Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°1 : TRIGONOMÉTRIE2

Partie 2 : Equations et inéquations trigonométriques

Exercice1 : (*)
A l'aide d'un cercle trigonométrique seulement, donner toutes les valeurs possibles de x vérifiant les conditions données.

1) $\cos x = \frac{1}{2}$ et $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ avec : $x \in]-\pi, \pi]$

2) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x = -\frac{1}{2}$ avec : $x \in [-\pi, 3\pi]$

Solution : 1) $x = -\frac{\pi}{3}$ 2) $x \in \left\{-\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right\}$

Exercice 2 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos x = -\frac{1}{2}$ c) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ d) $2\cos x - 4 = 0$ e) $2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$

Solution : On rappelle les valeurs remarquables des sinus et cosinus :

x (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
x (°)	0	30°	45°	60°	90°
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

On sait que $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc on a : $\cos x = \cos\frac{\pi}{4}$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad ou \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ est : $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\cos x = -\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos x = -\cos\frac{\pi}{3}$

Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ c'est-à-dire : $\cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Équivaut à : $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad ou \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos^2 x - \frac{1}{2} = 0$

Équivaut à : $\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$

Équivaut à : $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Équivaut à : $\cos x = \cos\frac{\pi}{4}$ ou $\cos x = -\cos\frac{\pi}{4}$ c'est-à-dire : $\cos x = \cos\frac{\pi}{4}$ ou $\cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

Équivaut à : $\cos x = \cos\frac{\pi}{4}$ ou $\cos x = \cos\frac{3\pi}{4}$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad ou \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad ou \quad x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Ainsi : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi \,; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \,; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \,; -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right\} avec\ k \in \mathbb{Z}$

d) $2\cos x - 4 = 0$ Équivaut à : $2\cos x = 4$

Équivaut à : $\cos x = 2 \notin [-1;1]$

Alors l'équation $\cos x = 2$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ et on a : $S_{\mathbb{R}} = \varnothing$.

e) $2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$ Équivaut à : $2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$

Équivaut à : $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

Équivaut à : $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{3}$

Équivaut à : $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ car : $-\cos x = \cos(\pi - x)$

Équivaut à : $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Équivaut à : $x + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad ou \quad x + \frac{\pi}{4} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $x = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad ou \quad x = -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \quad ou \quad x = -\frac{11\pi}{12} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{11\pi}{12} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \ / k \in \mathbb{Z} \right\}$

Exercice 3 : (*) (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin x = -\frac{1}{2}$ e) $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$

Solution : a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin\frac{\pi}{3}$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad ou \quad x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad ou \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

b) $\sin x = -\frac{1}{2}$ équivaut à : $\sin x = -\sin\frac{\pi}{6}$

Équivaut à : $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad ou \quad x=\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad ou \quad x=\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad ou \quad x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{7\pi}{6}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

e) $2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-1=0$ Équivaut à : $2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1$

Équivaut à : $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

Équivaut à :

Équivaut à : $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad ou \quad 2x-\frac{\pi}{3}=\pi-\left(\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $2x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad ou \quad 2x=\pi-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad ou \quad 2x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{4}+k\pi \quad ou \quad x=\frac{7\pi}{12}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{7\pi}{12}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice 4: (**) Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

1) $\sin x\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$ 2) $\cos x-\sin x=0$ 3) $\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin 2x=0$

Solution : Règles :

Par lecture du cercle trigonométrique, on obtient dans chaque cas une seule famille de solutions.

$$\cos x=1 \Leftrightarrow x=2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$
$$\cos x=-1 \Leftrightarrow x=\pi+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$
$$\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$
$$\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$
$$\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$
$$\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

1) $\sin x\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$\sin x\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$ Équivaut à : $\sin x=0$ ou $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

Équivaut à : $x=k\pi \quad ou \quad 2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=k\pi \quad ou \quad 2x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x = k\pi$ ou $2x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $x = k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ k\pi; \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$

2) $\cos x - \sin x = 0$

$\cos x - \sin x = 0$ Équivaut à : $\cos x = \sin x$

Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi$ ou $x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $\frac{\pi}{2} = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ou $\frac{1}{4} = k(impossible)$ car $k \in \mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

3) $\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin 2x = 0$ Équivaut à : $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\sin 2x$

Équivaut à : $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sin(-2x)$

Équivaut à : $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-2x)\right)$

Équivaut à : $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$

Équivaut à : $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$

Équivaut à : $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi$ ou $\frac{x}{2} = -\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $-\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $\frac{5x}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{3} - \frac{4k\pi}{3}$ ou $x = -\frac{\pi}{5} - \frac{4k\pi}{5}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{3} + \frac{4k\pi}{3}; -\frac{\pi}{5} + \frac{4k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z} \right\}$

Exercice5 : (*)1) Résoudre dans ℝ l'équation suivantes : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) En déduire les solutions dans $]-\pi, \pi]$ de l'équation : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution :1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Donc : $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi;\frac{3\pi}{4}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) Résolution dans $\left]-\pi,\pi\right]$ de l'équation

Méthode1 : (l'encadrement)

a) Encadrement de $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$: $-\pi<\frac{\pi}{4}+2k\pi\leq\pi$ Équivaut à : $-\pi-\frac{\pi}{4}<2k\pi\leq\pi-\frac{\pi}{4}$

Équivaut à : $-\frac{5\pi}{4}<2k\pi\leq\frac{3\pi}{4}$ Équivaut à : $-\frac{5}{4}\leq 2k\leq\frac{3}{4}$ Équivaut à : $-\frac{5}{8}\leq k\leq\frac{3}{8}$

C'est-à-dire : $-0,6...\leq k\leq 0,37...$ et $k\in\mathbb{Z}$ Donc $k=0$

Pour $k=0$ on remplace on trouve $x_1=\frac{\pi}{4}+2\times 0\times\pi=\frac{\pi}{4}$

b) Encadrement de $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$: $-\pi<\frac{3\pi}{4}+2k\pi\leq\pi$

Donc : $-1<\frac{3}{4}+2k\leq 1$ c'est-à-dire : $-1-\frac{3}{4}<2k\leq 1-\frac{3}{4}$

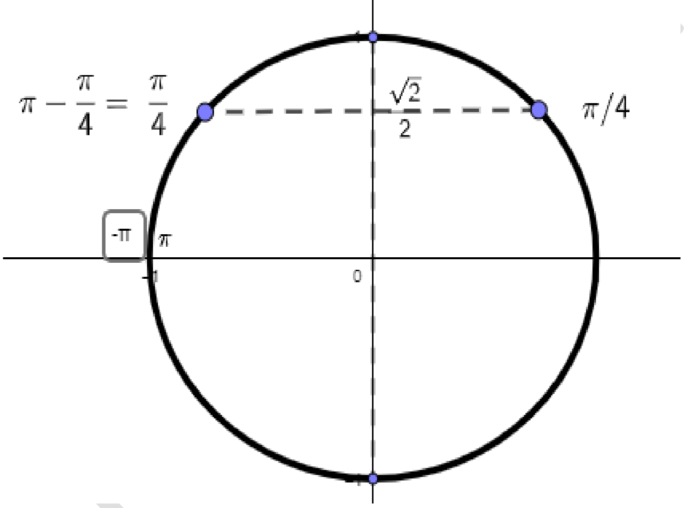
Donc : $-\frac{7}{4}<2k\leq\frac{1}{4}$ c'est-à-dire : $-\frac{7}{8}<k\leq\frac{1}{8}$

Donc $-0,8...\leq k\leq 0,12...$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ on remplace on trouve : $x_2=\frac{3\pi}{4}+2\times 0\times\pi=\frac{3\pi}{4}$

Donc $S_{\left]-\pi,\pi\right]}=\left\{\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\}$

Méthode2 : (utilisation du cercle trigo)



Donc $S_{\left]-\pi,\pi\right]}=\left\{\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\}$

Exercice6 : (*) (**) Résoudre dans ℝ l'équation suivantes : $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) En déduire les solutions dans $\left]-\pi,\pi\right]$de l'équation $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution :1) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\sin x=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ Équivaut à : $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$

Équivaut à : $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi ; \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z} \right\}$

2) Résolution dans $\left]-\pi, \pi\right]$ de l'équation

Méthode1 : (l'encadrement)

a) Encadrement de : $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$: $-\pi < -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \le \pi$ Équivaut à : $-\pi + \dfrac{\pi}{3} < 2k\pi \le \pi + \dfrac{\pi}{3}$

Équivaut à : $-\dfrac{2\pi}{3} < 2k\pi \le \dfrac{4\pi}{3}$ Équivaut à : $-\dfrac{2}{3} < 2k \le \dfrac{4}{3}$ Équivaut à : $-\dfrac{1}{3} \le k \le \dfrac{2}{3}$

C'est-à-dire : $-0,3... \le k \le 0,6...$ et $k \in \mathbb{Z}$ Donc $k = 0$

Pour $k = 0$ on remplace on trouve $x_1 = -\dfrac{\pi}{3} + 2 \times 0 \times \pi = -\dfrac{\pi}{3}$

b) Encadrement de $x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi$: $-\pi < \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi \le \pi$

Donc : $-1 < \dfrac{4}{3} + 2k \le 1$ c'est-à-dire : $-1 - \dfrac{4}{3} < 2k \le 1 - \dfrac{4}{3}$

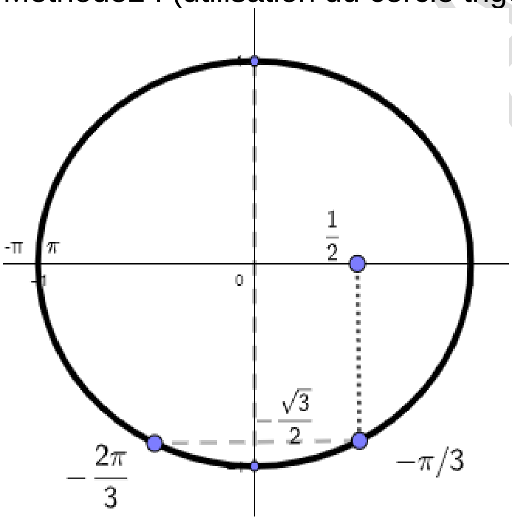
Donc : $-\dfrac{7}{3} < 2k \le -\dfrac{1}{3}$ c'est-à-dire : $-\dfrac{7}{6} < k \le -\dfrac{1}{6}$

Donc $-1,16... \le k \le -0,16...$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = -1$ on remplace on trouve : $x_2 = \dfrac{4\pi}{3} + 2 \times (-1) \times \pi = \dfrac{4\pi}{3} - 2\pi = \dfrac{-2\pi}{3}$

Donc $S_{\left]-\pi,\pi\right]} = \left\{ -\dfrac{\pi}{3} ; -\dfrac{2\pi}{3} \right\}$

Méthode2 : (utilisation du cercle trigo)



Donc $S_{\left]-\pi,\pi\right]} = \left\{ -\dfrac{\pi}{3} ; -\dfrac{2\pi}{3} \right\}$

Exercice7 : (*) (**)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $\cos x = \dfrac{1}{2}$

2) En déduire les solutions dans $\left]-\pi, \pi\right]$ de l'équation : $\cos x = \dfrac{1}{2}$

Solution :1) $\cos x=\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi\,;\frac{\pi}{3}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) Résolution dans $\left]-\pi,\pi\right]$ de l'équation

Méthode1 : (l'encadrement)

a) Encadrement de : $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$: $-\pi<\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq\pi$ Équivaut à : $-\pi-\frac{\pi}{3}<2k\pi\leq\pi-\frac{\pi}{3}$

Équivaut à : $-\frac{4\pi}{3}<2k\pi\leq\frac{2\pi}{3}$ Équivaut à : $-\frac{4}{3}\leq 2k\leq\frac{2}{3}$ Équivaut à : $-\frac{2}{3}\leq k\leq\frac{1}{3}$

C'est-à-dire : $-0,...\leq k\leq 0,...$ et $k\in\mathbb{Z}$ Donc $k=0$

Pour $k=0$ on remplace on trouve $x_1=\frac{\pi}{3}+2\times 0\times\pi=\frac{\pi}{3}$

b) Encadrement de $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$: $-\pi<-\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq\pi$

Donc : $-1<-\frac{1}{3}+2k\leq 1$ c'est-à-dire : $-1+\frac{1}{3}<2k\leq 1+\frac{1}{3}$

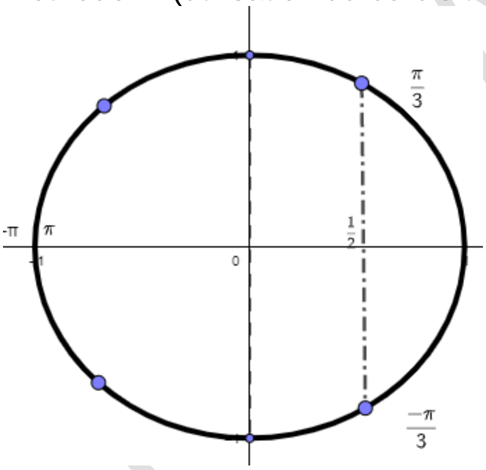
Donc : $-\frac{2}{3}<2k\leq\frac{4}{3}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{3}<k\leq\frac{2}{3}$

Donc $-0,...\leq k\leq 0,...$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ on remplace on trouve : $x_2=-\frac{\pi}{3}+2\times 0\times\pi=-\frac{\pi}{3}$

Donc $S_{]-\pi,\pi]}=\left\{-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}$

Méthode2 : (utilisation du cercle trigo)



Donc : $S_{]-\pi,\pi]}=\left\{-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}$

Exercice 8 : (*) **1)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante $\tan x=1$

2) Résoudre dans $\left]-\pi\,;\,\pi\right]$ l'équation suivante : $\tan x=1$

Solution :1) On a : $\tan x=1$ est définie dans $\mathbb{R}$ si et seulement si : $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ avec ; $k\in\mathbb{Z}$

On sait que : $\tan\frac{\pi}{4}=1$ signifie que : $\tan x=\tan\frac{\pi}{4}$ si et seulement si : $x=\frac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$

Donc L'ensemble de solution de l'équation dans $\mathbb{R}$ est : $S=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) Résolution dans $]-\pi\,;\,\pi]$ l'équation : $\tan x=1$

$\tan x=1$ Signifie que : $x=\frac{\pi}{4}+k\pi; k\in\mathbb{Z}$

On a deux méthodes soit l'encadrement ou en donnant des valeurs a k

Prenons par exemple la valeur $k=-2$ et remplaçons on obtient : $x=\frac{\pi}{4}-2\pi=-\frac{7\pi}{4}$; cette valeur n'appartient pas à $]-\pi,\pi]$; il est donc évident que des valeurs de k inférieures à -2 ne conviendront pas non plus.

Par contre, si je choisis $k=-1$: on obtient $x=\frac{\pi}{4}-\pi=-\frac{3\pi}{4}$; cette valeur appartient à $]-\pi,\pi]$.

En appliquant cette démarche de manière systématique :

pour $k=-1$: $x_1=\frac{\pi}{4}-\pi=-\frac{3\pi}{4}$ convient car appartient à $]-\pi,\pi]$

pour $k=0$: $x_2=\frac{\pi}{4}$ convient car appartient à $]-\pi,\pi]$

pour $k=1$: $x=\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{4}$ ne convient pas car n'appartient pas à $]-\pi,\pi]$

Il est inutile de poursuivre (car si pour $k=1$, la valeur trouvée n'appartient plus à l'intervalle, il en sera de même *a fortiori* pour des valeurs supérieures de k)

Donc : les seules valeurs dans $]-\pi\,;\,\pi]$ sont : $x_1=-\frac{3\pi}{4}$ et $x_2=\frac{\pi}{4}$

Par suite : $S=\left\{-\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right\}$

Exercice 9 : (*) (**) **1)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante $4\tan x+4=0$

2) Résoudre dans $[-\pi,\pi[$ l'équation suivante : $2\cos 2x+\sqrt{3}=0$

3) Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ l'équation suivante : $2\sqrt{2}\sin x+2=0$

Solution :1) on a $4\tan x+4=0$ est définie dans $\mathbb{R}$ équivaut à : $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc $D=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}$

$4\tan x+4=0$ Équivaut à : $\tan x=-1$

Équivaut à : $\tan x=-\tan\frac{\pi}{4}$ c'est-à-dire : $\tan x=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) $2\cos 2x+\sqrt{3}=0$ Equivaut à : $\cos 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Équivaut à : $\cos 2x=-\cos\frac{\pi}{6}$ c'est-à-dire : $\cos 2x=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $2x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ ou $2x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi$ ou $x=-\frac{5\pi}{12}+k\pi$ avec: $k\in\mathbb{Z}$

- Encadrement de $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi$: $-\pi\leq\frac{5\pi}{12}+k\pi<\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Equivaut à : $-1\leq\frac{5}{12}+k<1$ cad $-1-\frac{5}{12}\leq k<1-\frac{5}{12}$ c'est-à-dire : $-\frac{17}{12}\leq k<\frac{7}{12}$

Par suite : $k=0$ ou $k=-1$

Si $k=0$ alors : $x=\frac{5\pi}{12}+0\pi=\frac{5\pi}{12}$

Si $k=-1$ alors : $x=\frac{5\pi}{12}-1\pi=\frac{-7\pi}{12}$

- Encadrement de $x=-\frac{5\pi}{12}+k\pi$: $-\pi\leq-\frac{5\pi}{12}+k\pi<\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Equivaut à : $-1\leq\frac{-5}{12}+k<1$ cad $-\frac{7}{12}\leq k<\frac{17}{12}$

Par suite : $k=0$ ou $k=1$

Si $k=0$ alors : $x=-\frac{5\pi}{12}+0\pi=-\frac{5\pi}{12}$

Si $k=1$ alors : $x=-\frac{5\pi}{12}+1\pi=\frac{7\pi}{12}$

Finalement : $S=\left\{-\frac{7\pi}{12};-\frac{5\pi}{12};\frac{5\pi}{12};\frac{7\pi}{12}\right\}$

3) $2\sqrt{2}\sin x+2=0$ Équivaut à : $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c'est-à-dire : $\sin x=-\sin\frac{\pi}{4}$

Équivaut à : $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

L'équation a pour solutions $-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ et $\pi-\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

- Encadrement de $-\frac{\pi}{4}+2k\pi$: $-\frac{\pi}{2}\leq-\frac{\pi}{4}+2k\pi\leq\frac{5\pi}{2}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-\frac{1}{2}\leq-\frac{1}{4}+2k\leq\frac{5}{2}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\leq 2k\leq\frac{5}{2}+\frac{1}{4}$

Donc $-\frac{1}{8}\leq k\leq\frac{11}{8}$ c'est-à-dire : $-0{,}12\leq k\leq 1{,}37$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ ou $k=1$

Pour $k=0$ on trouve $x_1=-\frac{\pi}{4}+2\times0\pi=-\frac{\pi}{4}$

Pour $k=1$ on trouve $x_2=-\frac{\pi}{4}+2\times1\pi=\frac{7\pi}{4}$

- Encadrement de $\frac{5\pi}{4}+2k\pi$: $-\frac{\pi}{2}\leq\frac{5\pi}{4}+2k\pi\leq\frac{5\pi}{2}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $-\frac{1}{2}\leq\frac{5}{4}+2k\leq\frac{5}{2}$ Donc $-\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\leq 2k\leq\frac{5}{2}-\frac{5}{4}$

Donc : $-\frac{7}{8}\leq k\leq\frac{5}{8}$ Donc $-0{,}8\leq k\leq 0{,}6$ et $k\in\mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $k=0$

Pour $k=0$ on trouve $x_3=\frac{5\pi}{4}+2\times0\pi=\frac{5\pi}{4}$ Donc $S=\left\{-\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right\}$

Exercice 10 : (***)**: 1)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : (E) : $2\sin^2 x-9\sin x-5=0$

2) En déduire les solutions de l'équation (E) dans $[0\,;2\pi]$

Solution :1) On pose $t=\sin x$ et l'équation $2\sin^2 x-9\sin x-5\leq 0$ devient : $2t^2-9t-5=0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2-9t-5$:

Calcul du discriminant :

Δ = (-9) ^{2} – 4 x 2 x (-5) = 121

Les racines sont : $t_1=\frac{9-\sqrt{121}}{2\times 2}=-\frac{1}{2}$ et $t_2=\frac{9+\sqrt{121}}{2\times 2}=5$

Donc $\sin x=-\frac{1}{2}$ et $\sin x=5$

Or on sait que $-1\leq \sin x\leq 1$ donc l'équation $\sin x=5$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$\sin x=-\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Donc : $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{7\pi}{6}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

2)Encadrement de $-\frac{\pi}{6}+2k\pi$: $0\leq -\frac{\pi}{6}+2k\pi\leq 2\pi$

Équivaut à : $\frac{1}{12}\leq k\leq \frac{13}{12}$

C'est-à-dire : $0,08\leq k\leq 1,02$ et $k\in\mathbb{Z}$ par suite : $k=1$

Pour $k=1$ on remplace on trouve $x_1=-\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{11\pi}{6}$

• Encadrement de $\frac{7\pi}{6}+2k\pi$: $0\leq \frac{7\pi}{6}+2k\pi\leq 2\pi$ Donc $0\leq \frac{7}{6}+2k\leq 2$ c'est-à-dire : $-\frac{7}{12}\leq k\leq \frac{5}{12}$

Donc $-0,5\leq k\leq 0,41$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ on remplace on trouve : $x_2=\frac{7\pi}{6}$

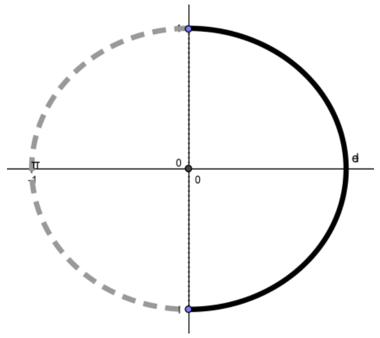
Donc $S_{[0\,;2\pi]}=\left\{\frac{11\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right\}$

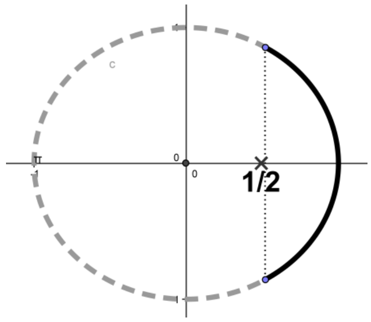
Exercice 11 : (*) (**) Représenter sur un cercle trigonométrique l'ensemble des points du cercle associés aux réels x vérifiant :

1) $0\leq\cos(x)\leq 1$ 2) $\cos(x)\in\left[\frac{1}{2};1\right]$ 3) $-1<\sin(x)<0$

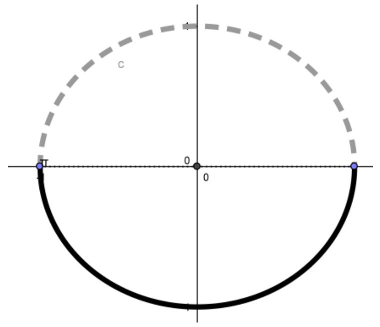
4) $-\frac{1}{2}\leq\sin(x)\leq 1$ 5) $\sin(x)\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right[$ 6) $\cos(x)\in\left[-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

Solution :1) $0\leq\cos(x)\leq 1$ 2) $\cos(x)\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

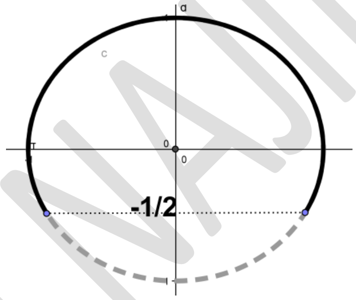




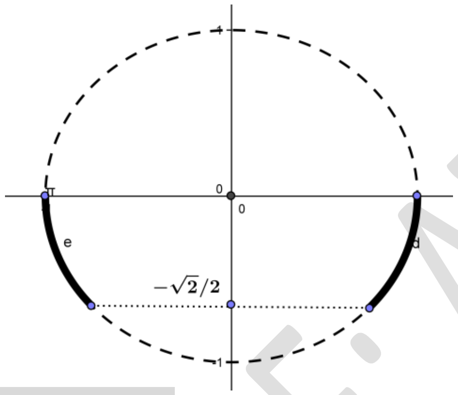
3) $-1<\sin(x)<0$



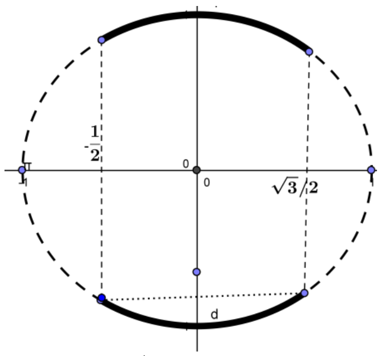
4) $-\frac{1}{2}\leq\sin(x)\leq 1$



5) $\sin(x)\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right[$



6) $\cos(x)\in\left[-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$



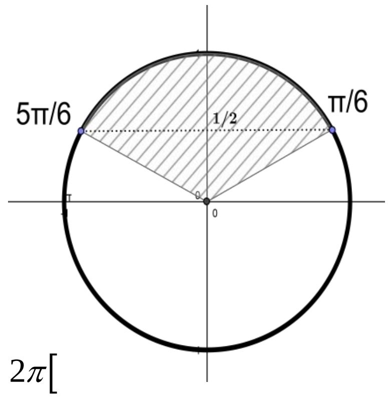
Exercice12 : (**) Résoudre dans $[0\,;\,2\pi[$ l'inéquation suivante : $\sin x\geq\frac{1}{2}$

Solution : $\sin x=\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x=\sin\frac{\pi}{6}$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Et puisque : $x\in[0;2\pi]$ alors : $x=\frac{\pi}{6}$ ou $x=\frac{5\pi}{6}$

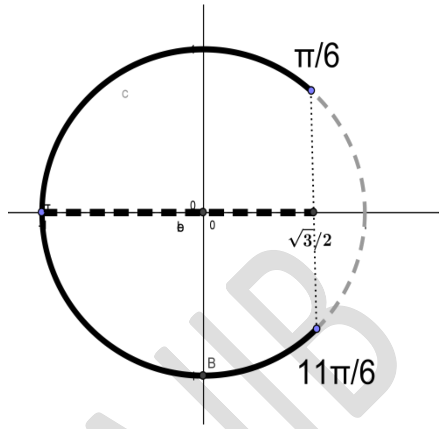


En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\sin x$ et $\frac{1}{2}$ dans $[0\,;\,2\pi[$

On trouve que : $\sin x\geq\frac{1}{2}$ Équivaut à : $x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$ Donc : $S=\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$

Exercice13: (**) Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation suivante : $\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$



Équivaut à : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in [0;2\pi]$ alors : $x = \frac{11\pi}{6}$ et $x = \frac{\pi}{6}$ (on utilisant les encadrements)

$\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos x < \cos\frac{\pi}{6}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\cos x$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[0;2\pi]$

On trouve que : $S = \left]\frac{\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right[$

Exercice14 : (**) Résoudre dans $]-\pi,\pi]$ les inéquations suivantes : 1) $\cos x \leq 0$ 2) $\sin x \geq 0$

Solution : On utilise le cercle trigonométrique :

1) $S = \left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ 2) $S = [0;\pi]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien