Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°1 : PRODUIT SCALAIRE

Exercice1 : (*) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = \frac{5}{2}\sqrt{2}$ et $\|\vec{v}\| = 4$ et $\overline{(\vec{u};\vec{v})} \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$

Solution : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{2}\times 4\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$

Exercice2 : (**) Soit ABC un triangle tel que : $AB = 3$; $AC = 4$ et $BAC = \frac{2\pi}{3}$

Calculer : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Solution : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos BAC = AB\times AC\times\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\times 3\cos\left(\frac{3\pi-\pi}{3}\right) = 12\cos\left(\frac{3\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right) = 12\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\times 3\cos\left(\frac{3\pi-\pi}{3}\right) = 12\cos\left(\frac{3\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right) = -12\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Car : $\cos(\pi - x) = -\cos x$ Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -6$

Exercice3 : (**) Déterminer, si possible, une mesure de l'angle $(\vec{u};\vec{v})$ (ou une approximation, si c'est possible) dans les cas suivants :

a) $\|\vec{u}\| = 4$ et $\|\vec{v}\| = 8$ et $\vec{u}.\vec{v} = 32$

b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$ et $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{2}$ et $\vec{u}.\vec{v} = 2\sqrt{3}$

c) $\|\vec{u}\| = 1$ et $\|\vec{v}\| = 6$ et $\vec{u}.\vec{v} = -3$

Solution :a) $\|\vec{u}\| = 4$ et $\|\vec{v}\| = 8$ et $\vec{u}.\vec{v} = 32$

On sait que : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos(\vec{u};\vec{v})$ donc : $\cos(\vec{u};\vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$

Donc : $\cos(\vec{u};\vec{v}) = \frac{32}{8\times 4} = 1 = \cos(0)$

Donc : $(\vec{u};\vec{v}) \equiv 0[2\pi]$

b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$ et $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{2}$ et $\vec{u}.\vec{v} = 2\sqrt{3}$

On sait que : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos(\vec{u};\vec{v})$ donc : $\cos(\vec{u};\vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$

Donc : $\cos(\vec{u};\vec{v}) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Donc : $(\vec{u};\vec{v}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ ou $(\vec{u};\vec{v}) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$

c) $\|\vec{u}\| = 1$ et $\|\vec{v}\| = 6$ et $\vec{u}.\vec{v} = -3$

On sait que : $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos(\vec{u};\vec{v})$ donc : $\cos(\vec{u};\vec{v})=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$

Signifie que : $\cos(\vec{u};\vec{v})=\dfrac{-3}{1\times 6}=-\dfrac{1}{2}$

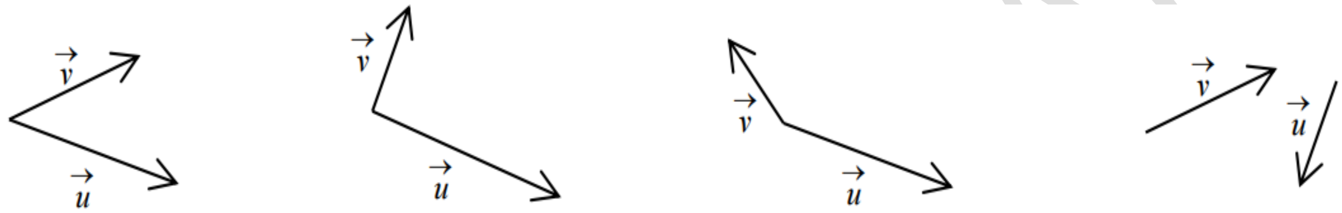
Signifie que : $\cos(\vec{u};\vec{v})=-\cos\dfrac{\pi}{3}$

Signifie que : $\cos(\vec{u};\vec{v})=\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$

Donc : $(\vec{u};\vec{v})\equiv\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$ ou $(\vec{u};\vec{v})\equiv-\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$

Exercice4: (*)

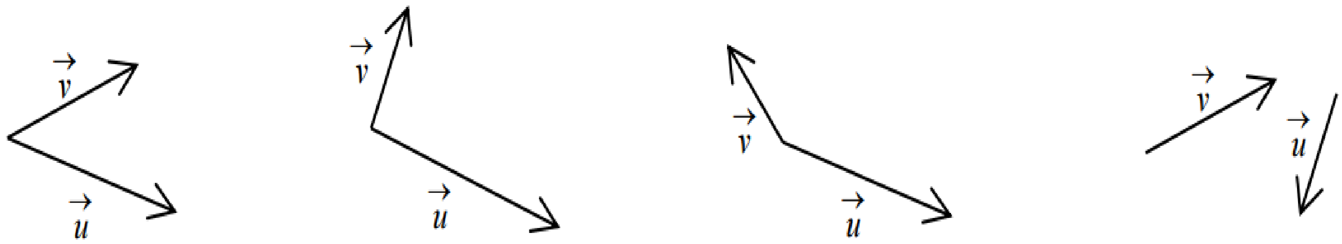
Dans chaque cas, indiquer si le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est positif :(>0) ; négatif (<0) ou nul$(=0)$



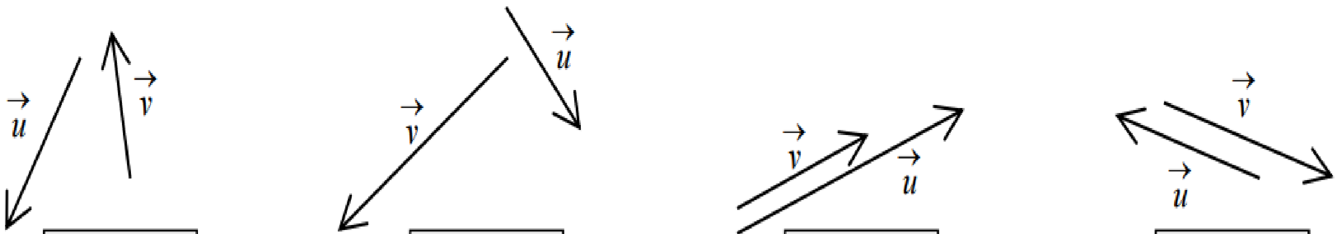
$\vec{u}.\vec{v}$	$\vec{u}.\vec{v}$	$\vec{u}.\vec{v}$	$\vec{u}.\vec{v}$ ....

$\vec{u}.\vec{v}$	$\vec{u}.\vec{v}$	$\vec{u}.\vec{v}$	$\vec{u}.\vec{v}$ ....

Solution :

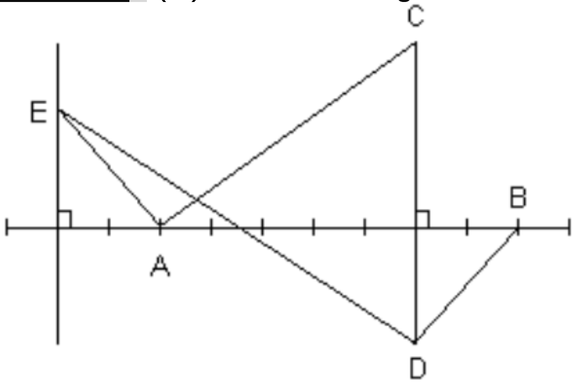


$\vec{u}.\vec{v}>0$	$\vec{u}.\vec{v}=0$	$\vec{u}.\vec{v}<0$	$\vec{u}.\vec{v}<0$



$\vec{u}.\vec{v}<0$	$\vec{u}.\vec{v}=0$	$\vec{u}.\vec{v}>0$	$\vec{u}.\vec{v}<0$

Exercice5 : (**) Dans la configuration ci-dessous, on a AB=7



Déterminer, par lecture graphique, les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ 2) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DB}$ 3) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$ 4) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE}$

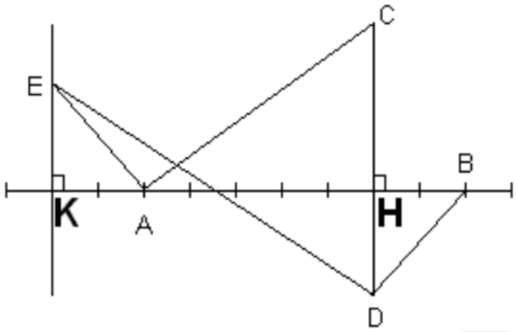
Solution :1) Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Si on appelle H le projeté orthogonal de C sur (AB) (voir figure complétée), alors :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires de même sens, on aura alors :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=AB\times AH=7\times 5=35$



2) Calculons : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DB}$

On « réarrange » l'écriture des vecteurs avant de calculer le produit scalaire :

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BA}.\left(-\overrightarrow{BD}\right)=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$

Le point H précédemment défini est le projeté orthogonal de D sur (AB)

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BH}=BA\times BH$ car les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires de même sens.

Ainsi : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=7\times 2=14$

On conclut que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DB}=-14$

3) Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$

Si on appelle K le projeté orthogonal de E sur (AB) (cf figure complétée)

Alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AK}$ et puisque les vecteurs : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires de sens contraires.

On aura : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AK}=-AB\times AK=-72=-14$

Ainsi : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}=-14$

4) Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE}$

En utilisant la relation de Chasles, et la distributivité du produit scalaire, on écrit :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}.\left(-\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$

En projetant le point D sur (AD), on obtient : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=AB\times AH$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires de même sens.

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=AB\times AH=7\times 5=35$ Ainsi : $-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}=-35-14=-49$

On conclut que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE}=-49$

Exercice6 : (**) ABCD est un carré de côté 2cm.

Les points M et N sont définis par : $\overrightarrow{CM}=\frac{5}{4}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BN}=\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$

1) Ecrire $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{BM}$ en en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$,

2) a) Calculer $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}$

b) Que peut-on dire pour les droites (AN) et (BM) ?

Solution :

CONSEILS : Utilisez la relation de Chasles pour décomposer les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BE}$ et les écrire en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}+\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$ car : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BC}+\frac{5}{4}\overrightarrow{CD}$

2)a) $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}=\left(\overrightarrow{DC}+\frac{5}{4}\overrightarrow{BC}\right).\left(\overrightarrow{BC}+\frac{5}{4}\overrightarrow{CD}\right)$ et, en développant :

$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BC}+\frac{5}{4}\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{CD}+\frac{5}{4}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}+\frac{25}{16}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}$

On a : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}=0$ et $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BC}=0$ car $\overrightarrow{BC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{CD}^2=-CD^2=-2^2=-4$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}^2=BC^2=2^2=4$ et

D'où : $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}=0-\frac{5}{4}\times4+\frac{5}{4}\times4+\frac{25}{16}\times0=0$

b) On a : $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}=0-\frac{5}{4}\times4+\frac{5}{4}\times4+\frac{25}{16}\times0=0$

Donc : $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux, par suite : (AN) et (BM) sont perpendiculaires

Exercice7 : (**) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\|=3$ et $\|\vec{v}\|=2$ et $\vec{u}.\vec{v}=-\frac{3}{2}$

Calculer :1) $A=(\vec{u}+\vec{v}).(2\vec{u}-3\vec{v})$ 2) $B=(\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})$ 3) $C=(\vec{u}-\vec{v})^2$ et $D=(3\vec{u}+2\vec{v})^2$

4) $E=\|\vec{u}+\vec{v}\|$ et $F=\|\vec{u}-\vec{v}\|$

Solution :1) Calculons : $A=(\vec{u}+\vec{v}).(2\vec{u}-3\vec{v})$

$A=2\vec{u}.\vec{u}-3\vec{u}.\vec{v}+2\vec{v}.\vec{u}-3\vec{v}.\vec{v}$

Donc : $A=2.\vec{u}^2-\vec{u}.\vec{v}-3\vec{v}^2=2.\|\vec{u}\|^2-\vec{u}.\vec{v}-3\|\vec{v}\|^2=2\times3^2+\frac{3}{2}-3\times2^2$

Donc : $A=2\times9+\frac{3}{2}-12=\boxed{\frac{15}{2}}$

2) Calculons : $B=(\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})$

$B=(\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}-\vec{v}^2$

$B=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2=9-4=\boxed{5}$

c) Calculons : $C=(\vec{u}-\vec{v})^2$

$C=(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2=3^2-2\left(-\frac{3}{2}\right)+2^2$

$C=9+3+4=16$

Calculons : $D=\left(3\vec{u}+2\vec{v}\right)^2$

$D=\left(3\vec{u}+2\vec{v}\right)^2=9\vec{u}^2+12\vec{u}.\vec{v}+4\vec{v}^2=9\left\|\vec{u}\right\|^2+12\vec{u}.\vec{v}+4\left\|\vec{v}\right\|^2$

$D=9\times3^2+12\left(-\frac{3}{2}\right)+4\times2^2=81-18+16=79$

4) a) Calculons : $E=\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|$

$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\left\|\vec{u}\right\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2=3^2+2\left(-\frac{3}{2}\right)+2^2$

$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=9-3+4=10$

Donc : $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2=10$ et par suite : $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|=\sqrt{10}$

b) Calculons : $F=\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|$

On a : $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=16$ donc : $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=16$

Donc : $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|=\sqrt{16}=4$

Exercice8 : (**) A,B et C sont trois points du plan tels que AB=3 , AC=2 et $BAC=\frac{\pi}{3}$ radians

1) On pose : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$

2) Construire les points D et E définis par : $\overrightarrow{AD}=2\vec{u}-3\vec{v}$ et $\overrightarrow{AE}=-\vec{u}+4\vec{v}$

3) Calculer les produits scalaires suivants :

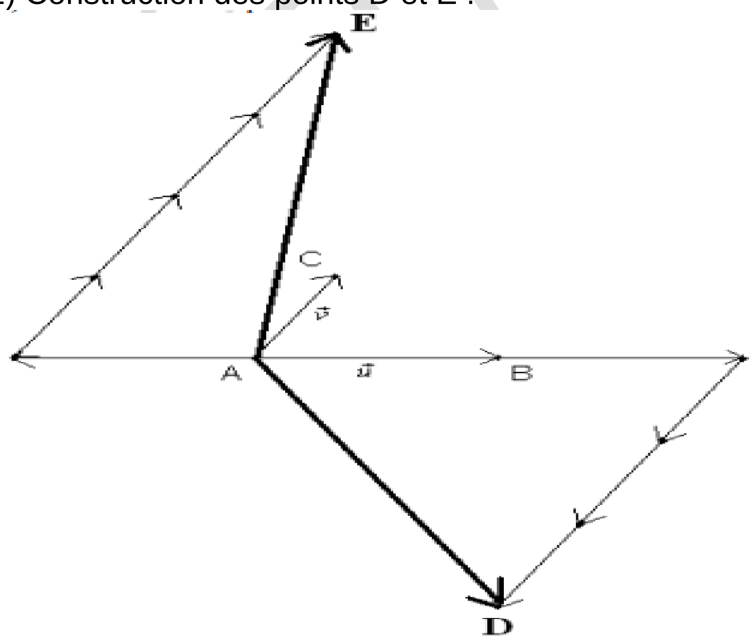
a) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}$ c) $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE}$

4) En déduire une valeur approchée à 0,1 degré près par défaut de l'angle DAE

Solution :1) Le calcul de $\vec{u}.\vec{v}$ s'effectue directement à l'aide des données de l'énoncé :

$\vec{u}.\vec{v}=\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\cos BAC=3\times2\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=6\times\frac{1}{2}=3$

2) Construction des points D et E :



3) a) Calculons : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}$

On utilise les « identités remarquables » et la distribution du produit scalaire :

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}=\left(2\vec{u}-3\vec{v}\right)\left(2\vec{u}-3\vec{v}\right)=\left(2\vec{u}-3\vec{v}\right)^2$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}=\left(2\vec{u}\right)^2-2\times2\vec{u}.3\vec{v}+\left(3\vec{v}\right)^2=4\vec{u}^2-12\vec{u}.\vec{v}+9\vec{v}^2$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}=4\|\vec{u}\|^2-12\vec{u}.\vec{v}+9\|\vec{v}\|^2=4\|\overrightarrow{AB}\|^2-12\,\vec{u}.\vec{v}+9\|\overrightarrow{AC}\|^2$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}=4AB^2-12\vec{u}.\vec{v}+9AC^2$ Or : $\vec{u}.\vec{v}=3$

Donc : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}=4\times3^2-12\times3+9\times2^2$

Donc : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}=36-36+36=36$

b) Calculons : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}=\left(2\vec{u}-3\vec{v}\right)\left(-\vec{u}+4\vec{v}\right)$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}=2\vec{u}.\left(-\vec{u}\right)+2\vec{u}.4\vec{v}-3\vec{v}.\left(-\vec{u}\right)-3\vec{v}.4\vec{v}$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}=-2\vec{u}^2+8\vec{u}.\vec{v}+3\vec{v}.\vec{u}-12\vec{v}^2$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}=-2\|\vec{u}\|^2+8\vec{u}.\vec{v}+3\vec{v}.\vec{u}-12\|\vec{v}\|^2$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}=-2\,AB^2+8\vec{u}.\vec{v}+3\vec{v}.\vec{u}-12\,AC^2$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}=-2\times9+11\vec{u}.\vec{v}-12\times4$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}=-18+11\times3-48=33-66=-33$

c) Calculons : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE}=\left(-\vec{u}+4\vec{v}\right)\left(-\vec{u}+4\vec{v}\right)=\left(-\vec{u}+4\vec{v}\right)^2$

$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE}=\left(-\vec{u}\right)^2+2\times\left(-\vec{u}\right).4\vec{v}+\left(4\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2-8\vec{u}.\vec{v}+16\vec{v}^2$

$=\|\vec{u}\|^2-8\vec{u}.\vec{v}+16\|\vec{v}\|^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2-8\vec{u}.\vec{v}+16\|\overrightarrow{AC}\|^2$

$=AB^2-8\vec{u}.\vec{v}+16\,AC^2=3^2-8\times3+16\times2^2=9-24+64=\boxed{49}$

4) En calculant le produit scalaire : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}$ d'une deuxième manière, on obtiendrait :

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}=\|\overrightarrow{AD}\|\times\|\overrightarrow{AE}\|\times\cos\left(\widehat{ADE}\right)$

Puisque : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}=-33$; $\|\overrightarrow{AD}\|^2=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}=36$ on obtient $AD^2=36$ c'est-à-dire : $AD=6$

et de même : $AD=7$

Égalité : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}=\|\overrightarrow{AD}\|\times\|\overrightarrow{AE}\|\times\cos\left(\widehat{ADE}\right)$ fournit donc : $\cos\left(\widehat{ADE}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}}{\|\overrightarrow{AD}\|\times\|\overrightarrow{AE}\|}=\dfrac{-33}{6\times7}=-\dfrac{33}{42}=-\dfrac{11}{14}$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}=\|\overrightarrow{AD}\|\times\|\overrightarrow{AE}\|\times\cos\left(\widehat{ADE}\right)=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos\widehat{BAC}=3\times2\times\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=6\times\dfrac{1}{2}=3$

Grâce à la calculatrice, on déduit que l'angle $\widehat{DAE}$ mesure environ 141,8 ° (à 0,1 degré prés)

Exercice9 : (**) Soit CFG un triangle tels que : $CF=7$ et $CG=6$ et $FG=3$

En appliquant la propriété suivante :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs alors on a : $\vec{u}.\vec{v}=\dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ et $\vec{u}.\vec{v}=\dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

Calculer : $\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF}$

Solution : Calculons : $\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF}$

Pour : $\vec{u}=\overrightarrow{CG}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{CF}$

Et comme on a : $\vec{u}.\vec{v}=\dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

Alors on a : $\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{CG}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{CF}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{CG}-\overrightarrow{CF}\right\|^2\right)$

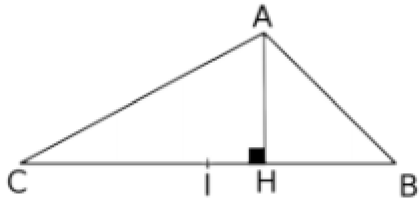
Donc : $\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\left(CG^2+CF^2-FG^2\right)=\frac{1}{2}\left(6^2+7^2-3^2\right)=38$

<u>Exercice10</u> : (**) Considérons un triangle ABC tels que : BC = 7, AB = 6 et Ac = 5

1) a) Calculer : $\cos BAC$

b) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ En déduire que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=30$

2)Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).



Calculer : BH

Solution : 1) a) Calculons : $\cos BAC$

D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC nous obtenons :

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos BAC$

Donc : $\cos\left(BAC\right)=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\times AC}$

Donc : $\cos\left(BAC\right)=\frac{36+25-49}{2\times6\times5}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$

b) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\cos BAC=6\times5\times\frac{1}{5}=6$

Déduisons que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=30$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=6$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}^2-6=BA^2-6=36-6=30$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=30$

2) Calculons : BH

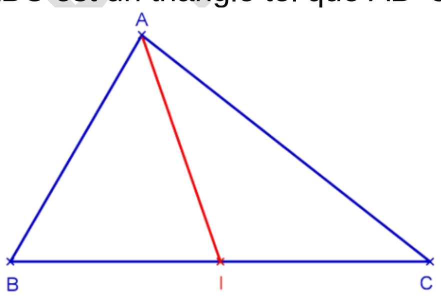
On a : H le projeté orthogonal de A sur (BC) et puisque : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=30>0$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}=BH\times BC$

Donc : $\boxed{BH=\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BC}=\frac{30}{7}}$

<u>Exercice11</u> : (*)

ABC est un triangle tel que AB=5 ; BC=8 et AC=7 et I est le milieu de [BC].



Calculer la longueur AI.

Solution :D'après le Théorème de la médiane dans ABC nous obtenons :

$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

Donc : $25 + 49 = 2AI^2 + \frac{64}{2}$

Donc : $2AI^2 = 42$

Donc : $AI^2 = \frac{42}{2} = 21$

Donc : $\boxed{AI = \sqrt{21}}$

Exercice12 : (***) Soit ABC un triangle tel que : AB = $\sqrt{7}$ et AC= 2 et BC= 3
I Le milieu du segment $[BC]$

1) a) Calculer : $\cos(B\hat{A}C)$

b) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$

c) Calculer AI

2) Soit M un point tel que : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

a) Calculer : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) Montrer que : $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

c) Que peut-on déduire des droites : (MB) et (AC) ?

Solution : 1) a) D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos A$

Donc : $9 = 4 + 7 - 4 \times \sqrt{7} \times \cos A$

Donc : $-2 = -4 \times \sqrt{7} \times \cos A$ donc : $\cos A = \frac{2}{4 \times \sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{7}^2} = \frac{\sqrt{7}}{14}$

1)b) On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \hat{A}$

Donc : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times \sqrt{7} \times \frac{\sqrt{7}}{14} = 2 \times \frac{\left(\sqrt{7}\right)^2}{14} = \frac{14}{14} = 1$

1)c) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$

Par suite : $\sqrt{7}^2 + 2^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}3^2$

Donc : $11 = 2AI^2 + \frac{9}{2}$ c'est-à-dire : $AI^2 = \frac{13}{4}$ par suite : $AI = \sqrt{\frac{13}{4}}$

2)a) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}AC^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times 4 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$

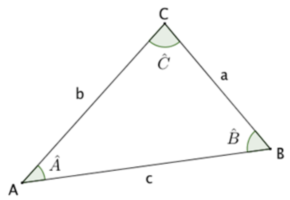
2)b) $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1 + 1 = 0$

2)b) Donc : $\overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{AC}$ par suite : $(MB) \perp (AC)$

Exercice13 : (**) Soit ABC un triangle tel que : $a = BC = 6$ et $A = 30°$ et $B = 73°$
Calculer b et c

Solution : D'après la formule de sinus on a : $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=\frac{2\times S}{abc}$



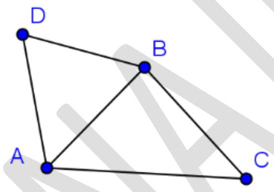
On a donc : $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin 30°}{6}=\frac{1}{12}$ donc : $\frac{\sin 73°}{b}=\frac{1}{12}$

Par suite : $b=12\sin 73°=11.47$

Et on a : $\frac{\sin 77°}{c}=\frac{1}{12}$

Donc : $c=12\sin 77°=11.69$

Exercice14 : (***) Soit ABC un triangle isocèle et rectangle en B tel que $AB=\sqrt{2}$
On construit à l'extérieur du triangle ABC le triangle équilatérale ABD (voir schéma)



1) Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$

2) Calculer : AC et DC

3) Montrer que : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$

4) Vérifier que : $DAC=\frac{7\pi}{12}$

5) En déduire : $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Solution : 1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BD}\right\|\cos A\hat{B}D=AB\cdot BD\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=1$

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BD}\right\|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^2\times-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$

• D'après Pythagore on a : $AC^2=BC^2+AB^2$

$AC^2=\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2$ Signifie que : $AC^2=4$ ssi $AC=2$

D'après le Théorème d'Al Kashi dans BCD on a : $DC^2=BC^2+BD^2-2BC\times BD\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $DC^2=2+2-2\times2\times-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $DC^2=4+4\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=4+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4+2\sqrt{3}$ par suite : $DC=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

• D'après le Théorème d'Al Kashi dans ACD on a :

$DC^2=AC^2+AD^2-2AC\times AD\cos(\alpha)$

$DC^2=AC^2+AD^2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2=4+2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

Signifie que : $4+2\sqrt{3}=4+2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

Signifie que : $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$

4) $DAC=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}$

On a : $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$ donc : $AC\times AD\times\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=1-\sqrt{3}$

Donc : $2\times\sqrt{2}\times\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=1-\sqrt{3}$

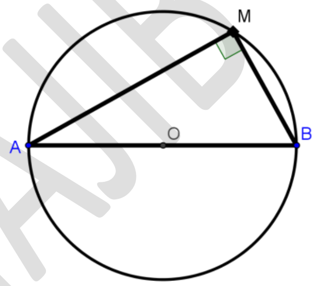
Donc : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2\times\sqrt{2}}=\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)\times\sqrt{2}}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

<u>Exercice15</u> : (****) Soient A et B deux points distincts du plan tel que : $AB=4$

1) Déterminer et représenter l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{BM}=0$

2) Déterminer et représenter l'ensemble (F) des points M du plan tel que : $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=\frac{9}{4}$

Solution : soit M un point du plan



1) $M\in(E)$ Équivaut à : $\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{BM}=0$

Équivaut à : $(AM)\perp(BM)$

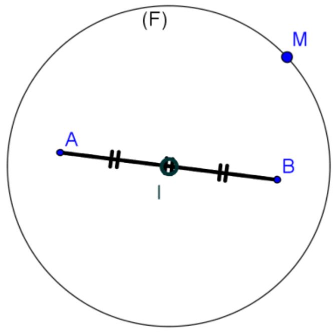
Équivaut à dire que : le point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$

Par conséquent : l'ensemble (E) des points M du plan tel que :
$\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{BM}=0$ est le cercle de diamètre $[AB]$

2) $M\in(F)$ Équivaut à : $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=\frac{9}{4}$

Soit I le milieu du segment $[AB]$ donc D'après le théorème de la médiane dans MAB on a :

$\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{1}{4}AB^2$ C'est-à-dire : $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{16}{4}$



$M\in(F)$ Équivaut à : $MI^2-\frac{16}{4}=\frac{9}{4}$

Équivaut à : $MI^2=\frac{9}{4}+\frac{16}{4}=\frac{25}{4}$

Équivaut à : $MI=\frac{5}{2}$

Par conséquent : l'ensemble (F) des points M du plan est le cercle de centre I et de rayon $R=\frac{5}{2}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien