Tronc commun Sciences BIOF

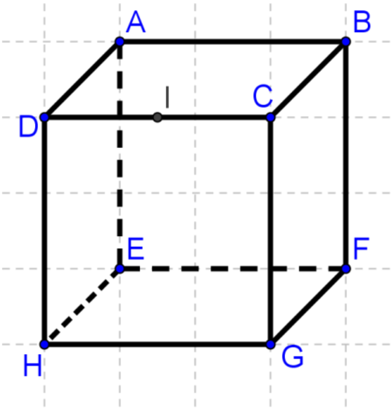
Correction Série N°1 : Géométrie dans l'espace

Exercice 1 : (**) Soit $ABCDEFGH$ un cube de l'espace et soit I le milieu du segment $[DC]$

1) Est ce que le point I appartient au plan (ABC) ? Justifier votre réponse

2) Montrer que les points E ; H ; C ; B sont coplanaires

Solution :



On a : $ABCD$ un carré donc : $(AB) \parallel (DC)$

Donc : les points A ; B ; C ; D sont coplanaires

Donc : $(DC) \subset (ABC)$

Et puisque : $I \in (DC)$ alors : $I \in (ABC)$

2) On a : $ABCD$ un carré donc : $(BC) \parallel (AD)$

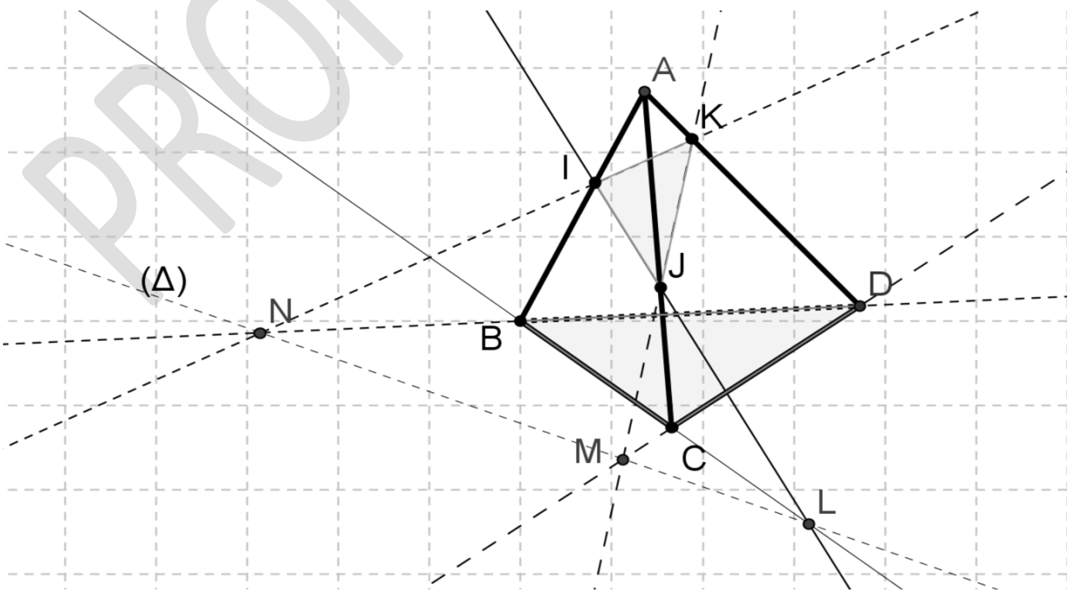
Et on a : $ADEH$ un carré donc : $(EH) \parallel (AD)$

Donc : $(EH) \parallel (BC)$ et par suite les points E ; H ; C ; B sont coplanaires

Exercice 2 : (**) $ABCD$ un tétraèdre et soient : I et J et K des points respective des segments $[AB]$; $[AC]$ et $[AD]$ tel que: (IJ) coupe (BC) en L et (JK) coupe (CD) en M et (IK) coupe (BD) en N

Montrer que : les points L ; M ; N sont alignés

Solution : 1)



On considère les plans : (IJK) et (BCD)

On a : $(IJK) \neq (BCD)$ et $\begin{cases} L \in (IJ) \\ (IJ) \subset (IJK) \end{cases}$ donc : $L \in (IJK)$

On a : $\begin{cases} L \in (BC) \\ (BC) \subset (BCD) \end{cases}$ donc : $L \in (BCD)$

Donc : les plans : (IJK) et (BCD) se coupent suivant une droite (Δ) qui passe par L

On a aussi : $\begin{cases} M \in (JK) \\ (JK) \subset (IJK) \end{cases}$ donc : $M \in (IJK)$

Et : $\begin{cases} M \in (CD) \\ (CD) \subset (BCD) \end{cases}$ donc : $M \in (BCD)$

ET par suite : $M \in (BCD) \cap (IJK) = (\Delta)$

On a aussi : $\begin{cases} N \in (IK) \\ (IK) \subset (IJK) \end{cases}$ donc : $N \in (IJK)$ et $\begin{cases} N \in (BD) \\ (BD) \subset (BCD) \end{cases}$ donc : $N \in (BCD)$

Par suite : $N \in (BCD) \cap (IJK) = (\Delta)$

Par suite : les points L ; M ; N appartiennent à la même droite (Δ)

Par conséquent : les points L ; M ; N sont alignés

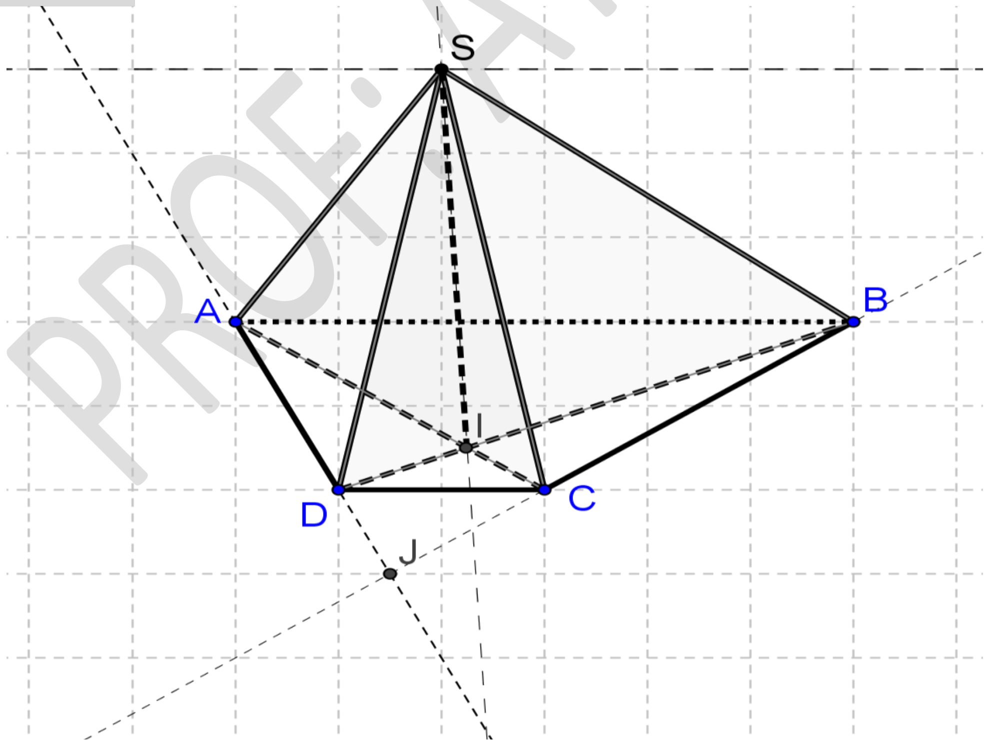
Exercice 3 : (**) $SABCD$ une pyramide sa base est un trapèze $ABCD$ tel que $(AB) \parallel (CD)$

1)Déterminer la droite (Δ) intersection des plans (SAC) et (SBD)

2) Déterminer la droite (Δ') intersection des plans (SAB) et (SCD)

3) Déterminer la droite (Δ'') intersection des plans (SAB) et (SBC)

Solution :



1) On a : $B \in (SBD)$ et $B \notin (SAC)$ donc $(SBD) \neq (SAC)$ (1)

On a : $S\in(SBD)$ et $S\in(SAC)$ donc $S\in(SBD)\cap(SAC)$ (2)

Soit I Le point d'intersection des droites (AC) et (BD)

On a : $\begin{cases} I\in(AC) \\ (AC)\subset(SAC) \end{cases}$ donc : $I\in(SAC)$

Et on a : $\begin{cases} I\in(BD) \\ (BD)\subset(SBD) \end{cases}$ donc : $I\in(SBD)$

Donc : $I\in(SAC)\cap(SBD)$ (3)

Donc : de (1) et (2) et (3) en déduit que : $(SAC)\cap(SBD)=(SI)=(\Delta)$

2) On a : $A\in(SAB)$ et $A\notin(SCD)$ Donc $(SAB)\neq(SAD)$ (1)

On a : $S\in(SAB)$ et $S\in(SCD)$ Donc $S\in(SAB)\cap(SCD)$ (2)

Donc : $(SAB)\cap(SCD)=(\Delta')$

Puisque : $(AB)\subset(SAB)$ et $(CD)\subset(SCD)$ et $(AB)\parallel(CD)$

Donc : d'après le théorème du toit : la droite (Δ') est la droite qui passe par S et parallèle a (AB) et (CD)

3) On a : $A\in(SAD)$ et $A\notin(SBC)$ Donc $(SAD)\neq(SBC)$ (1)

On a : $S\in(SAD)$ et $S\in(SBC)$ Donc $S\in(SAD)\cap(SBC)$ (2)

Donc : $(SBC)\cap(SAD)=(\Delta'')$ qui passe par S

Soit J Le point d'intersection des droites (AD) et (BC)

Donc : $J\in(AD)$ et $J\in(BC)$

Par suite : $J\in(SBC)\cap(SAD)$ (3)

Donc : de (1) et (2) et (3) en déduit que : $(SBC)\cap(SAD)=(SJ)=(\Delta'')$

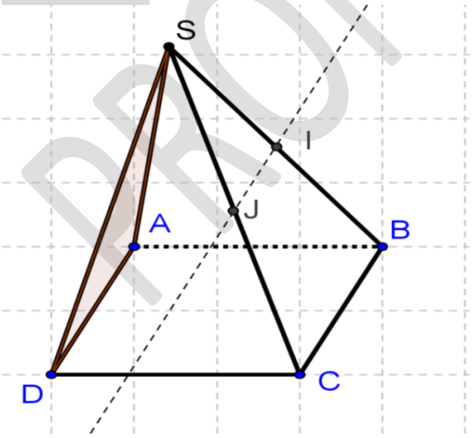
Exercice 4 : (**) $SABCD$ une pyramide sa base est un parallélogramme $ABCD$

Soient I et J les milieux respectifs des segments $[SB]$ et $[SC]$

1) Montrer que : $(AD)\parallel(IJ)$

2) Montrer que : $(IJ)\parallel(ADS)$

Solution :



1) Dans le triangle SBC on a I le milieu du segment $[SB]$ et J le milieu du segment $[SC]$

Donc $(IJ)\parallel(BC)$ (1) et puisque $ABCD$ est un parallélogramme alors $(BC)\parallel(AD)$) (2)

De (1) et (2) on déduit que $(AD)\parallel(IJ)$

2) On a : $A\in(ADS)$ et $D\in(ADS)$ donc : $(AD)\subset(ADS)$ (4) (d'après une axiome d'incidence)

Et puisque : $(AD) \parallel (IJ)$ alors : $(IJ) \parallel (ADS)$

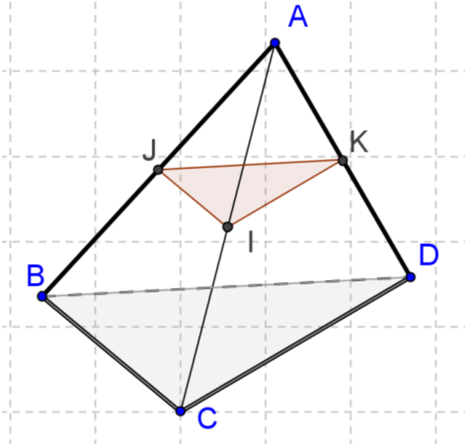
Exercice 5 : (**) $ABCD$ un tétraèdre

Soient I ; J et K les milieux respectifs des segments $[AC]$; $[AB]$ et $[AD]$

1)Faire une figure

2)Montrer que : $(BCD) \parallel (IJK)$

Solution : 1)



2)dans le triangle ABC on a I le milieu du segment $[AC]$ et J le milieu du segment $[AB]$

Donc : $(IJ) \parallel (BC)$

Et dans le triangle ABD on a : K le milieu du segment $[AD]$ et J le milieu du segment $[AB]$

Donc : $(JK) \parallel (BD)$

Et puisque : $(IJ) \parallel (BC)$ et $(BC) \subset (BCD)$ alors : $(IJ) \parallel (BCD)$

Et puisque : $(JK) \parallel (BD)$ et $(BD) \subset (BCD)$ alors : $(JK) \parallel (BCD)$

Et comme on a : $(IJ) \parallel (BCD)$ (1) et $(JK) \parallel (BCD)$ (2) et $(IJ) \cap (JK) = \{J\}$ (3)

Et $(IJ) \subset (IJK)$ et $(JK) \subset (IJK)$ (4)

De (1) et (2) et (3) et (4) on déduit que: $(BCD) \parallel (IJK)$

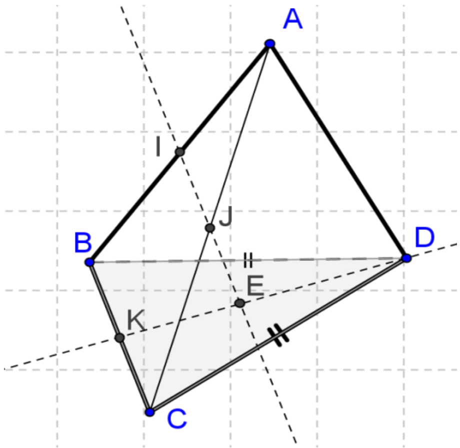
Exercice 6 : (**) $ABCD$ un tétraèdre tel que : $BD = DC$ et Soient I ; J et K

Les milieux respectifs des Segments $[AB]$; $[AC]$ et $[BC]$

1)Faire une figure

2)Montrer que : $(DK) \perp (IJ)$

Solution :1) La figure



2) Dans le triangle ABC on a I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[AC]$

Donc : $(IJ) \parallel (BC)$ (1)

Dans le triangle BCD on a : $BD = DC$ et K le milieu du segment $[BC]$ Donc : $(DK) \perp (BC)$) (2)

Donc : de (1) et (2) on déduit que : $(DK) \perp (IJ)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien