$

Donc : $6|x+5| + 2 \neq 0$

Par suite : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$

Par suite : $D_f = [0, +\infty[$

7) $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{2x^2 - 3x + 1}}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - 3x + 1 > 0\}$

$2x^2 - 3x + 1$ Calculons son discriminant : a = 2, b = -3 et c = 1

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1 = \dfrac{-(-3)+\sqrt{1}}{2 \times 2} = \dfrac{3+1}{4} = 1$ et $x_2 = \dfrac{5+\sqrt{9}}{2a} = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{1}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $1/2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2-3x+1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Donc : $D_f = \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[ \cup ]1; +\infty[$

8) $f(x) = \dfrac{|x^2 - 6|}{\sqrt{-2x^2 + 4x - 2}}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / -2x^2 + 4x - 2 > 0\}$

Étudions le signe du trinôme de : $-2x^2 + 4x - 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \times (-2) \times (-2) = 16 - 16 = 0$

Comme $\Delta = 0$, le trinôme possède une racine double : $x_1 = \dfrac{-(4)}{2 \times (-2)} = 1$

Comme : $a = -2$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-2x^2+4x-2$ | | $-$ | $0$ | $-$ | |

Donc : $D_f = \varnothing$

9) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-3x^2 + x + 5}{2x^2 + x - 5}}$

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \dfrac{-3x^2 + x + 5}{2x^2 + x - 5} \geq 0 \;\; et \;\; 2x^2 + x - 5 \neq 0\right\}$

Il faut étudier le signe du numérateur et du dénominateur puis regrouper les résultats dans un tableau de signes. Pour le numérateur : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 5 = 1 + 20 = 21$ ;

Delta est positif donc l'équation du deuxième degré possède deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-\sqrt{21}}{-2} = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2} \simeq 2,8$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+\sqrt{21}}{-2} = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2} \simeq -1,8$

Le coefficient devant x² est négatif donc le numérateur est négatif à l'extérieur des racines et positif entre les racines. De même, pour le dénominateur : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-5) \times 2 = 1 + 40 = 41$

Donc : $x_1' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-\sqrt{41}}{4} \simeq -1,9$ et $x_2' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+\sqrt{41}}{4} \simeq 1,4$

Le coefficient devant x² est positif donc le dénominateur est négatif entre ses racines.

On obtient le tableau de signes suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{-1-\sqrt{41}}{4}$ | | $\frac{1-\sqrt{21}}{2}$ | | $\frac{-1+\sqrt{41}}{4}$ | | $\frac{1+\sqrt{21}}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2+x+5$ | $-$ | \| | $-$ | 0 | $+$ | \| | $+$ | 0 | $-$ |
| $2x^2+x-5$ | $+$ | 0 | $+$ | \| | $-$ | 0 | $+$ | \| | $+$ |
| $\frac{-x^2+x+5}{2x^2+x-5}$ | $-$ | \|\| | $+$ | 0 | $-$ | \|\| | $+$ | 0 | $-$ |

Donc : $D_f = \left]\dfrac{-1-\sqrt{41}}{4};\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left]\dfrac{-1+\sqrt{41}}{4};\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right]$

10) $f(x) = \sqrt{2|x-9|-1}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2|x-9|-1 \geq 0\}$

$2|x-9|-1 \geq 0$ Signifie que : $2|x-9| \geq 1$

Signifie que : $|x-9| \geq \dfrac{1}{2}$

Signifie que : $x-9 \geq \dfrac{1}{2}$ ou $x-9 \leq -\dfrac{1}{2}$

Signifie que : $x \geq \dfrac{1}{2}+9$ ou $x \leq -\dfrac{1}{2}+9$

Signifie que : $x \geq \dfrac{19}{2}$ ou $x \leq -\dfrac{17}{2}$

Donc : $D_f = \left]-\infty;-\dfrac{17}{2}\right] \cup \left[\dfrac{19}{2};+\infty\right[$

11) Un réel a toujours une image par $f$

Donc $D_f = \mathbb{R}$

12) $f(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{3-5x}$.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x-1 \geq 0 \text{ et } 3-5x \geq 0\}$

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x \geq \dfrac{1}{2} \text{ et } x \leq \dfrac{3}{5}\right\}$ Donc $D_f = \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{5}\right]$

13) $f(x) = \dfrac{|x-4|-|x-1|}{x^2+2|x|-3}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2+2|x|-3 \neq 0\}$

$x^2+2|x|-3=0 \Leftrightarrow |x|^2+2|x|-3=0$ On pose $|x| = X$ donc l'équation devient :

$X^2+2X-3=0$

Le discriminant est $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$ et ses solutions sont :

$X_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\times 1} = -3$ et $X_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\times 1} = 1$

Donc on a : $|x| = -3$ et $|x| = 1$

$|x| = -3$ N'a pas de solution

$|x| = 1 \Leftrightarrow x = 1$ Ou $x = -1$ donc $D_f = \mathbb{R} - \{-1;1\}$

14) $f(x) = \frac{2\sin x}{2\cos x - 1}$.  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2\cos x - 1 \neq 0\}$

$2\cos x - 1 = 0$ Signifie $\cos x = \frac{1}{2}$

$\cos x = \frac{1}{2}$ Signifie $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ Ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

**Exercice 5 :** (***) Soit f la fonction numérique tel que : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-1}{x+2} & si \quad x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)(4-x)} & si \quad x \succ 0 \end{cases}$

1) Déterminer $D_f$

2) Calculer : $f(2)$ ; $f(0)$; $f(-1)$

**Solution :** 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R}^- / x + 2 \neq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^{+*} / (x+1)(4-x) \neq 0\}$

Donc : $D_f = \{x \in \mathbb{R}^- / x \neq -2\} \cup \{x \in \mathbb{R}^{+*} / x \neq -1 \ et \ x \neq 4\}$

Donc : $D_f = ]-\infty; -2[ \cup ]-2; 0] \cup ]0; 4[ \cup ]4; +\infty[$

Par suite : $D_f = ]-\infty; -2[ \cup ]-2; 4[ \cup ]4; +\infty[$

2) calcul de : $f(2)$

On a : $2 \succ 0$ donc : $f(2) = \frac{2^2}{(2+1)(4-2)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Calcul de : $f(0)$

On a : $0 \leq 0$ donc : $f(0) = \frac{0-1}{0+2} = \frac{-1}{2}$

Calcul de $f(-1)$: On a : $-1 \leq 0$

Donc : $f(-1) = \frac{-1-1}{-1+2} = \frac{-2}{1} = -2$

**Exercice 6 :** (*) Soient les deux fonctions : $f(x) = \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^2}}$ et $g(x) = \frac{1+3x^2}{|x|}$

Est-ce que $f = g$ ? Justifier

**Solution :**

- On a : $f(x) \in \mathbb{R}$ signifie $\sqrt{x^2} \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$

Or on sait que $x^2 \geq 0$ donc $\sqrt{x^2} \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Alors : $f(x) \in \mathbb{R}$ signifie que : $x \neq 0$ donc $D_f = \mathbb{R}^*$

- On a $g(x) \in \mathbb{R}$ signifie que : $|x| \neq 0$ c'est-à-dire : $x \neq 0$

Donc : $D_g = \mathbb{R}^*$

Alors : $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$

On sait que : $\sqrt{x^2} = |x|$ et $3x^2+1 = 1+3x^2$ donc $f(x) = g(x)$

Donc finalement on a trouvé que : $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$ et $f(x) = g(x)$ par suite : $f = g$

**Exercice 7 :** (**) Soient les deux fonctions : $h(x) = \dfrac{x^2 - x}{x}$ et $t(x) = x - 1$

Est-ce que : $h = t$ ? Justifier

**Solution :**

- On a $h(x) \in \mathbb{R}$ signifie que : $x \neq 0$ donc $D_h = \mathbb{R}^*$

- On a $t(x)$ est un polynôme donc : $D_t = \mathbb{R}$

Alors : $D_h \neq D_t$ donc : $h \neq t$

**Exercice 8 :** (**) Soit f et g les fonctions numériques tel que : $f(x) = x+1$ et $g(x) = x^2 + x + 2$

Comparer les fonctions f et g

**Solution** : $D_f = D_g = \mathbb{R}$

$g(x) - f(x) = x^2 + x + 2 - (x+1) = x^2 + 1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Donc : $f(x) < g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ donc $f < g$

**Exercice 9 :** (**) Soit f la fonction numérique tel que : $f(x) = \dfrac{(3x+1)(2-x)}{4x^2-1}$

Etudier le signe de le fonction f

**Solution :** $4x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{1}{2}$ et $x \neq \dfrac{1}{2}$

Donc : $D_I = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right\}$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $\frac{1}{2}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x+1$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $2-x$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $2x-1$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $2x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $\frac{(3x+1)(2-x)}{4x^2-1}$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

$f(x) \geq 0$ Si et seulement si : $x \in \left]-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{3}\right] \cup \left]\dfrac{1}{2}; 2\right]$ donc $f \geq 0 \ \forall x \in \left]-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{3}\right] \cup \left]\dfrac{1}{2}; 2\right]$

$f(x) \leq 0$ Si et seulement si : $x \in \left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\right[ \cup \left[-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{2}\right[ \cup [2; +\infty[$

**Exercice 10 :** (*) Que représente la courbe représentative d'une fonction affine f ( $f(x)=ax+b$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$)

**Solution :** la courbe représentative d'une fonction affine f est une droite d'équation $y=ax+b$

**Exercice 11 :** (**) Soit la fonction numérique f définie par : $f(x)=x^2+2x-2$

1) Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé d'unité 1 cm à l'aide du tableau de valeurs suivant :

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | |

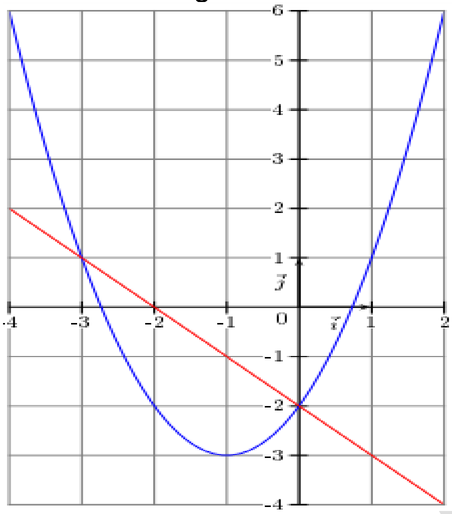
2) Résoudre graphiquement dans l'intervalle [−4 ; 2] :

• L'équation : $f(x)=1$

• L'équation : $f(x)=-x-2$

• L'inéquation : $f(x)\leq -2$

**Solution :** 1) La courbe de la fonction f est tracée en bleu et la droite d'équation : $y=-x-2$ est tracée en rouge.

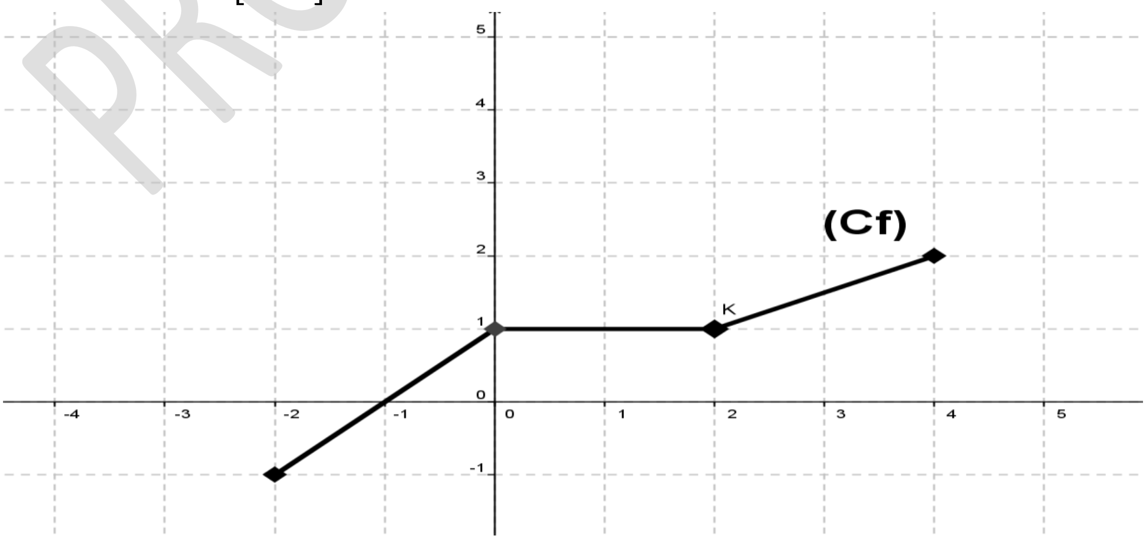


2) • $f(x)=1$: S = {−3 ; 1} (abscisses des points de la courbe d'ordonnée égale à 1)

• $f(x)=-x-2$ : S = {−3 ; 0} (abscisses des points d'intersection entre la courbe et la droite d'équation $y=-x-2$)

• $f(x)\leq -2$: S = [−2 ; 0] (abscisses des points de la courbe d'ordonnée inférieure ou égale à -2)

**Exercice 12 :** (***) La figure ci-dessous représente la représentation graphique d'une fonction f Sur l'intervalle : $[-2,4]$



1) Déterminer les images des nombres **: -2 ; -1 ;0 ; 2 ; 4** par la fonction f

2) Donner les antécédents de : 2 ; 0 ; $\frac{3}{2}$ et 3 par f.

3) Combien d'antécédents à le nombre 1 par f.

4) Quel est le minimum de la fonction f sur $[-2,4]$ ? en quelle valeur ce minimum est-il atteint ?

5) Quel est le maximum de la fonction f sur $[-2,4]$ ? en quelle valeur ce maximum est-il atteint ?

6) Déterminer : $f(x)$ en fonction de $x$ sur $[-2,4]$

**Solution :** 1) $f(-2)=-1$ et $f(-1)=0$ et $f(0)=1$ et $f(2)=1$ et $f(4)=2$

2) 2 admet un unique antécédent par f c'est : 4

0 admet un unique antécédent par f c'est : -1

$\frac{3}{2}$ Admet un unique antécédent par f c'est : 3

3 n'admet pas d'antécédents par f

3) Le nombre 1 admet une infinité d'antécédents à par f.

4) Le minimum de la fonction f sur $[-2,4]$ est : -1 ; il est atteint en -2

5) Le maximum de la fonction f sur $[-2,4]$ est : 2 ; il est atteint en 4

6) On remarque que la représentation graphique de la fonction f est un segment sur chacun des l'intervalles : $[-2,0]$et $[0,2]$ et $[2,4]$ donc la fonction f est affine sur ces intervalles

• Sur l'intervalle $[-2,0]$ on a :

$f(x)=a_1x+b_1$ et on a : $f(-2)=-1$ et $f(-1)=0$

Donc : $\begin{cases}-2a_1+b_1=-1\\ -a_1+b_1=0\end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases}-a_1=-1\\ b_1=a_1\end{cases}$ donc : $\begin{cases}a_1=1\\ b_1=1\end{cases}$

Par suite : $f(x)=x+1$

• Sur l'intervalle $[0,2]$ on a : $f(x)=1$

• Sur l'intervalle $[2,4]$ on a : $f(x)=a_2x+b_2$ et on a : $f(2)=1$ et $f(4)=2$

Donc : $\begin{cases}2a_2+b_2=1\\ 4a_2+b_2=2\end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases}2a_2=1\\ b_2=2-4a_2\end{cases}$ donc : $\begin{cases}a_2=\frac{1}{2}\\ b_2=2-2=0\end{cases}$

Par suite : $f(x)=\frac{1}{2}x$

Par conséquent : $\begin{cases}f(x)=x+1 & si \quad x\in[-2,0]\\ f(x)=1 & si \quad x\in[0,2]\\ f(x)=\frac{1}{2}x & si \quad x\in[2,4]\end{cases}$

**Exercice13 :** (***) Tracer la représentation graphique de la fonction f tel que : $f(x)=|2x-4|$

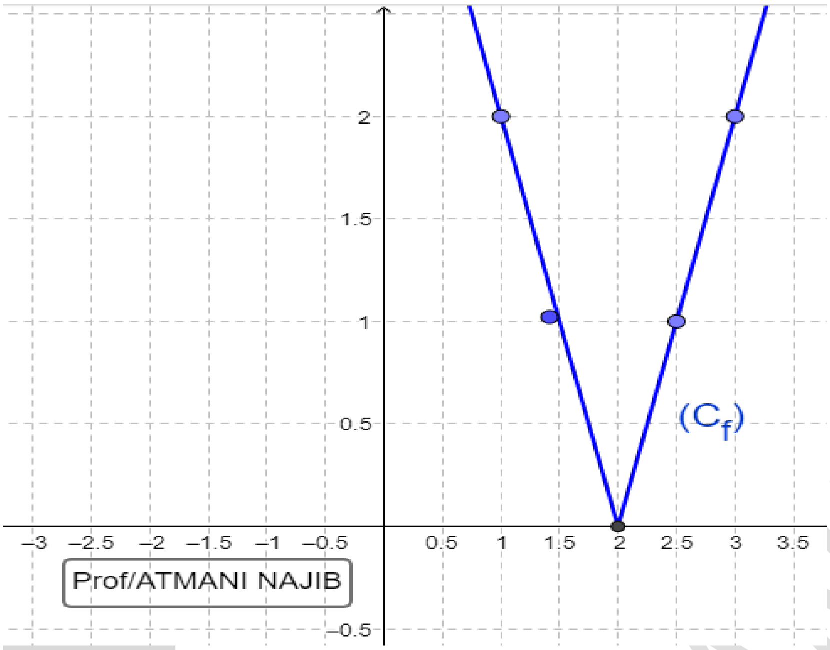
**Solution :** On a $f(x)\in\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

$2x-4=0$ Équivaut à : $x=\frac{4}{2}=2$

Donc $f(x)=2x-4$ si $x\in[2,+\infty[$

$f(x) = -2x+4$ Si $x \in ]-\infty, 2]$

| $x$ | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $2x-4$ | $-$ 0 | $+$ |
| $\lvert 2x-4\rvert$ | $-2x+4$ | $2x-4$ |




**Exercice 14 :** (*) Etudier la parité des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 3x^2 - 5$ 2) $g(x) = \frac{3}{x}$ 3) $h(x) = 2x^3 + x^2$ 4) $t(x) = \frac{x}{x-2}$

5) $m(x) = |x| - \frac{1}{x^2}$ 6) $l(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$ 7) $f(x) = 2\sin x - x^3(1-\cos x)$

**Solution :**1) $f$ est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image. Donc $D_f = \mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$

- $f(-x) = 3(-x)^2 - 5 = 3x^2 - 5$
  $f(-x) = f(x)$

Donc f est une fonction paire,

2) Soit g une fonction tel que : $g(x) = \frac{3}{x}$

On a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ donc $D_g = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

- $g(-x) = \frac{3}{-x} = -\frac{3}{x}$ donc : $g(-x) = -g(x)$

Donc $g$ est une fonction impaire,

3) Soit h une fonction tel que : $h(x) = 2x^3 + x^2$

$h$ Est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image donc $D_h = \mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$

- $h(-x) = 2(-x)^3 + (-x)^2 = -2x^3 + x^2$
  $h(-x) = -(2x^3 - x^2) \neq -h(x)$

Donc $h$ est une fonction ni paire ni impaire,

4) Soit t une fonction tq : $t(x)=\frac{x}{x-2}$

On a $t(x)\in\mathbb{R}$ Équivaut à: $x-2\neq 0$ ssi $x\neq 2$ donc : $D_t=\mathbb{R}-\{2\}$.

On a $-2\in D_t$ mais $-(-2)=2\notin D_t$

Donc $D_t$ n'est pas symétrique par rapport a $O$

Donc $h$ est une fonction ni paire ni impaire,

5) $m(x)=|x|-\frac{1}{x^2}$ : On a $m(x)\in\mathbb{R}$ Équivaut à: $x\neq 0$ donc $D_m=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $m(-x)=|-x|-\frac{1}{(-x)^2}=|x|-\frac{1}{x^2}$ donc : $m(-x)=m(x)$

Donc $m$ est une fonction paire,

6) $l(x)=\frac{1+x}{1+x^2}$ : On a $l(x)\in\mathbb{R}$ signifie $1+x^2\neq 0$

$1+x^2=0$ Équivaut à: $x^2=-1$ impossible par suite : $D_l=\mathbb{R}$

On va donc montrer que $l$ n'est ni paire ni impaire.

Calculons par exemple $l(1)$ et $l(-1)$

$l(1)=\frac{1+1}{1+1^2}=\frac{2}{2}=1$ et $l(-1)=\frac{1-1}{1+(-1)^2}=\frac{0}{2}=0$ donc : $l(-1)\neq -l(1)$

Par suite : $l$ n'est ni paire ni impaire.

7) $f(x)=2\sin x-x^3(1-\cos x)$ on a : $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$ alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=2\sin(-x)-(-x)^3(1-\cos(-x))$

$f(-x)=-2\sin x+x^3(1-\cos x)$ Car $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$ si $x\in\mathbb{R}$

$f(-x)=-(2\sin x-x^3(1-\cos x))=-f(x)$

Donc $f$ est une fonction impaire.

**Exercice 15 :** (***) Soit la fonction définie par : $5f(x)+f(-x)=2x^3-3x$ Pour tout réel x

1) Montrer que : $f$ est une fonction impaire

2) Donner une expression de $f(x)$ Pour tout réel x

**Solution** : Soit $x\in\mathbb{R}$ : on a $5f(x)+f(-x)=2x^3-3x$ (1) pour tout réel x

On remplaçant x par –x on trouve : $5f(-x)+f(x)=2(-x)^3-3(-x)$

Donc : $5f(-x)+f(x)=-2x^3+3x$ (2)

(1)+ (2) donne : $6(f(-x)+f(x))=0$ donc : $f(-x)+f(x)=0$

Donc : $f(-x)=-f(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc $f$ est une fonction impaire

2) On a : $5f(x)+f(-x)=2x^3-3x$

Et puisque $f$ est une fonction impaire donc : $5f(x)-f(x)=2x^3-3x$

$4f(x)=2x^3-3x \Leftrightarrow \boxed{f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}}$

**Exercice 16 :** (**) Soit la fonction définie par : $f(x)=\frac{|x|+1}{2|x|-3}$

$(C_f)$ la courbe de $f$ Dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé.

Montrer que $(C_f)$ symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

**Solution :** $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2|x|-3\neq 0\}=\left\{x\in\mathbb{R}/|x|\neq\frac{3}{2}\right\}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$

Il suffit de montrer que : $f$ est une fonction paire

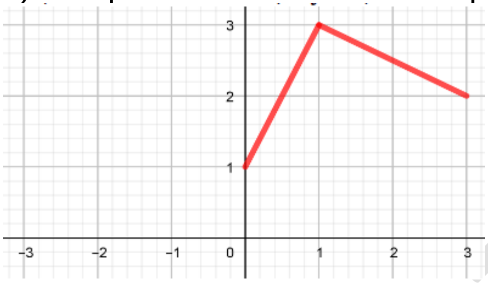
- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$ alors $-x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$
- $f(-x)=\frac{|-x|+1}{2|-x|-3}=\frac{|x|+1}{2|x|-3}=f(x)$

Donc $f$ est une fonction paire

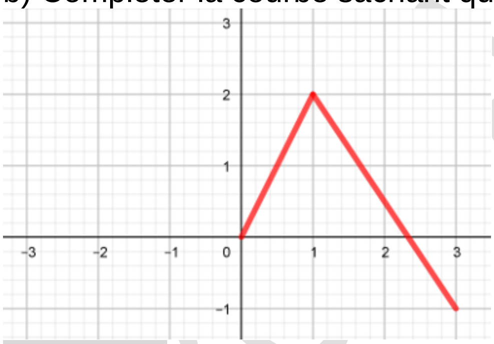
Par suite : la $(C_f)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

**Exercice 17 :** (*) Soit f une fonction définie sur [-3;3] dont la courbe est représentée sur [0;3].

a) Compléter la courbe sachant que f est paire.

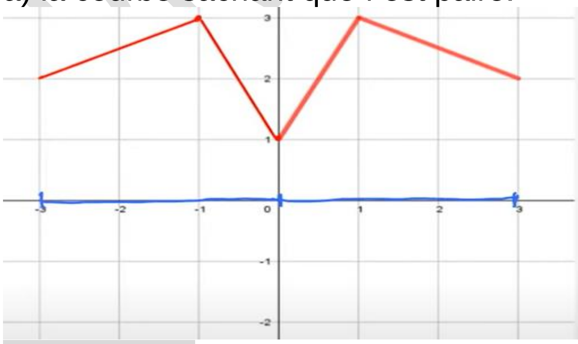


b) Compléter la courbe sachant que f est impaire.

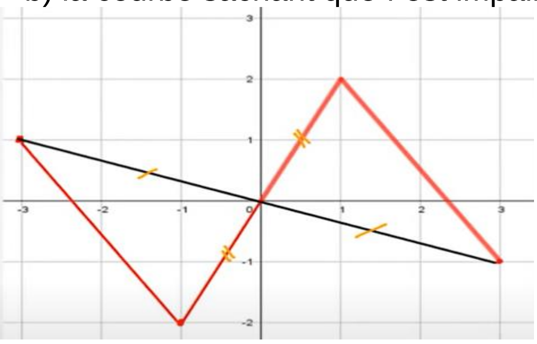


**Solutions :**

a) la courbe sachant que f est paire.



b) la courbe sachant que f est impaire.



**Exercice 18 :** (**) Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=4\sin x-3$

Montrer que : $-7\leq g(x)\leq 1$

**Solution :** On a $\forall x \in \mathbb{R}$ : $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $-4 \leq 4\sin x \leq 4$

donc $-4-3 \leq 4\sin x - 3 \leq 4-3$

donc $-7 \leq g(x) \leq 1$

**Exercice 19 :** (**) Soient les fonctions définies par : 1) $f(x) = 7x-5$ 2) $g(x) = \dfrac{2}{x}$

Etudier la monotonie de $f$ et de g

**Solutions :**1) $f$ est une fonction polynôme donc : $D_f = \mathbb{R}$

Soit $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que : $x_1 \prec x_2$

Donc $7x_1 \prec 7x_2$ car $7 \succ 0$

Donc $7x_1 - 5 \prec 7x_2 - 5$

Alors $f(x_1) \prec f(x_2)$ d'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2) Soit g une fonction tel que : $g(x) = \dfrac{2}{x}$

$g(x) \in \mathbb{R}$ Signifie $x \neq 0$

Donc $D_g = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

a) Soit $x_1 \in [0;+\infty[$ et $x_2 \in [0;+\infty[$ tels que : $x_1 < x_2$

Donc $\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2}$ par suite : $\dfrac{2}{x_1} > \dfrac{2}{x_2}$ car $2 > 0$

Alors $f(x_1) > f(x_2)$ d'où f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

b) Soit $x_1 \in ]-\infty;0]$ et $x_2 \in ]-\infty;0]$ tq $x_1 < x_2$

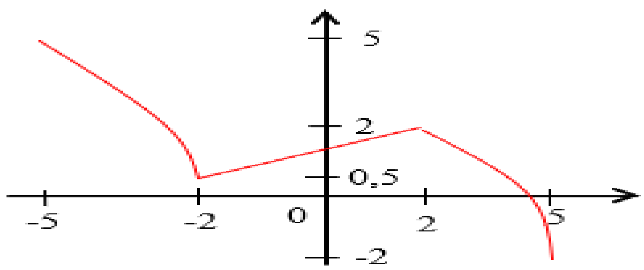
Donc $\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2}$ par suite : $\dfrac{2}{x_1} > \dfrac{2}{x_2}$ car $2 > 0$

Alors $f(x_1) > f(x_2)$ d'où f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

b) **tableau de variation :**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | ↘ | ‖ | ↘ | |

**Exercice 20 :** (**) Soit la fonction définie par la représentions graphique suivante sur l'intervalle **:** $[-5;5]$

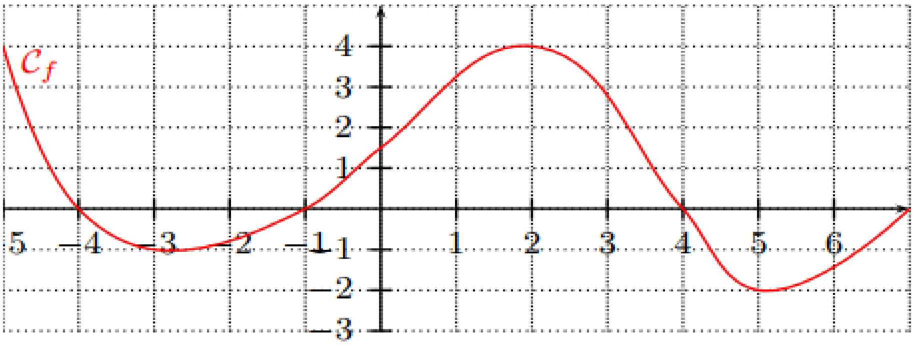



Dresser son tableau de variation sur l'intervalle **:** $[-5;5]$

**Solutions :**

| $x$ | -5 | | -2 | | 2 | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 5 | ↘ | 0,5 | ↗ | 2 | ↘ | -2 |

**Exercice 21 :** (**) Soit la fonction définie par la représentions graphique suivante sur l'intervalle : $[-5;7]$




1) Dresser son tableau de variation sur l'intervalle : $[-5;7]$

2) Déterminer :
a) Le maximum absolu de f sur [−5 ; 7] b) Le minimum de f sur [−5 ; 7]
c) Le minimum de f sur [−5 ; 2]

3) Etudier le signe de la fonction f sur l'intervalle : $[-5;7]$

**Solutions :**

1)➔ Cette fonction est décroissante sur [−5 ; −3], croissante sur [−3 ; 2], décroissante sur [2 ; 5], puis croissante [5 ; 7].
➔ Ou encore : f est croissante sur [−3 ; 2] et sur [5 ; 7], décroissante sur [−5 ; −3] et sur [2 ; 5].
D'où : son tableau de variation sur l'intervalle : $[-5;7]$ est :

| $x$ | $-5$ | | $-3$ | | $2$ | | $5$ | | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $4$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $0$ |

2) a) Le maximum de f sur [−5 ; 7] est M = 2, atteint pour x = −5 et x = 2.
b) Le minimum de f sur [−5 ; 7] est m = −2, atteint pour x = 5.
c) le minimum de f sur [−5 ; 2] est m = −1, atteint pour x = −3.
Attention : la valeur d'un extremum dépend de l'intervalle.

3) Etudions le signe de la fonction f sur l'intervalle : $[-5;7]$

On réunit au sein d'un tableau appelé tableau de signes les informations concernant le signe de la fonction f, c'est à dire sa position par rapport à l'axe des abscisses

| $x$ | $-5$ | | $-4$ | | $-1$ | | $4$ | | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |

**Exercice 22 :** (*) Donner le tableau de variations et représenter la courbe des fonctions numériques définies par : 1) $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ 2) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$

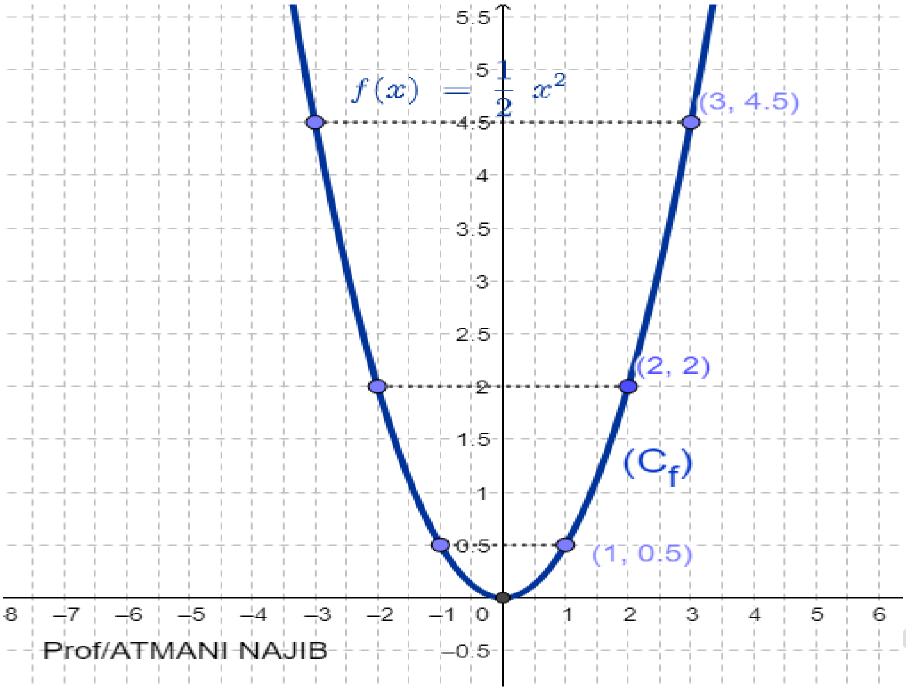
**Solutions : 1)** $D_f=\mathbb{R}$ et On a $a=\frac{1}{2}\succ 0$

Donc : Tableau de variations de f

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 2 | $\frac{9}{2}$ |

**Représentation graphique :**




2) Soit f une fonction numérique tq : $f\left(x\right)=-\frac{1}{2}x^{2}$ et $D_f=\mathbb{R}$

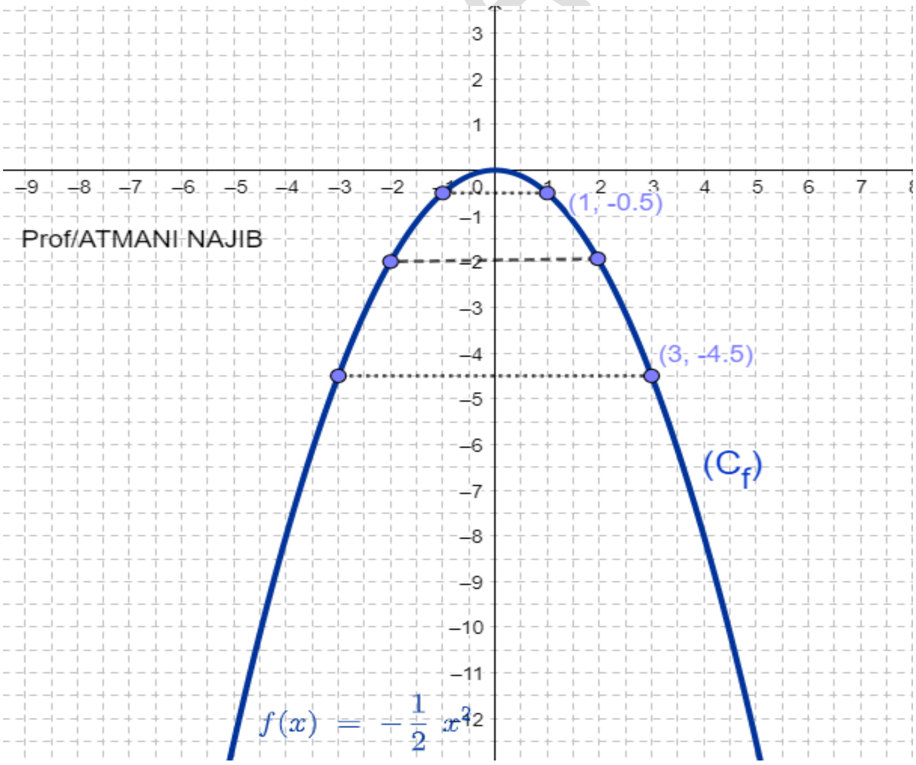
On a : $a=-\frac{1}{2}\prec 0$

Donc : Tableau de variations de f :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ |

**Représentation graphique :**

| $x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | $-\frac{1}{8}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-2$ |



**Exercice 23 :** (***) On considère les fonctions : $f(x)=x^2-2x$ et $g(x)=\frac{x}{x-2}$ et $(C_f)$ et $(C_g)$ les courbes représentatives des fonctions f et g

1) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f et g

2) a) Vérifier que : $f(x)=(x-1)^2-1$ si $x\in D_f$

b) Vérifier que : $g(x)=1+\frac{2}{x-2}$ si $x\in D_g$

3)a) Donner la nature de la courbe de f et ces éléments caractéristique
b) Dresser le tableau de variation de f
4)a) Donner la nature de la courbe de g et ces éléments caractéristique
b) Dresser le tableau de variation de g

5)Déterminer les points d'intersection de $(C_f)$ avec les axes du repère

6)Déterminer les points d'intersection de $(C_g)$ avec les axes du repère

7)Tracer les courbes $(C_f)$ et $(C_g)$ dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

8) Déterminer algébriquement les points d'intersection de $(C_f)$ et $(C_g)$

9)Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\le g(x)$

10)Soit $h$ la fonction définie par : $h(x)=\frac{|x|}{|x|-2}$

a) Déterminer l'ensemble de définition $D_h$
b) Montrer que la fonction h est paire
c)Vérifier que $h(x)=g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+-\{2\}$

11)Tracer la courbes $(C_h)$ de $h$ et $(C_g)$ dans un même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

12)Soit $K$ la fonction définie par : $K(x)=|f(x)|$

a) Tracer la courbes $(C_K)$ de $K$ dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

b) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de

L'équation $K(x)=m$

**Solution :**1) $f(x)=x^2-2x$ et $g(x)=\frac{x}{x-2}$

Dans l'expression de $f(x)$ , $x$ peut prendre n'importe quelle valeur réelle : Donc $D_f=\mathbb{R}$

Tandis que pour : $g(x)$ , $x$ ne doit pas prendre de valeur telle que : $x-2=0$ soit $x=2$

Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{2\}=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

2) a) Vérifions que : $f(x)=(x-1)^2-1$ si $x\in\mathbb{R}$

$f(x)=x^2-2x=x^2-2x+1^2-1^2=x^2-2\times x\times1+1^2-1^2$

Donc : $f(x)=(x-1)^2-1$ ( la forme canonique)

b) Vérifions que : $g(x)=1+\frac{2}{x-2}$ si $x\in D_g$

$1+\frac{2}{x-2}=\frac{x-2+2}{x-2}=\frac{x}{x-2}=g(x)$ (La forme réduite)

3)a) Méthode1 : On a : $a=1$ et $b=-2$ et $c=0$ $f(x)=x^2-2x$ $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

$\alpha=\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2\times1}=-1$ et $\beta=f(-\alpha)=f(1)=1^2-2\times1=-1$

Ainsi : dans le repère $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $(C_f)$ c'est une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta)=W(1;-1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

Méthode2 : On utilisant un résumé de notre cours :

Rappelle : $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$ (forme canonique)

Dans un repère $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $(C_f)$ c'est une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\alpha$

Dans notre exercice on a : $f(x)=(x-1)^2-1$ si $x\in\mathbb{R}$ : $\alpha=-1$ et $\beta=-1$

Dans un repère $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $(C_f)$ c'est une parabole de sommet $W(-(-1);-1)$ c'est-à-dire : $W(1;-1)$ et d'axe de symétrie la droite : $x=-(-1)=1$

b) Le tableau de variations de f : $a=1>0$

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ |

4)a) Méthode1 :On utilisant un résumé de notre cours :

Rappelle : Si : $g(x)=\beta+\frac{k}{x+\alpha}$ alors $(C_g)$ est une hyperbole de centre $\Omega(-\alpha;\beta)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\alpha$ et $y=\beta$

Dans notre exercice on a : $g(x)=1+\frac{2}{x-2}$ avec : $\alpha=-2$ et $\beta=1$ et $k=2>0$

Donc $(C_g)$ est une hyperbole de centre $\Omega(2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=2$ et $y=1$

Et puisque : $k=2>0$ alors : $g$ est strictement décroissante sur les intervalles : $]-\infty;2[$ $et$ $]2;+\infty[$

b) Le tableau de variations de g :

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\searrow$ | $\|$ | $\searrow$ |

Méthode2 : (on utilisant un résumé de notre cours)

Si : $g(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq0$ alors $(C_g)$ est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\frac{d}{c}$ et $y=\frac{a}{c}$

**1iér cas :** si $\det g=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc\succ0$ alors $g$ est strictement croissante

**2iér cas :** si $\det g=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc<0$ alors $g$ est strictement décroissante

Dans notre Exercice on a : $g(x)=\frac{1x+0}{x-2}$ donc $(C_g)$ est une hyperbole de centre $\Omega(2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\frac{-2}{1}=2$ et $y=\frac{1}{1}=1$

$\det g=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -2\end{vmatrix}=1\times(-2)-1\times 0=-2<0$

Donc : $g$ est strictement décroissante sur les intervalles : $]-\infty;2[\ \ et\ \ ]2;+\infty[$

b) Le tableau de variations de g :

| $x$ | $-\infty$   $2$   $+\infty$ |
|---|---|
| $f(x)$ | ↘ || ↘ |

5)Déterminer les points d'intersection de $(C_f)$ avec les axes du repère

$f(x)=x^2-2x$

a) Intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$

$f(x)=0$ Signifie $x^2-2x=0$

Signifie $x(x-2)=0$

Signifie $x=0$ ou $x-2=0$

Signifie $x=0$ ou $x=2$

Donc : les points d'intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des abscisses sont : $O(0;0)$ et $A(2;0)$

Donc : $(C_f)\cap(ox)=\{A(2,0);O(0,0)\}$

b) Intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $f(0)=0^2-2\times 0=0$

Donc le point d'intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des ordonnées est : $O(0;0)$

Donc : $(C_f)\cap(oy)=\{O(0,0)\}$

6)Déterminer les points d'intersection de $(C_g)$ avec les axes du repère

$g(x)=\frac{x}{x-2}$

a) Intersection de la courbe $(C_g)$ avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection de la courbe $(C_g)$ avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $g(x)=0$

$g(x)=0$ Signifie $\frac{x}{x-2}=0$

Signifie $x=0$

Donc le point d'intersection de la courbe $(C_g)$ avec l'axe des abscisses est : $O(0;0)$

Donc : $(C_g)\cap(ox)=\{O(0,0)\}$

b) Intersection de la courbe $(C_g)$ avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe $(C_g)$ avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $g(0)=\frac{0}{0-2}=0$

Donc le point d'intersection de la courbe $(C_g)$ avec l'axe des ordonnées est : $O(0;0)$

$(C_g)\cap(oy)=\{O(0,0)\}$

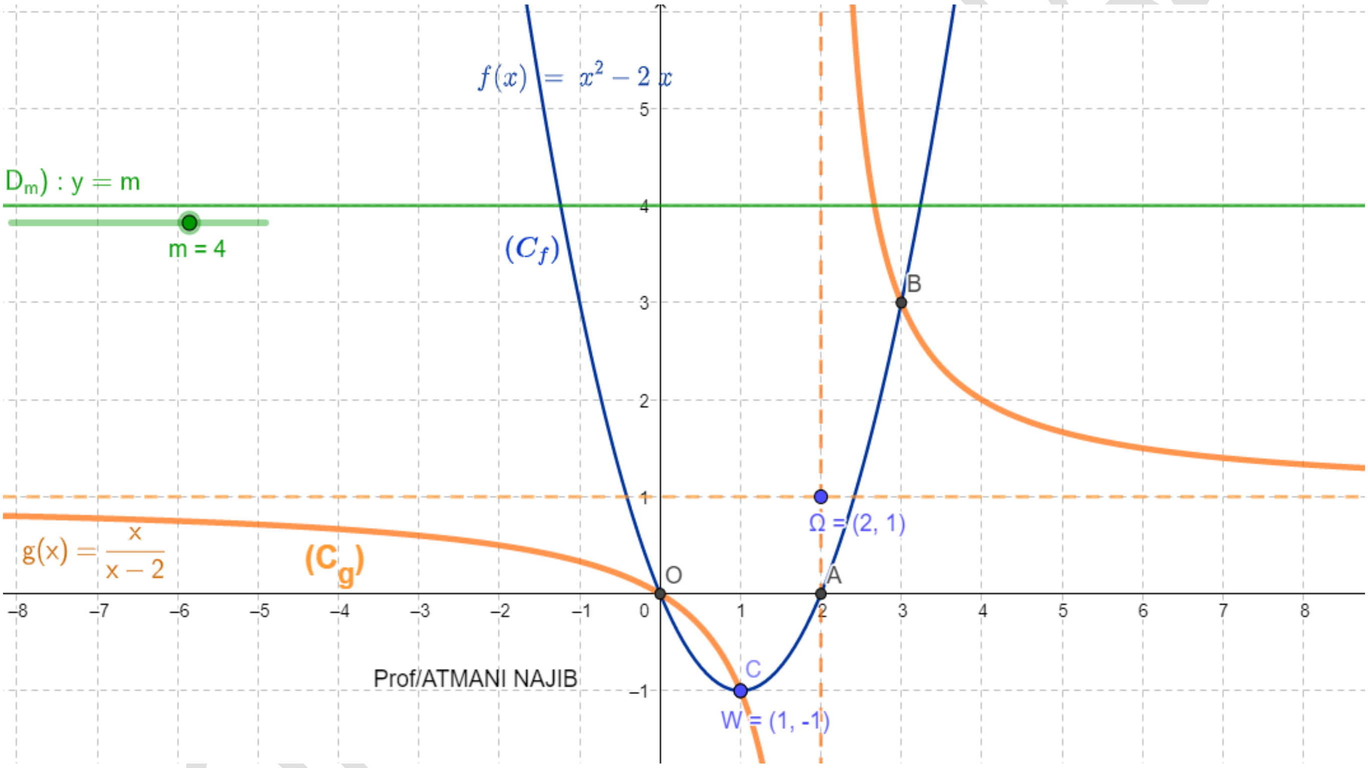
7)Représentation des courbes $(C_f)$ et $(C_g)$ dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

La courbe $(C_g)$ :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **-2** | **-1** | **0** | **2** | **3** | 4 | 4 |
| 5/3 | 2 | 3 | | 3 | 2 | 5/3 |

La courbe $(C_f)$ : $f(x)=x^2-2x$

| $x$ | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 3 | 8 |




8) Déterminons algébriquement les points d'intersection de $(C_f)$ et $(C_g)$

Résolvons dans : $\mathbb{R}-\{2\}$ l'équation : $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ Signifie que : $x^2-2x=\frac{x}{x-2}$

Signifie que : $x(x-2)-\frac{x}{x-2}=0$

Signifie que : $x\left(x-2-\frac{1}{x-2}\right)=0$

Signifie que : $x\left(\frac{(x-2)^2-1}{x-2}\right)=0$

Signifie que : $x\left(\frac{(x-2)^2-1^2}{x-2}\right)=0$

Signifie que : $x\left(\frac{(x-2-1)(x-2+1)}{x-2}\right)=0$

Signifie que : $\frac{x(x-3)(x-1)}{x-2}=0$ avec $x\in\mathbb{R}-\{2\}$

Signifie que : $x(x-3)(x-1)=0$ avec $x\in\mathbb{R}-\{2\}$

Signifie que : $x=0$ ou $x-1=0$ ou $x-3=0$

Signifie que : $x=0$ ou $x=1$ ou $x=3$

Et par suite : $(C_f)\cap(C_g)=\{C(1,-1);O(0,0);B(3,3)\}$

9)Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\le g(x)$

Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\le g(x)$ équivaut à déterminer les intervalles dont on a $(C_f)$ est au-dessous de $(C_g)$

Donc : graphiquement : $S=[0,1]\cup]2,3]$

10)Soit $h$ la fonction définie par : $h(x)=\frac{|x|}{|x|-2}$

a) Déterminons l'ensemble de définition $D_h$

$D_h=\{x\in\mathbb{R}/|x|-2\neq 0\}$

$|x|-2=0$ Signifie $|x|=2$

Signifie $x=2$ ou $x=-2$

Donc : $D_h=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

b) Montrons que la fonction h est paire

- si $x\in\mathbb{R}-\{-2;2\}$, alors $-x\in\mathbb{R}-\{-2;2\}$

- $h(-x)=\frac{|-x|}{|-x|-2}=\frac{|x|}{|x|-2}=h(x)$ C'est à dire : $h(-x)=h(x)$

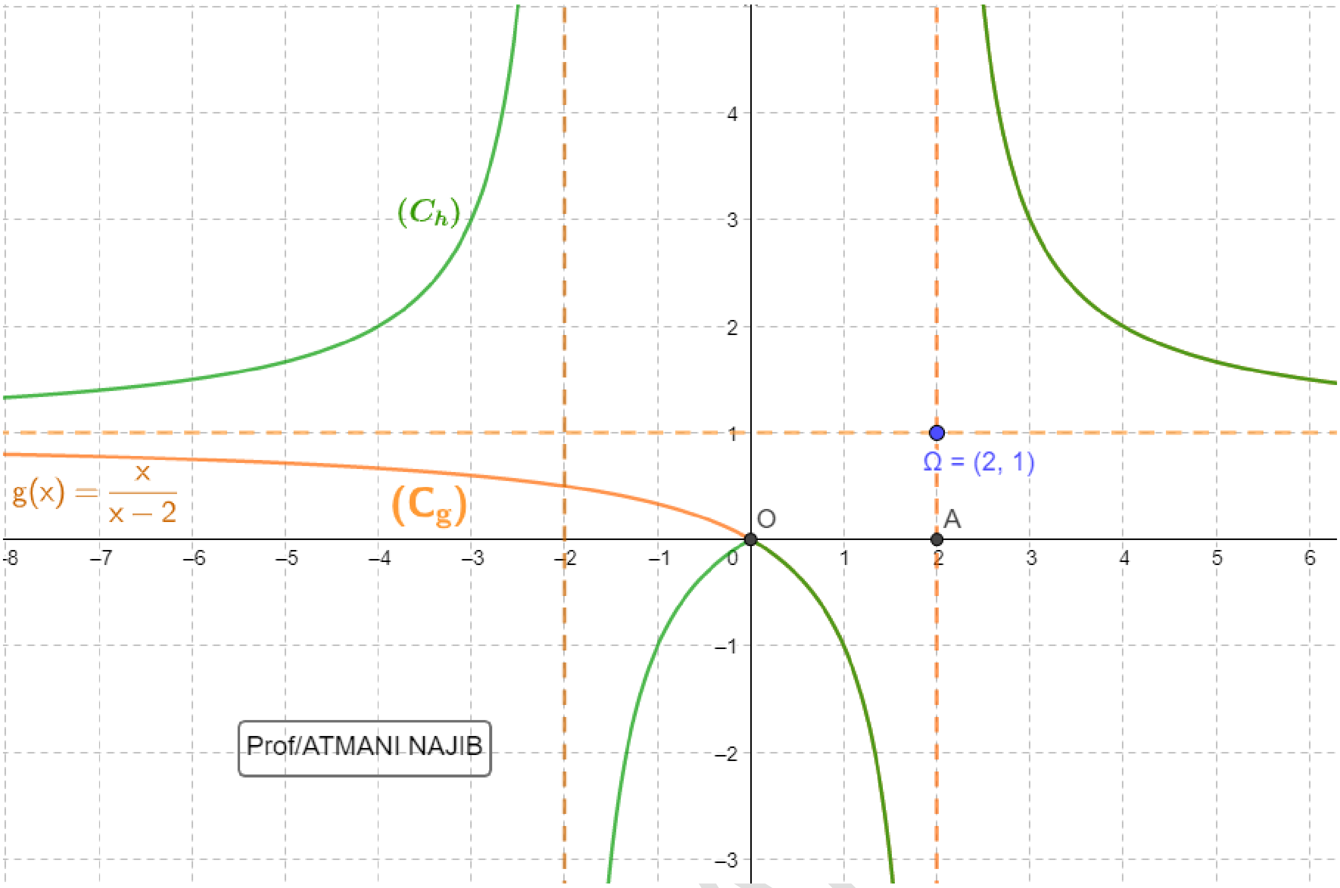
Donc h est une fonction paire,

c)Vérifions que $h(x)=g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+-\{2\}$

Soit : $\mathbb{R}^+-\{2\}$ on a : $h(x)=\frac{|x|}{|x|-2}=\frac{x}{x-2}=g(x)$ car $|x|=x$

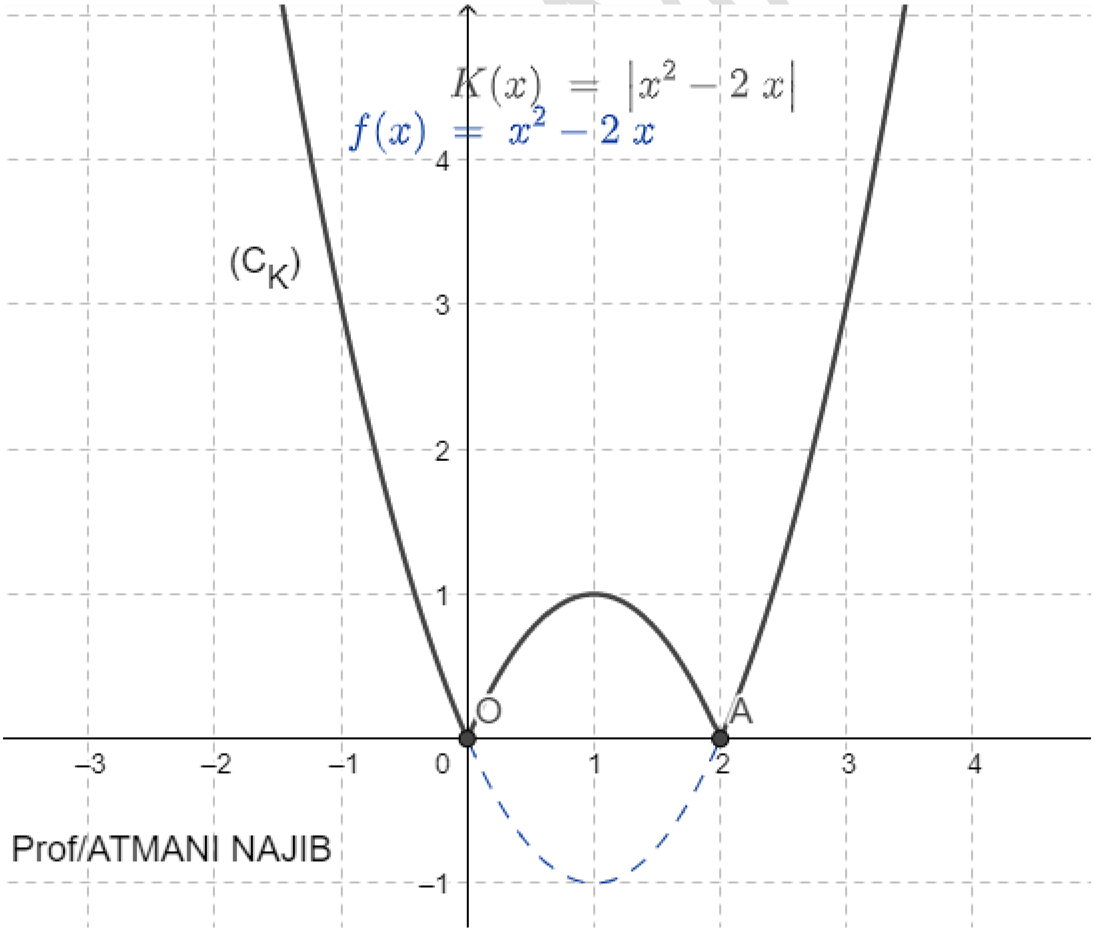
Donc : $h(x)=g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+-\{2\}$

11) Représentation de la courbes $(C_h)$ de $h$ dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

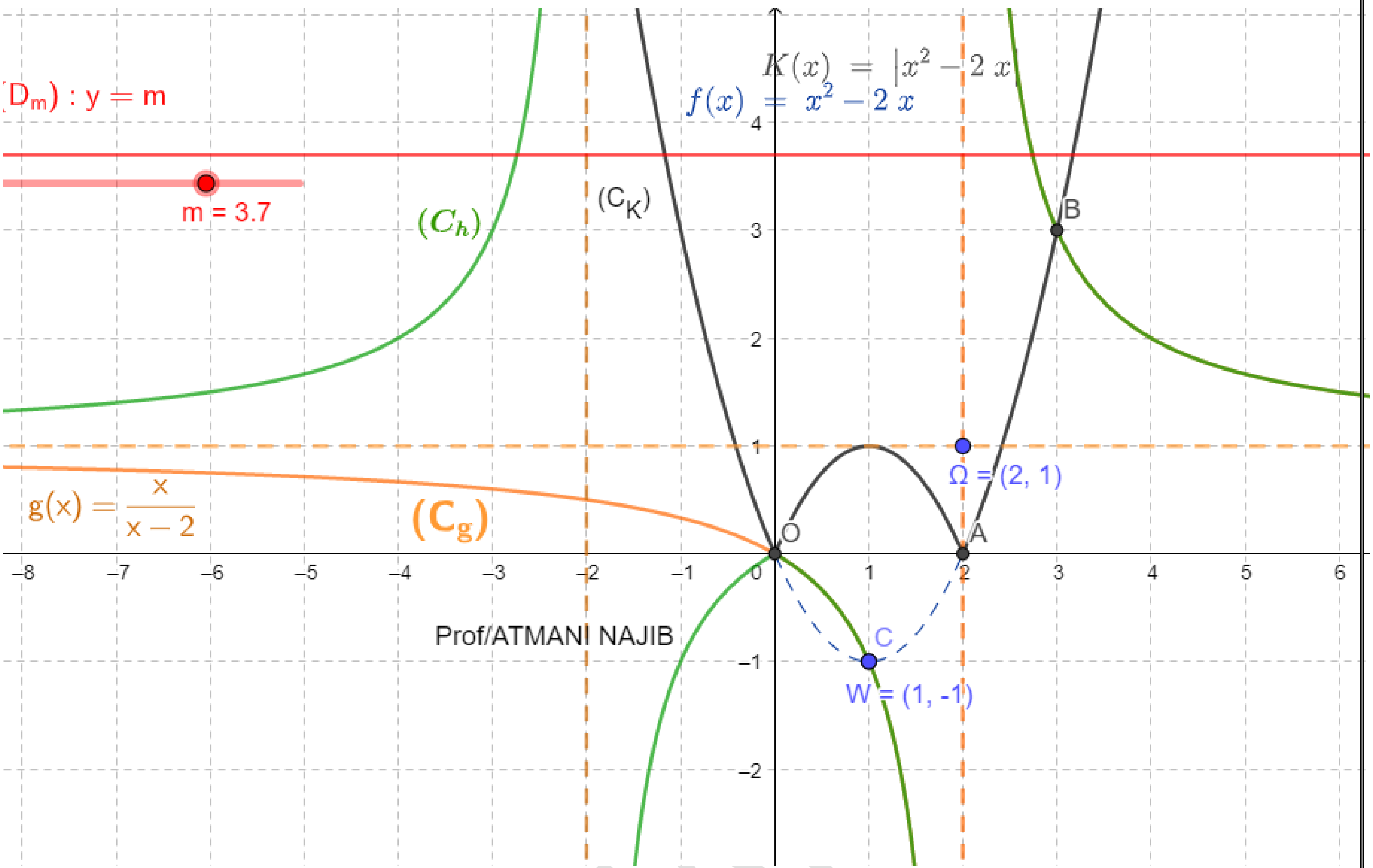



12)Soit $K$ la fonction définie par : $K(x) = |f(x)|$

a) Tracer la courbes $(C_K)$ de $K$ dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$




**Remarque :** tous les courbes dans un même repère :




b) Discutons suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de

L'équation $K(x)=m$

Le nombre de solutions de l'équation $K(x)=m$ : est le nombre de points d'intersection de $(C_K)$ et la droite $(D_m)$ d'équation : $(D_m)\quad y=m$

- ⊳ Si $m<1$: l'équation n'a pas de solutions
- ⊳ Si $m=0$: l'équation admet deux solutions
- ⊳ Si $0<m<1$: l'équation admet 4 solutions
- ⊳ Si $m=1$: l'équation admet 3 solutions
- ⊳ Si $m>1$: l'équation admet deux solutions

*C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.*
*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien*