

Correction Série N°10 : FONCTIONS - Généralités

Exercice 1 : (**) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = 2x^2 - 4x - 2$

(C_f) Sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) Déterminer D_f

2) Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = a(x + \alpha)^2 + \beta$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (déterminer $a; \alpha$ et β)

3) En déduire la nature de (C_f) et ses éléments caractéristiques

4) Déterminer le Tableau de variations de f

5) Tracer la courbe représentative (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Solution :1) On a : f est une fonction polynôme donc : $D_f = \mathbb{R}$

2) Méthode1 : $f(x) = 2x^2 - 4x - 2 = 2(x^2 - 2x) - 2 = 2((x-1)^2 - 1) - 2 = 2(x-1)^2 - 2 - 2 = 2(x-1)^2 - 4$

Donc : $f(x) = 2x^2 + 4x - 2 = 2(x-1)^2 - 4$

Donc $\alpha = -1$ et $\beta = -4$ et $a = 2$

Méthode2 : ($f(x) = ax^2 + bx + c$) On a : $a = 1$ et $b = -4$ et $c = -2$

Donc $\alpha = \frac{b}{2a} = \frac{-4}{2 \times 2} = -1$ et $\beta = f(-\alpha) = f(-1) = 2(-1)^2 + 4 \times (-1) - 2 = -4$

Donc : $f(x) = a(x + \alpha)^2 + \beta = 2(x-1)^2 - 4$

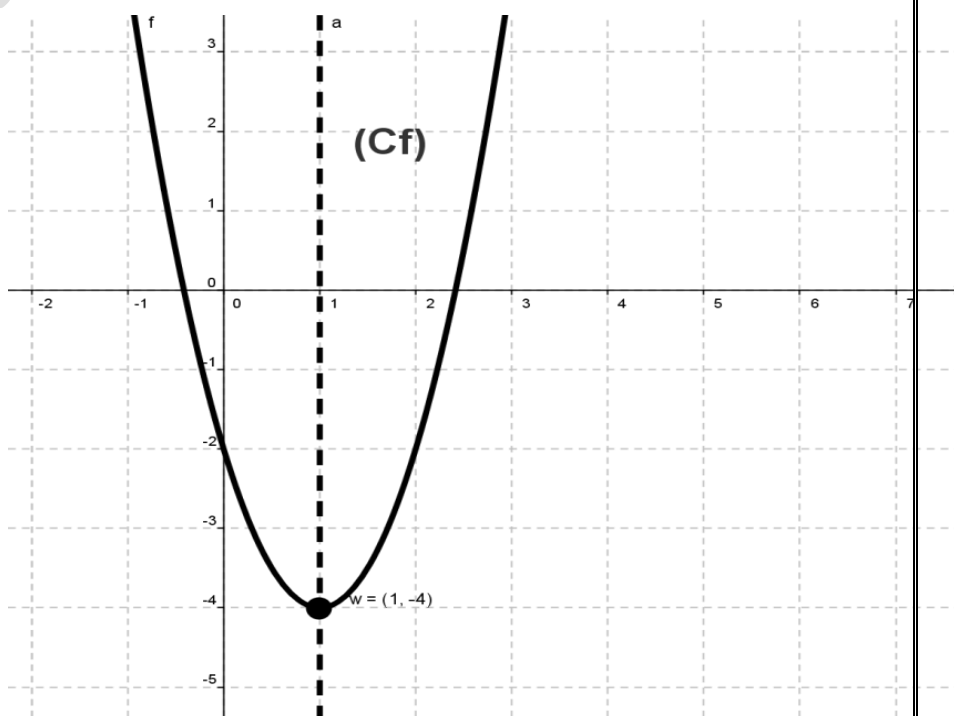
3) la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha; \beta)$; $W(1; -4)$ et d'axe de symétrie la droite $x = -\alpha$. C'est-à-dire : $x = -1$

4) Tableau de variations de f : On a $a = 2 > 0$ donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘		↗
		-4	

5)

x	1	2	3	4
$f(x)$	-4	-2	4	14



Exercice 2 : (**) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = 2x^2 - 4x + 7$

Et (C_f) sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) Déterminer D_f
- 2) Ecrire $f(x)$ sous la forme canonique : $f(x) = a(x + \alpha)^2 + \beta$ (déterminer $a; \alpha$ et β)
- 3) En déduire la nature de (C_f) et ses éléments caractéristiques
- 4) Déterminer le Tableau de variations de f
- 5) Tracer la courbe représentative (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Solution :1) On a f est une fonction polynôme donc : $D_f = \mathbb{R}$

2) Méthode1 : $f(x) = 2x^2 - 4x + 7 = 2(x^2 - 2x) + 7 = 2((x-1)^2 - 1) + 7 = 2(x-1)^2 - 2 + 7 = 2(x-1)^2 + 5$

Donc : $f(x) = 2x^2 - 4x + 7 = 2(x-1)^2 + 5$

Donc $\alpha = -1$ et $\beta = 5$ et $a = 2$

Méthode2 : On a : $a = 2$ et $b = -4$ et $c = 7$ ($f(x) = ax^2 + bx + c$)

Donc : $\alpha = \frac{b}{2a} = \frac{-4}{2 \times 2} = -1$ et $\beta = f(-\alpha) = f(1) = 2(1)^2 - 4 \times (1) + 7 = 5$

Donc : $f(x) = a(x + \alpha)^2 + \beta = 2(x-1)^2 + 5$

3) la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha; \beta)$; $W(1; 5)$ et d'axe de symétrie la droite $x = -\alpha$. C'est-à-dire : $x = 1$

4) $f(x) = a(x + \alpha)^2 + \beta = 2(x-1)^2 + 5$

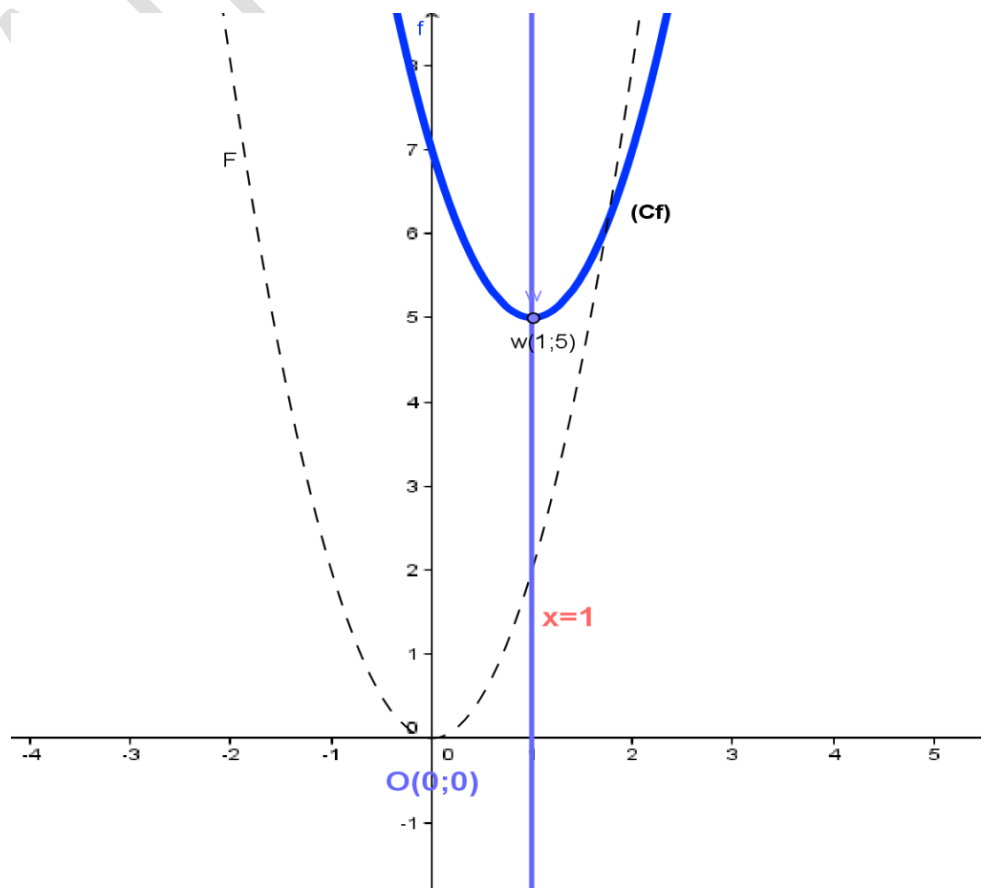
Ainsi : dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(1; 5)$ et d'axe de symétrie la droite $x = 1$

Tableau de variations de f : On a $a = 2 > 0$

Donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$			

2) Nous déduisons la courbe (C_f) à partir de la courbe (C_F) de la fonction définie par : $F(x) = 2x^2$ par translation de vecteur : $\vec{u}(1; 5)$ ($f(1) = 5$ est le minimum de f sur \mathbb{R})



Exercice 3 : (**) Soit g une fonction numérique tel que : $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ et (C_g) sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) Déterminer D_g
- 2) Déterminer α et β tel que : $g(x) = -\frac{1}{2}(x+\alpha)^2 + \beta$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- 3) En déduire la nature de (C_g) et ses éléments caractéristiques
- 4) Déterminer le Tableau de variations de g
- 5) Tracer la courbe représentative (C_g) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Solution : 1) Soit g une fonction numérique tel que : $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$

On a g est une fonction polynôme donc $D_g = \mathbb{R}$

2) Méthode1 :

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x) + 1 = -\frac{1}{2}((x-2)^2 - 4) + 1 = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2 + 1 = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$$

Donc : $g(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$

Donc $\alpha = -2$ et $\beta = 3$ et $a = 2$

Méthode2 : $(g(x) = ax^2 + bx + c)$ On a : $a = 1$ et $b = -4$ et $c = -2$

Donc : $\alpha = \frac{b}{2a} = \frac{-4}{2 \times 1} = -2$ et $\beta = g(-\alpha) = g(2) = -\frac{1}{2}2^2 + 2 \times 2 + 1 = 3$

Donc : $g(x) = a(x+\alpha)^2 + \beta = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$

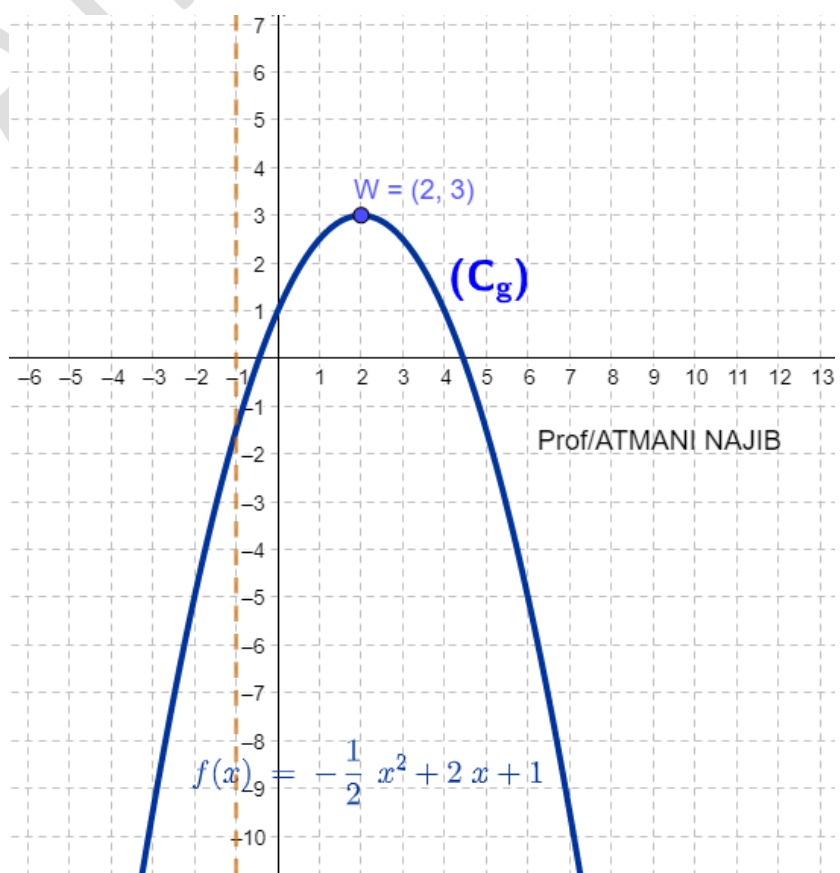
- 3) Donc dans le repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$ courbe (C_g) c'est une parabole sommet $W(-\alpha; \beta)$ c'est à dire $W(2; 3)$ et d'axe de symétrie la droite $x = -\alpha$. C'est-à-dire : $x = 2$
- 4) Tableau de variations de g

On a $a = -\frac{1}{2} < 0$ donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x)$		↙ 3 ↘	

5)

x	2	3	4	5
$g(x)$	3	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$



la
de

Exercice 4 : (**) Soient f et g les deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 2x + 2$ et $g(x) = \frac{x}{x-1}$

1) Déterminer D_f et D_g

2) a) Ecrire $f(x)$ sous la forme canonique : $f(x) = a(x + \alpha)^2 + \beta$ (déterminer a , α et β)

b) En déduire la nature de (C_f) et ses éléments caractéristiques

3) Donner la nature de (C_g) et ses éléments caractéristiques

4) Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

5) Soit h la fonction définie par : $h(x) = x^2 - 2x + 2 + \frac{x}{1-x}$

Etudier graphiquement le signe de : $h(x)$.

Solution : 1) a) $f(x) = x^2 - 2x + 2$

On a f est une fonction polynôme donc : $D_f = \mathbb{R}$

b) a) On a $f(x) \in \mathbb{R}$ signifie que : $x-1 \neq 0$ c'est-à-dire : $x \neq 1$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

2)a) On a : $f(x) = x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1$

Donc : $f(x) = 1(x-1)^2 + 1$:

b) On a : $f(x) = a(x-1)^2 + 1$ donc : $\alpha = -1$ et $\beta = 1$ car : $f(x) = a(x + \alpha)^2 + \beta$

Ainsi : dans le repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet : $W(-\alpha; \beta)$

C'est-à-dire : $W(1; 1)$ et d'axe de symétrie la droite $x = 1$

3) Méthode : (on utilisant le résumé de notre cours)

Si : $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ et $c \neq 0$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les

droites d'équations : $x = -\frac{d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$

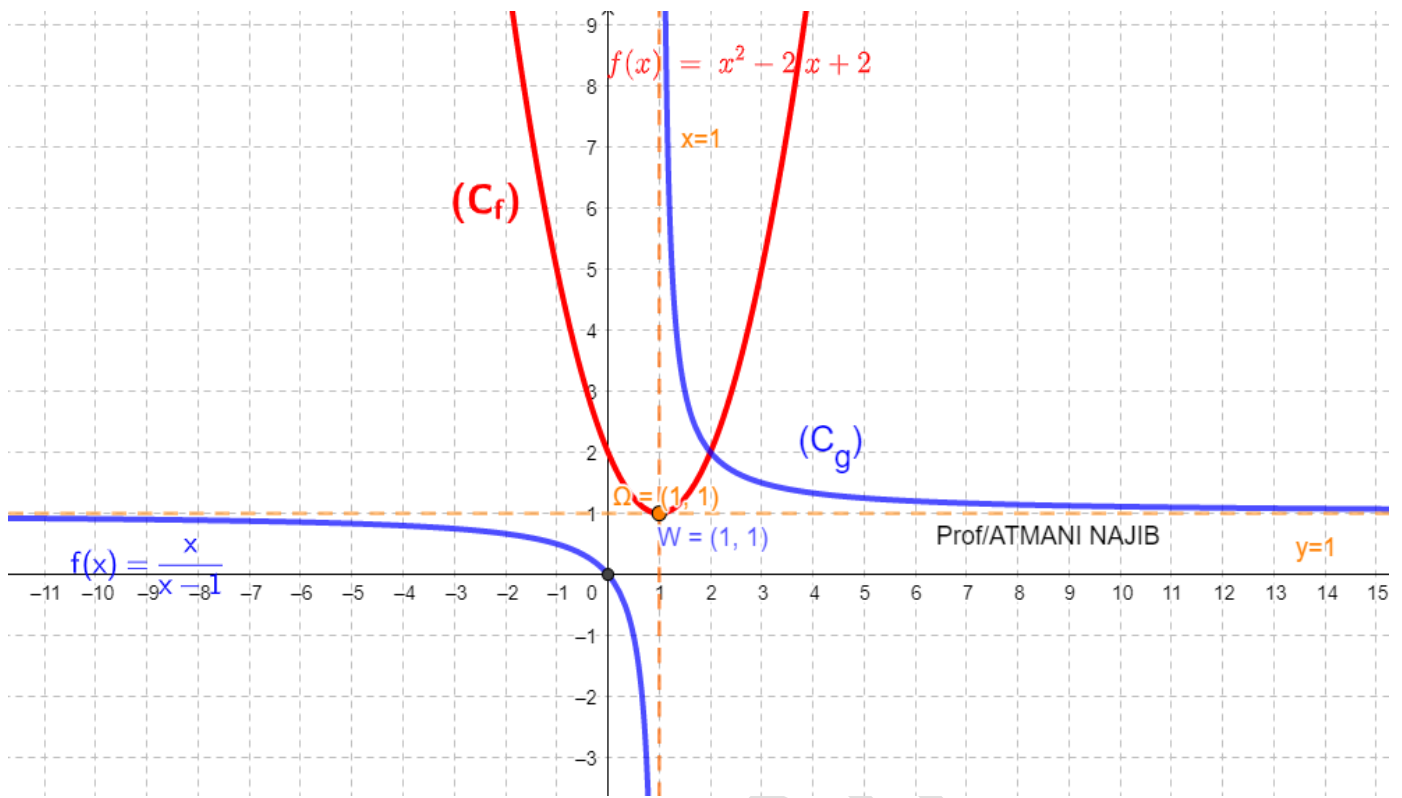
Dans notre exercice on a : $g(x) = \frac{x}{x-1}$ donc (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega\left(\frac{1}{1}; \frac{1}{1}\right)$ et

d'asymptotes les droites d'équations : $x = \frac{1}{1} = 1$ et $y = \frac{1}{1} = 1$

4) Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) sont données dans le repère ci-dessous

x	1	2	3	4
g(x)		2	3/2	4/3

x	1	2	3
f(x)	1	2	5



2) Etudions graphiquement le signe de $h(x) = x^2 - 2x + 2 + \frac{x}{1-x}$

On a : $h(x) = x^2 - 2x + 2 + \frac{x}{1-x} = x^2 - 2x + 2 - \frac{x}{x-1}$

Donc : $h(x) = f(x) - g(x)$

$h(x) \geq 0$ Equivaut à : $f(x) - g(x) \geq 0$

Equivaut à : $f(x) \geq g(x)$

Equivaut à : x appartient à l'intervalle où (C_f) est au-dessus de (C_g) alors

Si : $x \in]-\infty; 1[\cup [2; +\infty[$ alors : $f(x) \geq g(x)$ et donc : $h(x) = f(x) - g(x) \geq 0$

Si : $x \in]1; 2]$ alors : $f(x) \leq g(x)$ et donc : $h(x) = f(x) - g(x) \leq 0$

On résume les résultats dans un tableau de signe :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$h(x)$	+	-	0	+

Exercice 5 : (**) Soient f et g les trois fonctions définies par : $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

(C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1) Déterminer D_g et étudier les variations de g

2) Etudier les variations de f

3) Trouver le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

4) a) Vérifier que : (C_f) et (C_g) se coupent en : $A(2;5)$

b) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

5) a) Etudier graphiquement le signe de la fonction g

b) Etudier algébriquement le signe de la fonction g

6) a) Résoudre graphiquement de l'équation $f(x) = g(x)$:

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$

Solution : 1) $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$;

On a : $g(x) \in \mathbb{R}$ signifie : $x-1 \neq 0$ équivaut à : $x \neq 1$

Donc $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

Si $x \in \mathbb{R} - \{1\}$: la division euclidienne de : $2x+1$ par $x-1$ donne :

$$\begin{array}{r|l} 2x+1 & x-1 \\ -2x+2 & \\ \hline & 3 \end{array}$$

$$g(x) = \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2(x-1)+3}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{3}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$$

Puisque : $g(x) = \beta + \frac{k}{x+\alpha}$ Alors : $\alpha = -1$ et $\beta = 2$ et $k = 3 > 0$

On a : $g(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$ avec : $\alpha = -1$ et $\beta = 2$ et $k = 3 > 0$

Donc : (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(-\alpha; \beta)$; $\Omega(1; 2)$ et d'asymptotes les droites

d'équations respectives : $x = 1$ et $y = 2$

$k = 3 > 0$

Le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g	\searrow		\searrow

Méthode 2 : $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 < 0$: g est strictement décroissante sur les intervalles :

$]1 ; +\infty[$ et $]-\infty ; 1[$

2) On a f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

On utilisant un résumé de notre cours :

Rappelle : $f(x) = a(x+\alpha)^2 + \beta$ (forme canonique)

Dans un repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha; \beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x = -\alpha$

Dans notre exercice on a : $f(x) = x^2 + 1 = 1(x-0)^2 + 1$ (la forme canonique) : $\alpha = 0$ et $\beta = 1$

Dans un repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha; \beta)$ c'est-à-dire : $W(0;1)$ et d'axe de symétrie la droite : $x = -\alpha = 0$

Le tableau de variations de f :

Dans notre exercice on a : $-\alpha = 0$ et $\beta = 1$ et $a = 1 > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

3) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

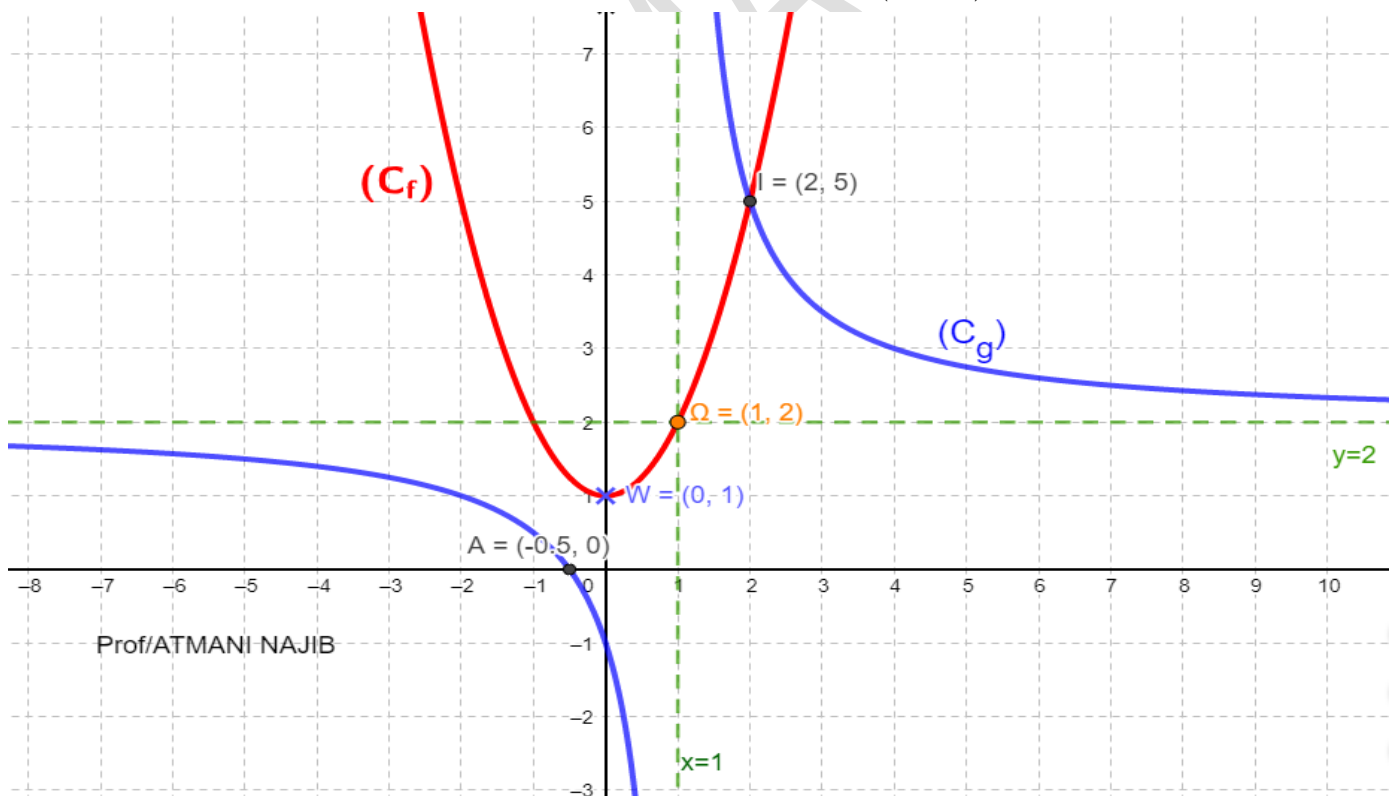
Le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses est : $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

4) a) Vérifier que : (C_f) et (C_g) se coupent en : $A(2; 5)$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 5 \text{ donc : } A(2; 5) \in (C_f) \text{ et } g(2) = \frac{2 \times 2 + 1}{2 - 1} = 5 \text{ donc : } A(2; 5) \in (C_g)$$

$$\text{Donc : } (C_f) \cap (C_g) = \{A(2; 5)\}$$

b) Traçage des courbes (C_f) et (C_g) dans un même repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$



5) a) Etude graphique du signe de la fonction g sur $\mathbb{R} - \{1\}$

$g(x) \geq 0$ si et seulement si la courbe (C_g) est au-dessus de l'axe des abscisses

$$g(x) \geq 0 \text{ Signifie que } x \in \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right] \cup]1; +\infty[\text{ et } g(x) \leq 0 \text{ Signifie que } x \in \left[-\frac{1}{2}; 1 \right[$$

b) Etudions algébriquement le signe de la fonction g sur $\mathbb{R} - \{1\}$

Voici le tableau de signe qui résume le signe de g sur $\mathbb{R} - \{1\}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	0	+
$2x+1$	-	0	+	+
$\frac{2x+1}{x-1}$	+	0	-	+

6) a) Résolution graphique de l'équation $f(x) = g(x)$:

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a : (C_f) et (C_g) se coupent en : $A(2 ; 5)$

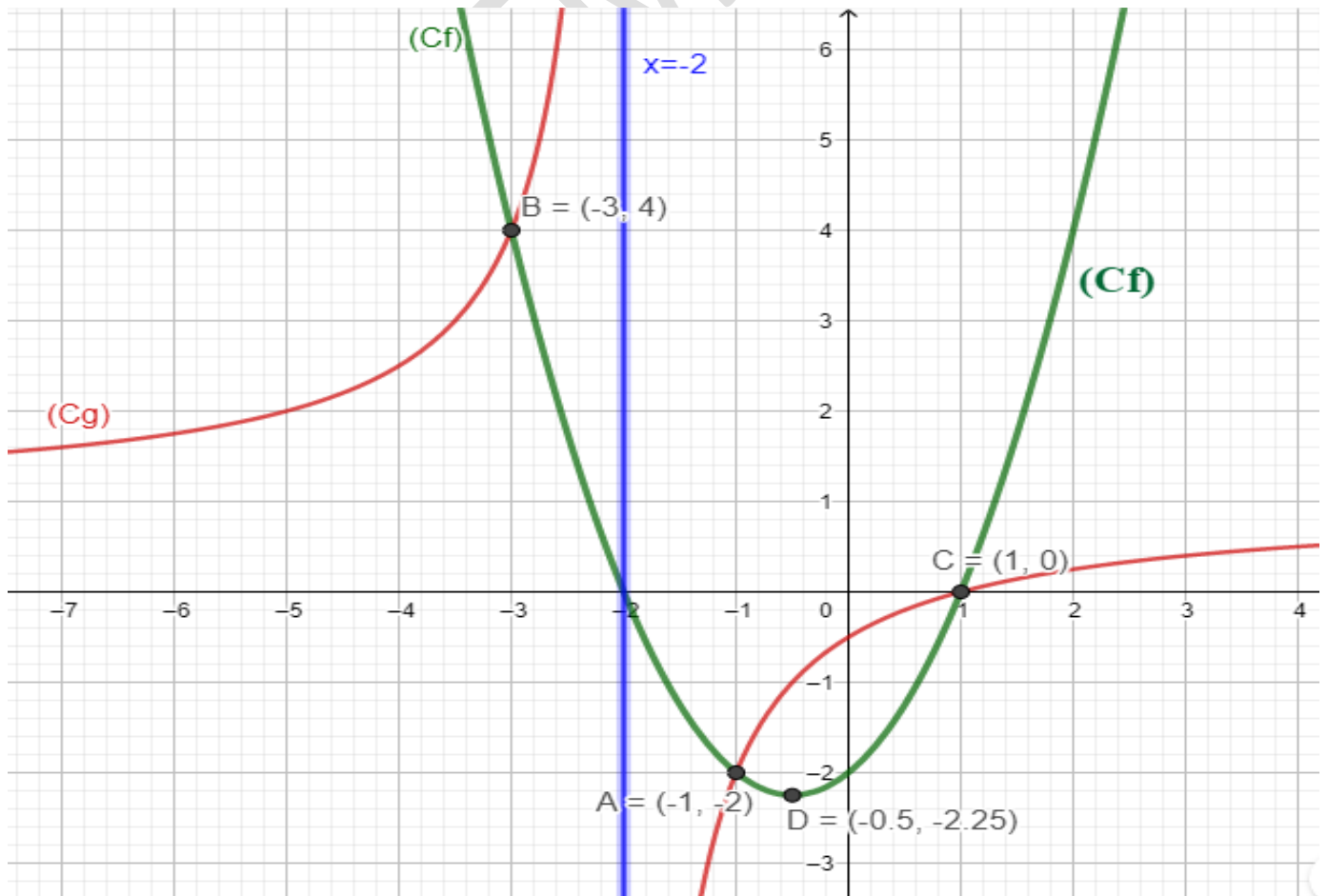
Donc : l'abscisse du point d'intersection des courbes (C_f) et (C_g) est $x=2$ par suite : $S = \{2\}$

7) b) Résolution graphique de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$:

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x \in]-\infty; 1[\cup [2; +\infty[$

Donc $S =]-\infty; 1[\cup [2; +\infty[$

Exercice 6 : (**) Soient f et g deux fonctions définies par Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) si dessous :



1) Déterminer D_f et D_g

2) On pose : $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $g(x) = \frac{x+\alpha}{x+2}$

Graphiquement :

a) Déterminer les points d'intersections de (C_f) et (C_g)

b) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$

c) Résoudre l'inéquation $f(x) > g(x)$

d) Déterminer les variations de f et g

3) Montrer que : $f(x) = x^2 + x - 2$ et $g(x) = \frac{x-1}{x+2}$

Solution : 1) a) $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R} - \{-2\} =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$

2) a) Graphiquement les points d'intersections de (C_f) et (C_g) sont : $A(1;0); B(-1;-2); B(-3;4)$

2) b) Pour déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc : $x=1$ et $x=-1$ et $x=-3$ par suite : $S = \{-3; -1; 1\}$

c) Résolution graphique de l'inéquation $f(x) > g(x)$:

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x \in]-\infty; -3[\cup]-2; -1[\cup]1; +\infty[$

Donc : $S =]-\infty; -3[\cup]-2; -1[\cup]1; +\infty[$

d) Déterminons les variations de f et g :

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
$f(x)$		\searrow	\nearrow
		$-9/4$	

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g(x)$		\nearrow	\nearrow

3)a) Montrons que : $f(x) = x^2 + x - 2$

Puisque : $f(0) = -2$ alors : $c = -2$

Puisque : $f(1) = 0$ et $f(-2) = 0$ alors : $\begin{cases} a+b-c=0 \\ 4a-2b-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ 4a-2b=2 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1$

D'où : $f(x) = x^2 + x - 2$

b) Montrons que : $g(x) = \frac{x-1}{x+2}$

On a : $g(x) = \frac{x+\alpha}{x+2}$ et puisque : $g(1) = 0$ alors : $\frac{1+\alpha}{3} = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$

D'où : $g(x) = \frac{x-1}{x+2}$

Exercice 7 : (***)(****) Soit f_m la fonction tel que : $f_m(x) = \frac{(m-1)x+1}{mx-1}$ avec : $m \in \mathbb{R}^*$ (paramètre)

Et (C_{f_m}) sa courbe représentative.

- 1) Déterminer D_{f_m}
- 2) Montrer que : tous les courbes représentatives (C_{f_m}) passent par le point : $A(0;-1)$
- 3) Donner le tableau de variation de f_m en discutant les cas suivant le paramètre $m \in \mathbb{R}^*$
- 4) Tracer les courbes (C_{f_1}) et $(C_{f_{-1}})$ dans un même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 5) Soit g une fonction tel que : $g(x) = \frac{|x|+1}{2|x|-1}$
 - a) Déterminer D_g b) Montrer que : g est paire
 - b) Vérifier que : $g(x) = f_2(x)$ Pour tout $x \in [0; +\infty[- \left\{ \frac{1}{2} \right\}$
 - c) Tracer la courbe (C_g) dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Solution : $f_m(x) = \frac{(m-1)x+1}{mx-1}$

1) Détermination de : $D_{f_m} = \{x \in \mathbb{R} / mx-1 \neq 0\}$

On a : $mx-1=0$ signifie que : $x = \frac{1}{m}$ car $m \in \mathbb{R}^*$

Donc $D_{f_m} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{m} \right\}$

2) Montrons que : tous les courbes représentatives (C_{f_m}) passent par le point : $A(0;-1)$

On a : $f_m(0) = \frac{(m-1) \times 0 + 1}{m \times 0 - 1} = -1$ par suite : les courbes représentatives (C_{f_m}) passent par le point : $A(0;-1)$; $\forall m \in \mathbb{R}^*$

3) Le tableau de variation de f_m suivant le paramètre $m \in \mathbb{R}^*$

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} m-1 & 1 \\ m & -1 \end{vmatrix} = -m+1-m = -2m+1$$

Si : $\Delta_m = -2m+1 > 0$ c'est à dire : $m \in]-\infty; 0[\cup]0; \frac{1}{2}[$ alors : f_m est strictement croissante

x	$-\infty$	$1/m$	$+\infty$
$f_m(x)$	↗		↗

Si : $\Delta_m = -2m+1 < 0$ c'est à dire : $m \in]\frac{1}{2}; +\infty[$ alors : f_m est strictement décroissante

x	$-\infty$	$1/m$	$+\infty$
$f_m(x)$	↘		↘

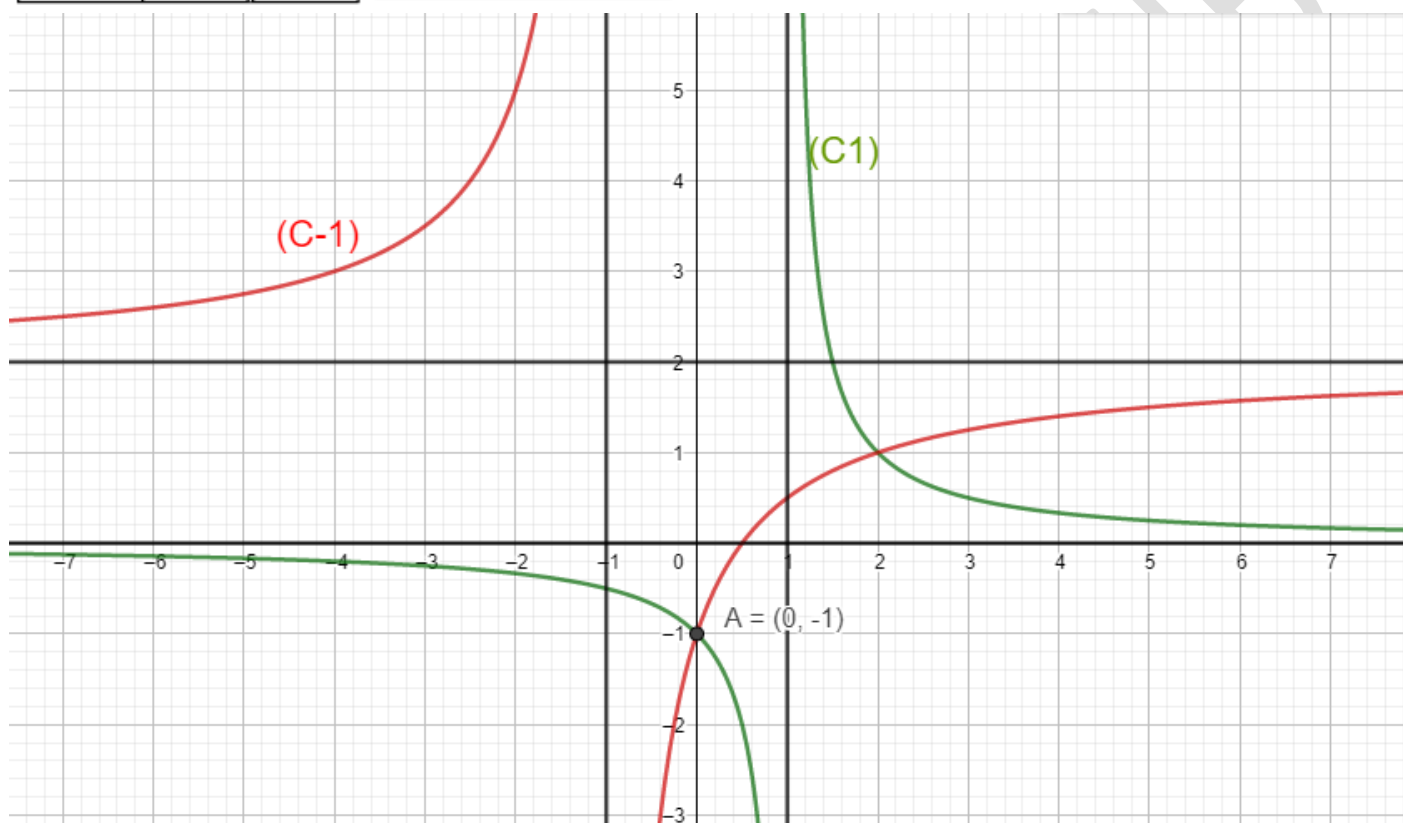
Si : $\Delta_m = -2m + 1 = 0$ c'est à dire : $m = \frac{1}{2}$ alors $f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}-1\right) \times 0 + 1}{\frac{1}{2} \times 0 - 1} = -1$

Alors : f_m est constante

3) Les courbes (C_{f_1}) et $(C_{f_{-1}})$ dans un même repère : $f_1(x) = \frac{1}{x-1}$ et $f_{-1}(x) = \frac{-2x+1}{-x-1} = \frac{2x-1}{x+1}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f_{-1}(x)$	\nearrow		\nearrow

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f_1(x)$	\searrow		\searrow



5) Soit g une fonction tel que : $g(x) = \frac{|x|+1}{2|x|-1}$

a) Détermination de : D_g

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / 2|x|-1 \neq 0\}$$

$$2|x|-1 = 0 \Leftrightarrow |x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc : } D_g = \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[\cup \left] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$$

b) Montrons que : g est paire

$$\bullet \forall x \in \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[\cup \left] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[\Rightarrow -x \in \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[\cup \left] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$$

$$\bullet g(-x) = \frac{|-x|+1}{2|-x|-1} = \frac{|x|+1}{2|x|-1} = g(x)$$

b) Vérifions que : $g(x) = f_2(x)$ Pour tout $x \in [0; +\infty[- \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

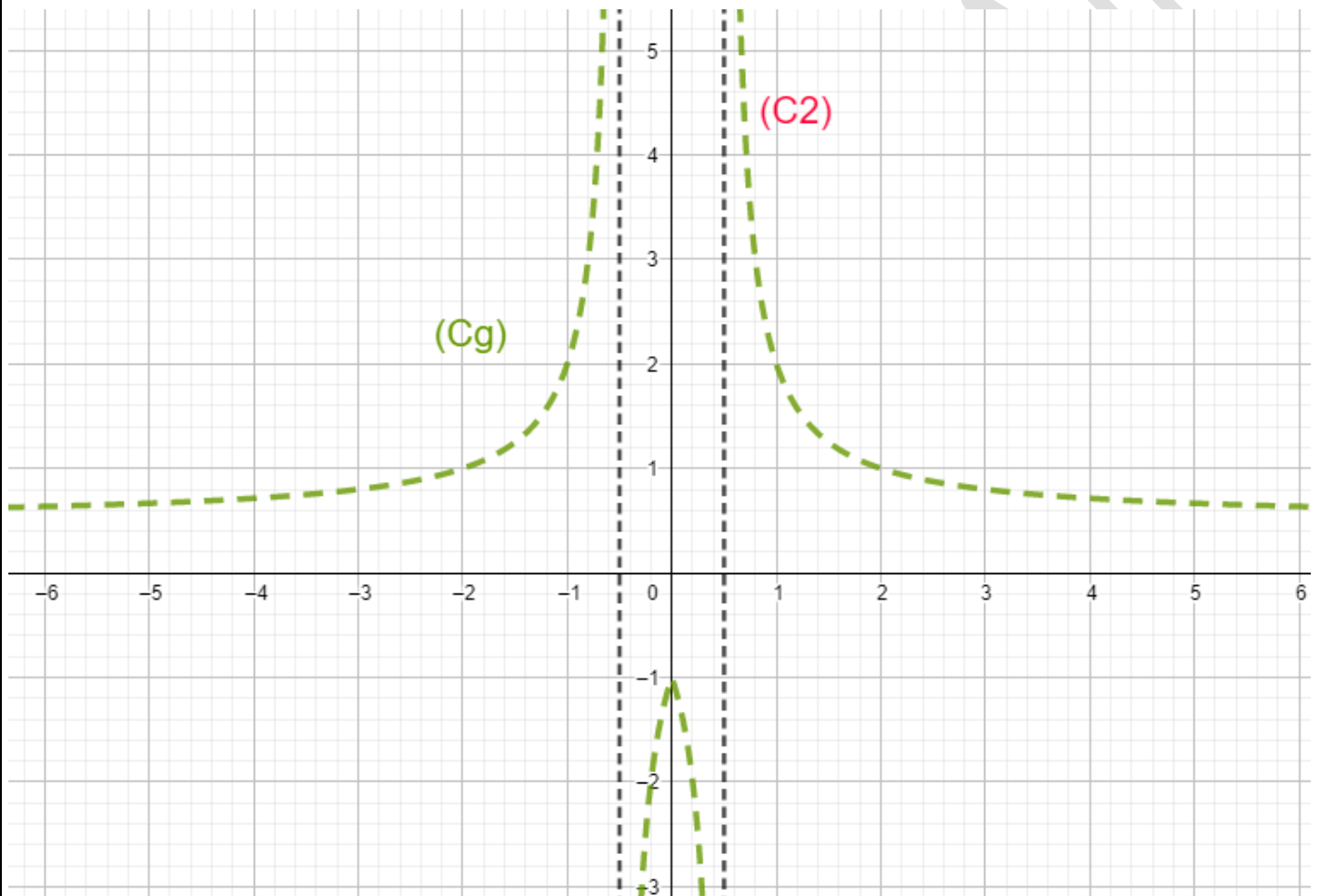
Si : $x \in [0; +\infty[- \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ alors : $|x| = x$

$$g(x) = \frac{x+1}{2x-1} \text{ et } f_2(x) = \frac{(2-1)x+1}{2x-1} = \frac{x+1}{2x-1}$$

Donc : $g(x) = f_2(x)$ sur $[0; +\infty[- \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

c) Traçage de la courbe (C_g) dans un repère $(o; \vec{i}; \vec{j})$

$$\text{On a : } f_2(x) = \frac{x+1}{2x-1}$$



C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

