Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°2 : FONCTIONS - *Généralités*

Exercice 1 : (*) (**) Soit la fonction numérique f définie par : $f(x)=\frac{1}{|x|+1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
2) Calculer les images de : 0 ; 1 ; -1 et -2 par f.
2) Les nombres : 0 ; $\frac{1}{2}$; 1 et 2 ont-ils des antécédents par f ? si oui, trouver ces antécédents
3) Montrer que 1 est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

Solution : 1)

$D_f=\{x\in E / f(x)\in\mathbb{R}\}$

$D_f=\{x\in E / |x|+1\neq 0\}$

$|x|+1=0$ Signifie $|x|=-1$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : $|x|+1$ ne s'annule jamais

Par suite : $D_f=\mathbb{R}$

2) Calculons les images de : 0 ; 1 ; -1 et -2 par f.

- $f(0)=\frac{1}{|0|+1}=\frac{1}{0+1}=\frac{1}{1}=1$

Donc : l'image de 0 par f est : 1

- $f(1)=\frac{1}{|1|+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

Donc : l'image de 1 par f est : $\frac{1}{2}$

- $f(-1)=\frac{1}{|-1|+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

Donc : l'image de -1 par f est : $\frac{1}{2}$

Remarque : 1 et -1 ont les mêmes images par f car : $f(-1)=f(1)=\frac{1}{2}$

- $f(-2)=\frac{1}{|-2|+1}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$

Donc : l'image de -2 par f est : $\frac{1}{3}$

2) a) Déterminons les antécédents de : 0 par f s'ils existent :

x est l'antécédents de 0 par f signifie que 0 est l'image de x par f

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=0$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$

$f(x)=0$ Signifie que : $\frac{1}{|x|+1}=0$

Signifie que : $1=0$ (impossible)

Par suite : 0 n'admet pas d'antécédents par f

b) Déterminons les antécédents de : $\frac{1}{2}$ par f s'ils existent :

x Est l'antécédents de $\frac{1}{2}$ par f signifie que $\frac{1}{2}$ est l'image de x par f

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=\frac{1}{2}$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$

$f(x)=\frac{1}{2}$ Signifie que : $\frac{1}{|x|+1}=\frac{1}{2}$

Signifie que : $|x|+1=2$

Signifie que : $|x|=1$

Signifie que : $x=1$ ou $x=-1$

Par suite : les antécédents de $\frac{1}{2}$ par f sont :1 et -1.

c) Déterminons les antécédents de : 1 par f s'ils existent :
x Est l'antécédents de 1 par f signifie que 1 est l'image de x par f

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=1$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=1$

$f(x)=1$ Signifie que : $\frac{1}{|x|+1}=1$

Signifie que : $|x|+1=1$

Signifie que : $|x|=0$

Signifie que : $x=0$
Par suite :1 admet un unique antécédent par f c'est : 0
d) Déterminons les antécédents de : 2 par f s'ils existent :
x est l'antécédents de 2 par f signifie que 2 est l'image de x par f
Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=2$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=1$

$f(x)=2$ Signifie que : $\frac{1}{|x|+1}=2$ Signifie que : $|x|+1=\frac{1}{2}$

Signifie que : $|x|=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$ (impossible)

Par suite : 2 n'admet pas d'antécédents par f
3) Montrons que 1 est un maximum de f sur $\mathbb{R}$
On a déjà vu que : $f(0)=1$

Il suffit de montrer que : $f(x)\leq f(0)$ pour tout réel x

Soit $x\in\mathbb{R}$: On a : $|x|\geq 0$ donc : $|x|+1\geq 1$ donc : $\frac{1}{|x|+1}\leq 1$

Donc : $f(x)\leq f(0)$ pour tout réel x

Par suite : $f(0)=1$ est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

Exercice2 : (*) et (**) : Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x)=3x^2-x+1$.
2) $f(x)=\dfrac{x^3}{2x-4}$.
3) $f(x)=\dfrac{2x^4}{x^2-4}$.
4) $f(x)=\dfrac{7x-1}{x^3-2x}$.
5) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$.
6) $f(x)=\dfrac{x-5}{2x^2-5x-3}$.
7) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$.
8) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-3x+9}{x+1}}$.
9) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$.
10) $f(x)=\dfrac{x}{|2x-4|-|x-1|}$
11) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-x}$
12) $f(x)=\sqrt{3-|-x+1|}$
13) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-8}{x^6-7x^3-8}$
14) $f(x)=\dfrac{2\cos x}{2\sin x+1}$

Solution :

Remarque : Soit f une fonction réelle de la variable réelle de E dans F

L'ensemble de définition de la fonction f se note D_f et on a :

$D_f=\{x\in E\,/\,f(x)\,est\ calculable\}$ Ou $D_f=\{x\in E\,/\,f(x)\in F\}$ ou encore $D_f=\{x\in E\,/\,f(x)\in\mathbb{R}\}$

1) $f(x)=3x^2-x+1$ $\quad f$ est une fonction polynôme donc un réel a toujours une image.

Donc $D_f=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\dfrac{x^3}{2x-4}$. Pour les fonctions du type fractions rationnelles, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels le dénominateur est non nul.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,2x-4\neq 0\}$

$2x-4=0$ Signifie $x=\dfrac{4}{2}=2$ Donc $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

On dira aussi que 2 est une valeur interdite pour la fonction f

3) $f(x)=\dfrac{2x^4}{x^2-4}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2-4\neq 0\}$

$x^2-4=0$ Signifie $x^2-2^2=0$ c'est-à-dire : $(x-2)(x+2)=0$

Signifie $x-2=0$ ou $x+2=0$ signifie $x=2$ ou $x=-2$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

4) $f(x)=\dfrac{7x-1}{x^3-2x}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^3-2x\neq 0\}$

$x^3-2x=0$ Signifie $x(x^2-2)=0$ Équivaut à: $x=0$ ou $x^2-2=0$ c'est-à-dire : $x=0$ ou $x^2=2$

Signifie $x=0$ ou $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{-\sqrt{2};0;\sqrt{2}\}$

5) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$.

Pour les fonctions du type racine carrée, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels l'intérieur de la racine est positif : $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,-3x+6\geq 0\}$

$-3x+6\geq 0$ Signifie $-3x\geq -6$ donc $x\leq\dfrac{-6}{-3}$ par suite : $x\leq 2$

Donc $D_f=]-\infty;2]$

6) $f(x)=\dfrac{x-5}{2x^2-5x-3}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-5x-3\neq0\}$

$2x^2-5x-3=0$ $a=2$ et $b=-5$ et $c=-3$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times(-3)=25+24=49=(7)^2>0$

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\times2}=\dfrac{7+5}{4}=\dfrac{12}{4}=3$ et $x_2=\dfrac{(-5)-\sqrt{49}}{2\times2}=\dfrac{5-7}{4}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2};3\right\}$

7) $f(x)=\sqrt{2x^2-3x+1}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-3x+1\geq0\}$

Soit Δ son discriminant : $a=2$ $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times1=9-8=1>0$

$x_1=\dfrac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times2}=\dfrac{4}{4}=1$ et $x_2=\dfrac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $D_f=\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

8) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-9x+3}{x+1}}$. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\dfrac{-9x+3}{x+1}\geq0 \text{ et } x+1\neq0\right\}$

$-9x+3=0$ Signifie $-9x=-3$ c'est-à-dire : $x=\dfrac{1}{3}$

$x+1=0$ Signifie $x=-1$

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$-9x+3$	$+$		$+$	0	$-$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{-9x+3}{x+1}$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$

Donc : $D_f=\left]-1,\dfrac{1}{3}\right]$

9) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/-2x^2+x+3>0\}$

$-2x^2+x+3=0$ $a=-2$ et $b=1$ et $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times(-2)\times3=1+24=25=(5)^2>0$

Donc on a deux racines : $x_1 = \frac{-1+5}{2\times(-2)} = \frac{4}{-4} = -1$ et $x_2 = \frac{-1-5}{2\times(-2)} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $D_f = \left]-1, \frac{3}{2}\right[$

10) $f(x) = \frac{x}{|2x-4|-|x-1|}$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / |2x-4|-|x-1| \neq 0\}$

$|2x-4|-|x-1| = 0$ Signifie $|2x-4| = |x-1|$

Signifie $2x-4 = x-1$ ou $2x-4 = -(x-1)$

Signifie $2x-x = 4-1$ ou $2x-4 = -x+1$

Signifie $x = 3$ ou $2x+x = 4+1$

Signifie $x = 3$ ou $3x = 5$ c'est-à-dire : $x = 3$ ou $x = \frac{5}{3}$ donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{3}; 3\right\}$

11) $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-x}$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x-2 \geq 0 \text{ et } x^2-x \neq 0\}$

$x-2 \geq 0$ Signifie : $x \geq 2$

$x^2-x \neq 0$ Signifie : $x(x-1) \neq 0$ c'est-à-dire : : $x \neq 0$ et $x \neq 1$

Donc : $D_f = [2, +\infty[- \{0;1\} = [2, +\infty[$

12) $f(x) = \sqrt{3-|-x+1|}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 3-|-x+1| \geq 0\}$

$3-|-x+1| \geq 0$ Signifie que : $|-x+1| \leq 3$ Signifie que : $-3 \leq -x+1 \leq 3$

Signifie que : $-3-1 \leq -x+1-1 \leq 3-1$

Signifie que : $-4 \leq -x \leq 2$

Signifie que : $-2 \leq x \leq 4$

Donc : $D_f = [-2; 4]$

13) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-8}{x^6-7x^3-8}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^6-7x^3-8 \neq 0 \text{ et } x \geq 0\}$

$x^6-7x^3-8 = 0$ Signifie que : $(x^3)^2 - 7(x^3) - 8 = 0$

Faisons un changement de variable en posant : $X = x^3$; nous obtenons l'équation : $X^2 - 7X - 8 = 0$

Calculons le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 81 \succ 0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $X_1 = \frac{7-9}{2} = -1$ et $X_2 = \frac{7+9}{2} = 8$

Donc : $x^3 = -1$ ou $x^3 = 8$.

Equivalent à : $x = -1$ ou $x = 2$

Par suite : $D_f = [0.+\infty[- \{-1; 2\}$

Alors : $D_f = [0; 2[\cup]2; +\infty[$

14) $f(x)=\dfrac{2\cos x}{2\sin x+1}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2\sin x+1\neq 0\}$

$2\sin x+1=0$ Signifie $\sin x=-\dfrac{1}{2}$

$\sin x=-\dfrac{1}{2}$ Signifie $\sin x=-\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

Signifie $\sin x=\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

Signifie $x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\pi-\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

Signifie $x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi;\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice3 : (**) Soient les deux fonctions suivantes : $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$

Est-ce que : $f=g$? Justifier

Solution : Nous avons : a) $D_f=\mathbb{R}-\{-1;0\}$ et $D_g=\mathbb{R}-\{-1;0\}$

b) $g(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x+1-x}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x(x+1)}=f(x)$

Ainsi : $D_f=D_g$ et $g(x)=f(x)$ pour tout de : $D_f=D_g$

Donc : $f=g$

Exercice 4 : (**) Les fonctions f et g définies respectivement par : $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$ et $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$

Sont-elles égales ?

Solution : Déterminons leur ensemble de définition :

Pour f , on doit avoir : $\dfrac{x-1}{x+3}\geq 0$ et $x-1\neq 0$ donc ce qui donne $D_f=]-\infty;-3[\cup[1;+\infty[$

Pour g, on doit avoir $x-1\geq 0$ et $x+3\succ 0$ ce qui donne $D_g=[1;+\infty[$

On a donc $D_f\neq D_g$. Les fonctions ne sont donc pas égales. On écrit : $f\neq g$

On remarquera cependant que sur $[1;+\infty[$ on a $f(x)=g(x)$

Exercice 5 : (**) Soit f et g les fonctions numériques tel que : $f(x)=x$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$

Comparer les fonctions f et g

Solution : $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}^*$

$f(x)-g(x)=x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-1}{x}$

Etudions le signe de : $\dfrac{x^2-1}{x}$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x^2-1	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x^2-1}{x}$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$

Si : $x \in]-\infty;-1] \cup]0;1]$ alors $f(x)-g(x) \le 0$ et par suite : $f(x) \le g(x)$ c'est-à-dire : $f \le g$

Si : $x \in [-1;0[\cup [1;+\infty[$ alors $f(x)-g(x) \ge 0$ et par suite : $f(x) \ge g(x)$ c'est-à-dire : $f \ge g$

Exercice 6 : (*) Tracer la représentation graphique de la fonction f tel que : $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

1) Déterminer D_f

2) Tracer la courbe représentative de la fonction f Sur I l'intervalle $I=[-2;3]$ dans un repère orthonormé d'unité 1 cm à l'aide du tableau de valeurs suivant :

x		-2	-1	0	1	2	3
f(x)							

Solution :

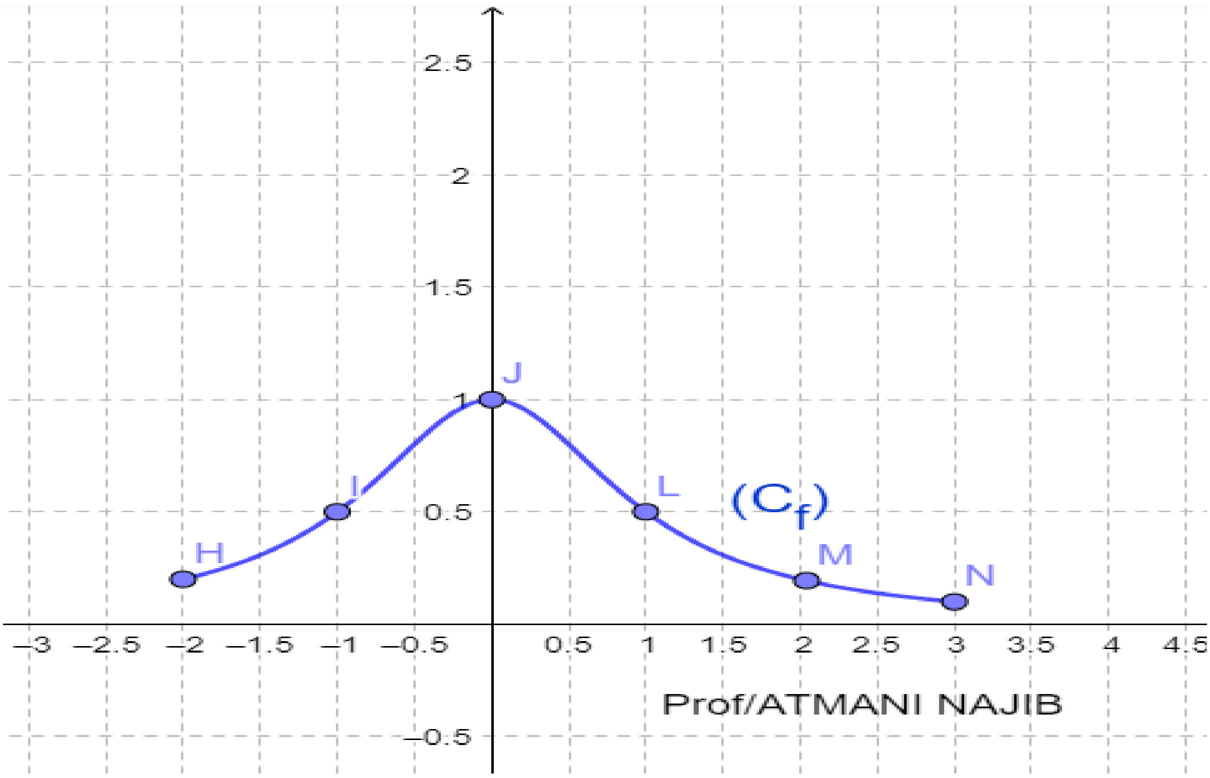
1) $D_f=\{x \in \mathbb{R} / x^2+1 \neq 0\}$

$x^2+1=0$ Signifie que : $x^2=-1$ (pas de solution)

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

2)Pour tracer la courbe représentative d'une fonction on calcule des images en nombre suffisant, et on présente les résultats dans un tableau de valeurs.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0,2	0,5	1	0,5	0,2	0,1



Exercice7 : (**) La courbe ci-dessous représente la fonction f définie sur $[-6;7]$

Répondre par lecture graphique :

1) Quelles sont les images des réels -5, -3, 0 et 6 ?

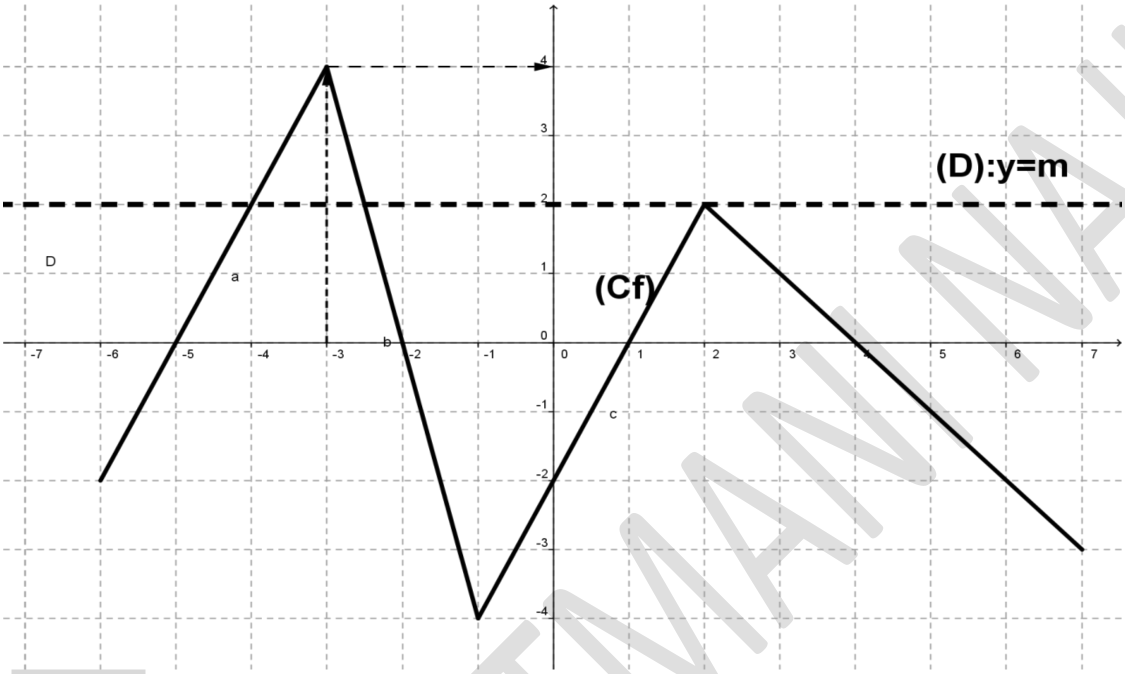
2) Quels sont les antécédents de -1 et 0 ?

3) Résoudre graphiquement $f(x)=0$

4) Quel est en fonction de m le nombre de solutions de : $f(x)=m$.

5) Résoudre graphiquement $f(x)<0$

6) Résoudre graphiquement $f(x)\geq 2$



Solution :1) Image de -5 est 0 (ordonnée du point d'abscisse -5)
Image de -3 est 4 et l'image de 0 est -2 et l'image de 6 est -2

2) Antécédents de -1 sont : -5,5 -1,75 0,5 et 5
Antécédents de 0 sont : -5 ; -2 ; 1 et 4.

3) La solution est l'ensemble des antécédents de 0 : $S=\{-5;-2;1;4\}$

4) Nombre de solutions de $f(x)=m$ c'est le nombre de points d'intersection de courbe avec une la droite parallèle à l'axes des abscisses et d'ordonnées m.

Si $m\prec -4$: pas de solution
Si $m=-4$: une solution
Si: $-4\prec m\prec -3$ deux solutions
Si $-3\prec m\prec -2$: trois solutions
Si $-2\prec m\prec 2$: quatre solutions
Si $m=2$: trois solutions
Si: $2\prec m\prec 4$ deux solutions
Si $m=4$: une solution
Si $m\succ 4$: pas de solution

5) $f(x)\prec 0$ Cela correspond aux valeurs de x pour lesquelles C_f est au-dessous de l'axe des abscisses. $S=[-6;7]\cup]-2;1[\cup]4;7]$

6) $f(x)\geq 2$ Cela correspond aux valeurs de x pour lesquelles C_f est au-dessus de la droite d'équation $y=2$ Donc $S=[-4;2.5]\cup\{2\}$

Exercice8 : (**) Etudier la parité des fonctions suivantes :

1) $f(x)=7-x^2$ 2) $g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 3) $h(x)=\sqrt{x-1}$ 4) $T(x)=|2-x|+|x+2|$

5) $M(x)=(2+x)^2-(2-x)^2$ 6) $N(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$ 7) $g(x)=\dfrac{2\sin x}{1-\cos x}$

Solution :1) f est une fonction polynôme donc un réel a toujours une image.

Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=7-(-x)^2=7-x^2$

$f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire,

2) $g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

$D_g=\{x\in E\,/\,g(x)\in\mathbb{R}\}$ donc : $D_g=\{x\in E\,/\,x^2+1\neq 0\}$

$x^2+1=0$ Signifie $x^2=-1$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : x^2+1 ne s'annule jamais

Par suite : $D_f=\mathbb{R}$

- si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $g(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2+1}=-\dfrac{x}{x^2+1}$ donc : $g(-x)=-g(x)$

Donc g est une fonction impaire,

3) Soit h une fonction tel que : $h(x)=\sqrt{x-1}$

$D_h=\{x\in E\,/\,h(x)\in\mathbb{R}\}$

$D_h=\{x\in E\,/\,x-1\geq 0\}$

$D_h=\{x\in E\,/\,x\geq 1\}$

Par suite : $D_h=[1;+\infty[$

Par exemple on a : $2\in[1;+\infty[$ mais : $-2\notin[1;+\infty[$

Donc h est une fonction ni paire ni impaire,

4) $T(x)=|2-x|+|x+2|$

a) On a : $D_T=\mathbb{R}$

- b) si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $T(-x)=|2-(-x)|+|-x+2|=|2+x|+|-(x-2)|$

$T(-x)=|2+x|+|x-2|$ car : $|-X|=|X|$

$T(-x)=|x-2|+|2+x|$

Donc : $T(-x)=T(x)$

Donc : T est une fonction paire,

5) $M(x)=(2+x)^2-(2-x)^2$

a) On a : $D_M=\mathbb{R}$

b)

- si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

- $M(-x)=(2-x)^2-(2-(-x))^2$

$M(-x)=(2-x)^2-(2+x)^2$

$M(-x)=-\left(-(2-x)^2+(2+x)^2\right)$

$M(-x)=-\left((2+x)^2-(2-x)^2\right)$

Donc : $T(-x)=-T(x)$

Donc T est une fonction impaire,

6) $N(x)=x+\frac{1}{x^2}$

On a $T(x)\in\mathbb{R}$ signifie $x\neq 0$

Donc $D_T=\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[=\mathbb{R}-\{0\}$

On va donc montrer que N n'est ni paire ni impaire.

Calculons par exemple $l(1)$ et $l(-1)$

$N(1)=1+\frac{1}{1^2}=1+1=2$ et $N(-1)=-1+\frac{1}{(-1)^2}=-1+1=0$ donc : $N(-1)\neq N(1)$ et $N(-1)\neq -N(1)$

Par suite : N n'est ni paire ni impaire.

7) $g(x)=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$. $\quad D_g=\{x\in\mathbb{R}/1-\cos x\neq 0\}$

$1-\cos x=0$ Signifie $\cos x=1$

$\cos x=1$ Signifie $x=0+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{2k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\{2k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$ alors $-x\in\mathbb{R}-\{2k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$

- $g(-x)=\frac{2\sin(-x)}{1-\cos(-x)}=\frac{-2\sin x}{1-\cos x}=-\frac{2\sin x}{1-\cos x}=-g(x)$ car $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$ si $x\in\mathbb{R}$

Donc g est une fonction impaire

Exercice 9 : (***) Soit la fonction numérique : $f(x)=-4x^3+\frac{1}{2x}$

1) Déterminer D_f

2) Etudier la parité de f

3) Montrer que : $f(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ pour tout $x\in D_f$

4) Montrer que la fonction : $g(x)=f(x)+1$ est une fonction ni paire ni impaire,

Solution :1) On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie $x\neq 0$

Donc $D_f=\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[=\mathbb{R}-\{0\}$

- 2) Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$

- $f(-x)=-4(-x)^3+\frac{1}{2(-x)}=-\left(-4x^3+\frac{1}{2x}\right)$

$f(-x)=-f(x)$

Cela signifie que : f est une fonction impaire

3) pour tout $x\in D_f$ nous avons :

$f(x)-f(-x)=f(x)-(-f(x))$ Car f est une fonction impaire

Donc : $f(x)-f(-x)=f(x)+f(x)=2f(x)$

D'où : $f(x)-f(-x)=2f(x)$ par suite : $f(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ pour tout $x\in D_f$

4) $g(x)=f(x)+1=-4x^3+\frac{1}{2x}+1$; on a : $D_g=\mathbb{R}^*$

$g(-1)=-4(-1)^3+\frac{1}{2(-1)}+1=\frac{9}{2}$ et $g(1)=-4(1)^3+\frac{1}{2\times 1}+1=-\frac{5}{2}$ et $-g(1)=\frac{5}{2}$

Nous remarquons que : $g(-1)\neq -g(1)$ et $g(-1)\neq g(1)$

Cela signifie que : la fonction g est ni paire ni impaire,

Exercice 10 : (**) Soit f une fonction tel que : $f(x)=\frac{3x^2-1}{x^2+2}$

1) Déterminer D_f

2) Etudier la parité de la fonction f

3) Montrer que : pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=3-\frac{7}{x^2+2}$

4) a) Etudier la monotonie de f sur l'intervalles $[0;+\infty[$

b) En déduire les variations de f sur $]-\infty;0]$

5) Dresser le tableau de variation de f

6) Déterminer les extrémums de f

Solution : $f(x)=\frac{3x^2-1}{x^2+2}$

1 $D_f=\{x\in E\,/\,x^2+2\neq 0\}$

$x^2+2=0$ Signifie $x^2=-2$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : x^2+2 ne s'annule jamais

Par suite : $D_f=\mathbb{R}$

2) Etudions la parité de la fonction f :

- si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=\frac{3(-x)^2-1}{(-x)^2+2}=\frac{3x^2-1}{x^2+2}=f(x)$ Donc : $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire,

3) Montrons que : pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=3-\frac{7}{x^2+2}$

Méthode1 : $3-\frac{7}{x^2+2}=\frac{3(x^2+2)-7}{x^2+2}=\frac{3x^2+6-7}{x^2+2}=\frac{3x^2-1}{x^2+2}$

Donc : $3-\frac{7}{x^2+2}=f(x)$

Méthode2 : $f(x)=\frac{3x^2-1}{x^2+2}=\frac{3x^2+6-6-1}{x^2+2}=\frac{3(x^2+2)-7}{x^2+2}=\frac{3(x^2+2)}{x^2+2}-\frac{7}{x^2+2}$

Donc : $f(x)=3-\frac{7}{x^2+2}$

4) a) Etudions la monotonie de f sur l'intervalles $[0;+\infty[$

2) soient $x_1 \in [0;+\infty[$ et $x_2 \in [0;+\infty[$ tel que : $x_1 < x_2$

$x_1 < x_2$ Implique : $x_1^2 < x_2^2$

Implique : $x_1^2 + 2 < x_2^2 + 2$

Implique : $\frac{1}{x_2^2+2} < \frac{1}{x_1^2+2}$

Implique : $\frac{-7}{x_1^2+2} < \frac{-7}{x_2^2+2}$

Implique : $3 - \frac{7}{x_1^2+2} < 3 - \frac{7}{x_2^2+2}$

Implique : $f(x_1) < f(x_2)$

D'où : f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

b) Déduction des variations de f sur $]-\infty;0]$:

Puisque f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et f est une fonction paire et le symétrique de $[0;+\infty[$ est $]-\infty;0]$

Alors : f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

5) Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$-1/2$	$\nearrow$

6)D'après le tableau de variation de f on a : $f(0) = -\frac{1}{2}$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Exercice11 : (**) Soit f une fonction tel que : $f(x) = 3x^2 + 2$

1) Déterminer D_f

2) Calculer le taux d'accroissement de fonction de f Entre x_1 et x_2 tel que : $x_1 \neq x_2$

3) Etudier les variations de f sur les intervalles $[0;+\infty[$ et $]-\infty;0]$

4) Dresser le tableau de variation de f

Solutions :1) f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

2) soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que : $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1;x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(3x_1^2+2) - (3x_2^2+2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{3x_1^2 - 3x_2^2 + 2 - 2}{x_1 - x_2} = \frac{3(x_1^2 - x_2^2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = 3(x_1 + x_2)$$

3) Soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que : $x_1 \neq x_2$ on a : $T(x_1;x_2) = 3(x_1 + x_2)$

a) Soit $x_1 \in [0;+\infty[$ et $x_2 \in [0;+\infty[$

Donc $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ et $x_1 \neq x_2$ implique $x_1 + x_2 \succ 0$ Donc $3(x_1 + x_2) \succ 0$ car $3 \succ 0$

Donc $T(x_1;x_2) = 3(x_1 + x_2) \succ 0$

D'où : f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

b) Soit $x_1 \in]-\infty;0]$ et $x_2 \in]-\infty;0]$

Donc $x_1 \le 0$ et $x_2 \le 0$ et on a $x_1 \ne x_2$ Donc $x_1 + x_2 \prec 0$ par suite : $3(x_1 + x_2) \prec 0$ car $3 \succ 0$

Donc $T(x_1;x_2) = 3(x_1 + x_2) \prec 0$

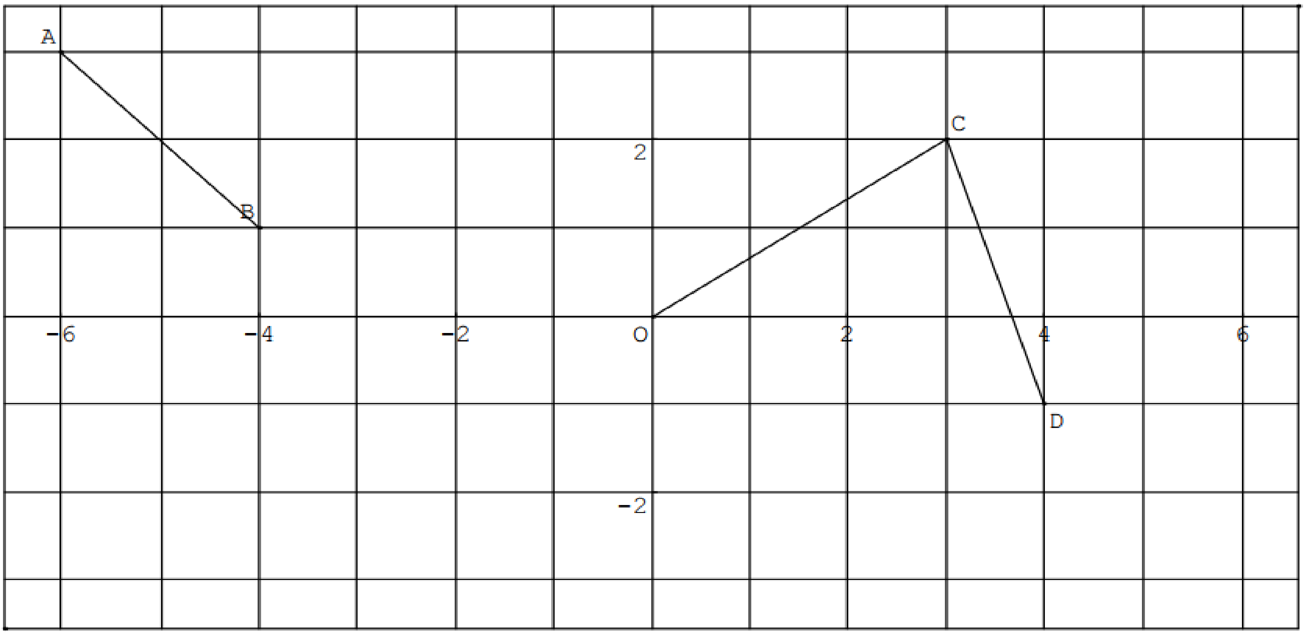
D'où f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

4) Résumé : tableau de variation : $f(0) = 3\times 0^2 + 2 = 2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

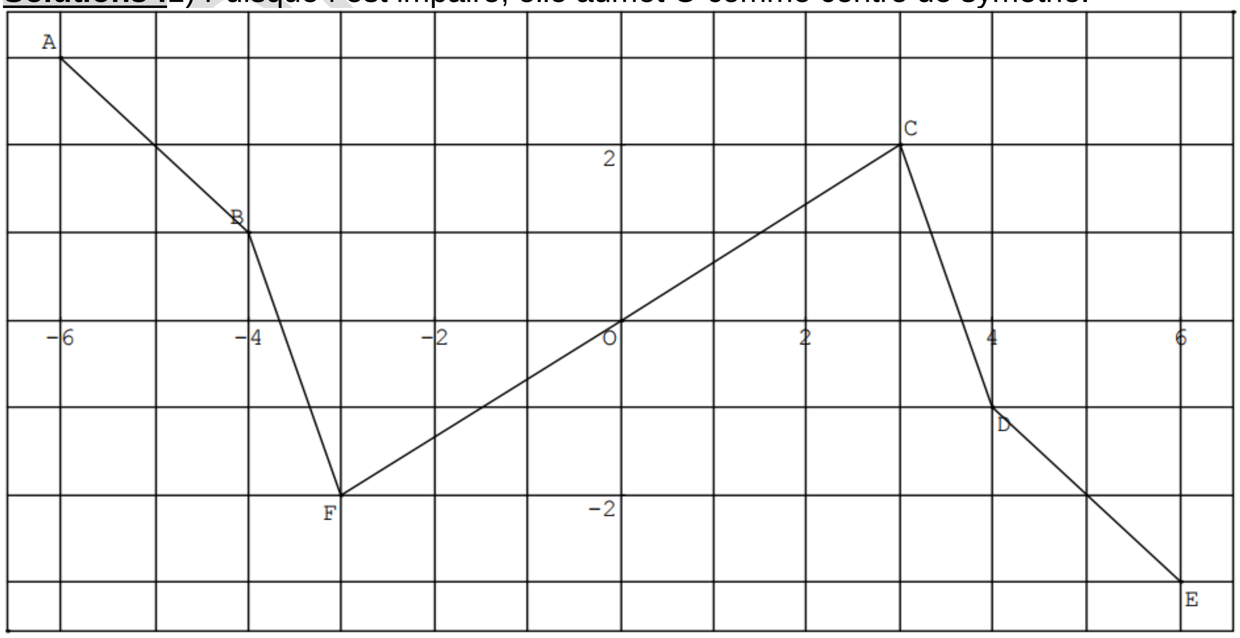
Exercice12 : (*) La courbe (C_f) représentant la fonction f définie sur [– 6 ; 6] est partiellement représentée ci-contre.

1)Sachant que f est impaire, compléter le tracé de (C_f) en justifiant la méthode.



2)Donner le tableau de variation de f.

Solutions :1) Puisque f est impaire, elle admet O comme centre de symétrie.



2)Le tableau de variation de f.

x	-6		-3		3		6
f	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3

Exercice13 : (*)

f est une fonction admettant le tableau de variations suivant :

x	0		2		6		9		11
f	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

Donner votre choix dans le tableau suivant :

		A	B	C	Votre choix
1	L'ensemble de définition de f est :	$[-2;4]$	$[0;2]\cup[6;9]$	$[0;11]$	
2	Une de ces réponses vraie, laquelle	$f(0)=2$	$f(2)=0$	L'image de 0 par f est égale à 11	
3	Une de ces réponses vraie, laquelle	$f(3)\leqslant f(4)$	$f(3)\geqslant f(4)$	On ne peut pas comparer $f(3)$ et $f(4)$	
4	f admet pour minimum :	-1 sur $[6;11]$	0 sur $[0;11]$	-2 sur $[6;11]$	
5	f est	croissante sur l'intervalle $[2;4]$	décroissante sur l'intervalle $[-2;4]$	croissante sur l'intervalle $[0;4]$	

Solutions : 1) L'ensemble de définition est [0;11] : Réponse C

2) $f(0)=2$ (Pour les autres propositions : $f(2)=-1$et $f(11)=0$) : Réponse A

3) La fonction f est croissante sur [2;6] donc $f(3)\leq f(4)$: Réponse A

4) f admet pour minimum −2 sur [6;11] : Réponse C

5) f est croissante sur l'intervalle [2;6]. Elle est donc croissante sur l'intervalle [2;4] : Réponse A

Exercice 14 : (***) Soit g une fonction numérique tel que : $g(x)=-x^2+4x-1$

1)Préciser le domaine de définition de g

2)Calculer le taux d'accroissement de fonction de f entre x_1 et x_2 tel que : $x_1\neq x_2$

3)Etudier la monotonie de g sur : $I=[2;+\infty[$ et sur $J=]-\infty;2]$

4)Dresser le tableau de variation de g

5)En déduire les extrémums de g sur $\mathbb{R}$

6)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f)avec les axes du repère

7)Soit f la fonction définie sur R par : $f(x)=x-1$

Tracer Les courbes représentatives de(C_f)et(C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

8)Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x)=g(x)$

9) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $g(x)>f(x)$

10) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $x^2-4x+m+1=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Solutions : 1) g est une fonction polynôme donc $D_g=\mathbb{R}$

2)Soient : $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\left(-x_1^2+4x_1-1\right)-\left(-x_2^2+4x_2-1\right)}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{-x_1^2+x_2^2+4(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=\frac{-\left(x_1^2-x_2^2\right)+4(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=\frac{-(x_1-x_2)(x_1+x_2)+4(x_1-x_2)}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{(x_1-x_2)(-x_1-x_2+4)}{x_1-x_2}=-x_1-x_2+4$$

Donc : $\boxed{T(x_1;x_2)=-x_1-x_2+4}$

3)a) Etude de la monotonie de g sur : $I=[2;+\infty[$

Soient : $x_1\in[2;+\infty[$ et $x_2\in[2;+\infty[$ alors $x_1\geq 2$ et $x_2\geq 2$ et $x_1\neq x_2$ donc : $x_1+x_2>4$

Donc $-x_1-x_2<-4$ par suite : $-x_1-x_2+4<0$

Donc $T(x_1;x_2)<0$ d'où : g est strictement décroissante sur $[2;+\infty[$

3)b) Etude de la monotonie de g sur : $J=]-\infty;2]$

Soient : $x_1\in]-\infty;2]$ et $x_2\in]-\infty;2]$

Alors : $x_1\leq 2$ et $x_2\leq 2$ et $x_1\neq x_2$ cela implique $x_1+x_2<4$

Donc $-x_1-x_2>-4$ par suite : $-x_1-x_2+4>0$

Donc $T(x_1;x_2)>0$

D'où : g est strictement croissante sur $]-\infty;2]$

4) <u>Résumé</u> : tableau de variation : On a : $g(2)=-2^2+4\times2-1=-4+8-1=3$

Donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$

5) $g(2)=3$ est un maximum de g sur $\mathbb{R}$

6)a) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection A et B de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation: $g(x)=0$.

$g(x)=0$ Signifie $-x^2+4x-1=0$

$\Delta=b^2-4ac=16-4\times(-1)\times(-1)=16-4=12>0$

$$x_1=\frac{-4+\sqrt{12}}{2\times(-1)}=\frac{-4+\sqrt{4\times3}}{-2}=\frac{-4+2\sqrt{3}}{-2}=\frac{-2\left(2-\sqrt{3}\right)}{-2}=2-\sqrt{3}$$

$$x_2=\frac{-4-\sqrt{12}}{2\times(-1)}=\frac{-4-\sqrt{4\times3}}{-2}=\frac{-4-2\sqrt{3}}{-2}=\frac{-2\left(2+\sqrt{3}\right)}{-2}=2+\sqrt{3}$$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses sont :

$C\left(2-\sqrt{3};0\right)$ et $D\left(2+\sqrt{3};0\right)$

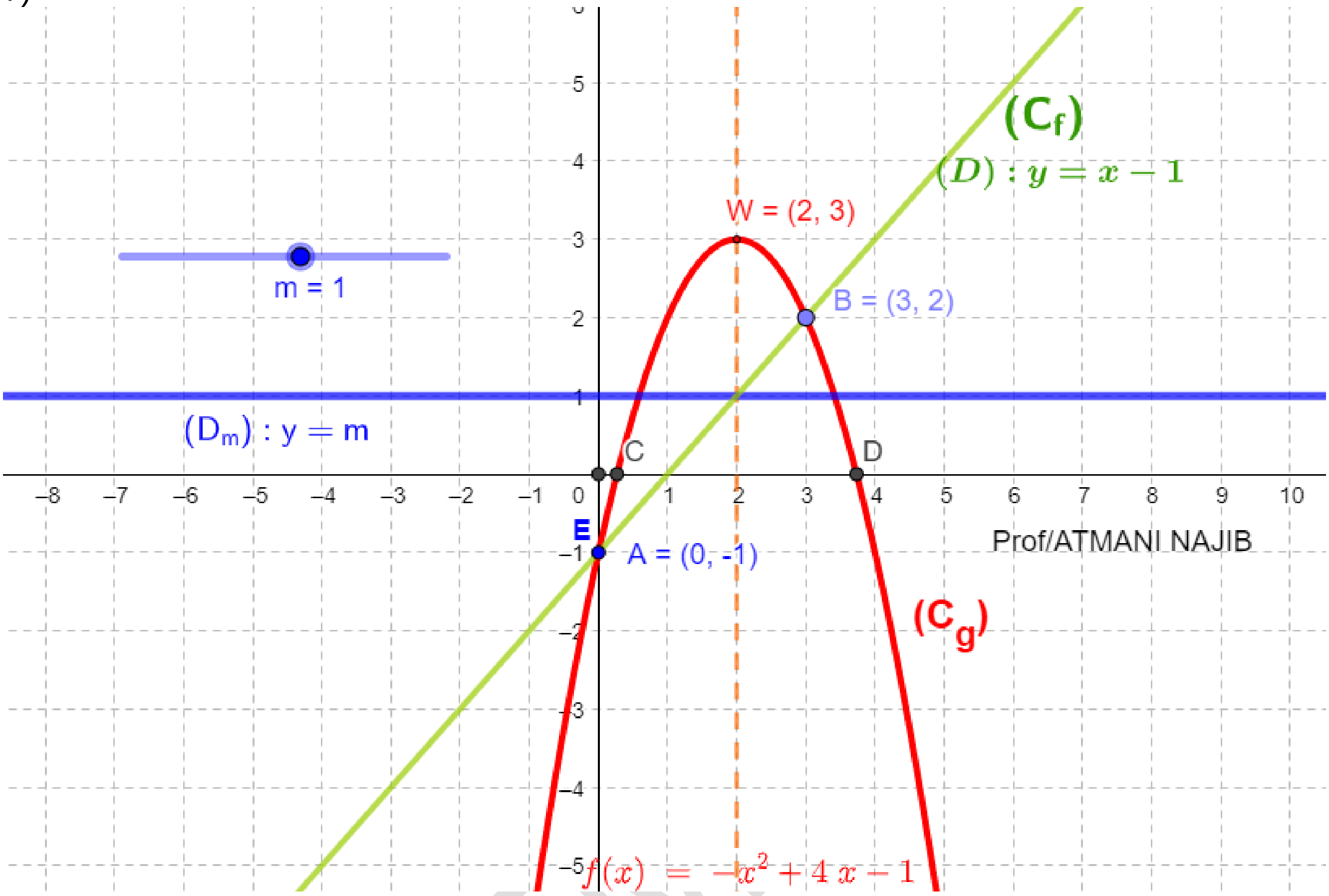
b) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $g(0)=-0^2+4\times0-1=-1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $E(0;-1)$

7)



8) a) Résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x=0$ et $x=3$ donc $S=\{0;3\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ Signifie : $-x^2+4x-1=x-1$ c'est-à-dire : $-x^2+3x=0$

Signifie : $x(-x+3)=0$

Signifie : $-x+3=0$ ou $x=0$

C'est-à-dire : $x=3$ ou $x=0$

Donc : $S=\{0;3\}$

9) a) Résolution graphique de l'inéquation $g(x)>f(x)$:

La courbe (C_g) est au-dessus de (C_f) si $x\in]0;3[$

Donc $S=]0;3[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation : $g(x)>f(x)$:

$g(x)>f(x)$ Signifie $-x^2+4x-1\succ x-1$

C'est-à-dire : $-x^2+3x>0$

Les racines sont : $x_1=0$ et $x_2=3$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$-x^2+3x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $S=]0;3[$

10) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $x^2-4x+m+1=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

$x^2-4x+m+1=0$ Signifie $m=-x^2+4x-1$

Signifie : $m=g(x)$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_g) et la droite : $y=m$

Si : $m>3$ l'équation n'admet pas de solution
Si : $m=3$ il y'a une solution c'est : x = 2
Si : $m<3$ il y'a deux solutions

Exercice 15 : (***) Soit f une fonction tel que : $f(x)=\frac{x-2}{x-1}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Montrer que : $f(x)=1-\frac{1}{x-1}$ pour tout $x\in D_f$

b) Montrer que (C_f) est une hyperbole et déterminer ces éléments caractéristiques et le tableau de variations de f

c) Tracer la courbe (C_f)

2) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)>0$

3) Soit g une fonction tel que : $g(x)=x^2-2x+3$

a) Montrer que la courbe (C_g) c'est une parabole et déterminer ces éléments caractéristiques et le tableau de variations de g

b) Tracer la courbe (C_g) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

c) Résoudre graphiquement l'inéquation : $\frac{g(x)}{f(x)}>0$

(μ La solution de l'équation : $g(x)=f(x)$ n'est pas demandé de la déterminer)

Solutions : $f(x)=\frac{x-2}{x-1}$ a) On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie que : $x-1\neq 0$ c'est-à-dire : $x\neq 1$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

Montrons que : $f(x)=1-\frac{1}{x-1}$ Pour tout $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

Soit $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ on a : $1-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1-1}{x-1}=\frac{x-2}{x-1}$

Donc : $f(x)=1-\frac{1}{x-1}$ Pour tout $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

b) On utilisant le résumé de notre cours :

Rappelle : Si : $f(x)=\beta+\frac{k}{x+\alpha}$ alors (C_f) est une hyperbole de centre $W(-\alpha;\beta)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\alpha$ et $y=\beta$

Dans notre exercice on a : $f(x)=1-\frac{1}{x-1}$ avec : $\alpha=-1$ et $\beta=1$ et $k=-1\prec 0$

Donc (C_f) est une hyperbole de centre $W(1;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations :

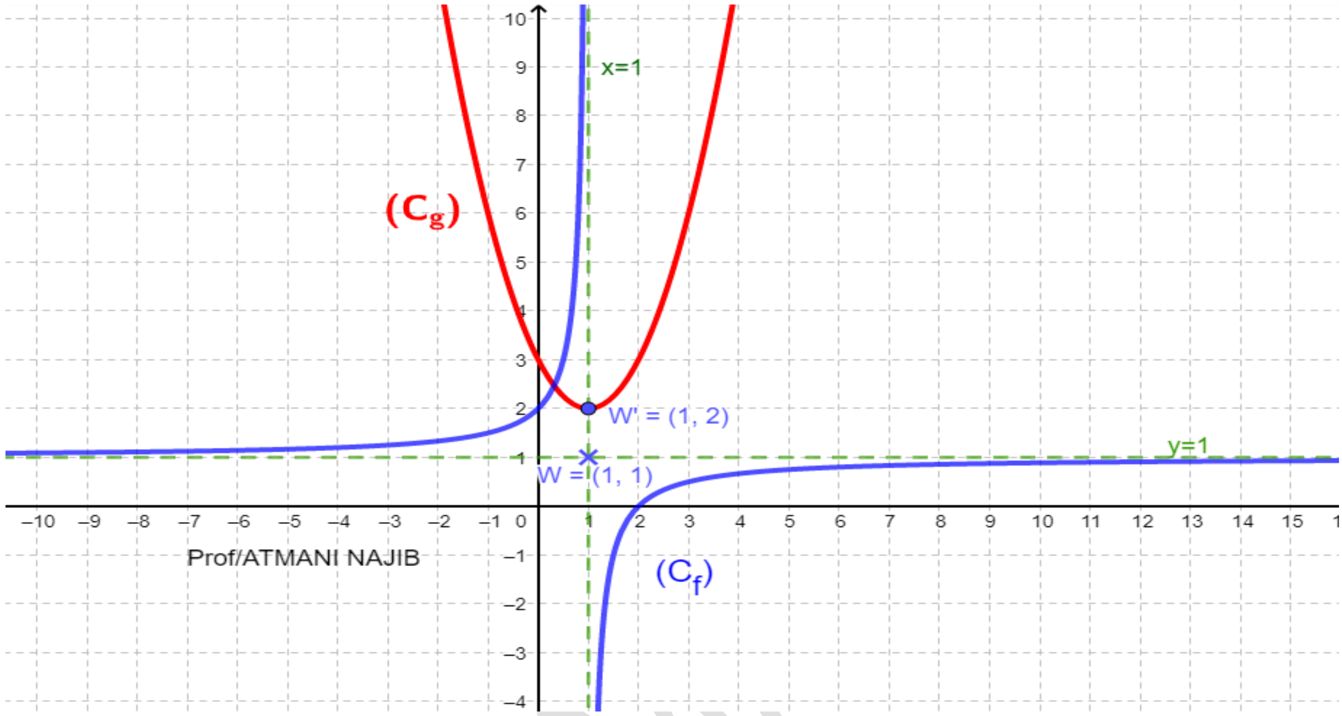
$x=1$ et $y=1$

Le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

c)La courbe (C_f) : $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$

-2	-1	0	1	2	3	4
4/3	3/2	2		0	1/2	2/3



2) Résolution graphique de l'inéquation : $f(x)>0$

$f(x)>0$ Equivaut à : x appartient à l'intervalle ou (C_f) est au-dessus de l'axe des abscisses

Donc : $S=]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$

3) a) Soit g une fonction tel que : $g(x)=x^2-2x+3$

On a g est une fonction polynôme donc : $D_g=\mathbb{R}$

Méthode1 : $g(x)=x^2-2x+3=x^2-2x+1-1+3=(x-1)^2+2=1(x-1)^2+2$

Donc : $g(x)=1(x-1)^2+2$ et $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$

Donc $\alpha=-1$ et $\beta=2$ et $a=1$

Méthode2 : $\left(g(x)=ax^2+bx+c\right)$ On a : $a=1$ et $b=-2$ et $c=3$

Donc $\alpha=\dfrac{b}{2a}=\dfrac{-2}{2\times 1}=-1$ et $\beta=g(-\alpha)=g(1)=(1)^2-2\times(1)+3=2$

Donc : $g(x)=a(x+\alpha)^2+\beta=1(x-1)^2+2$

Ainsi : dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_g) c'est une parabole de sommet $W'(-\alpha;\beta)$: $W'(1;2)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

Tableau de variations de g : On a $a=1>0$ donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

c) Résolution graphique de l’inéquation : $\frac{g(x)}{f(x)} > 1$

$\frac{g(x)}{f(x)} > 1$ Equivaut à : Equivaut à : $\frac{g(x) - f(x)}{f(x)} > 0$

Donc : on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		μ		1		2		$+\infty$
$g(x)-f(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$		$+$	$\Vert$	$-$		$+$	
$quotient$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$		$+$	

Donc : $S = \left]-\infty; \mu\right[\cup \left]2; +\infty\right[$

C’est en forgeant que l’on devient forgeron : Dit un proverbe.
C’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l’on devient un mathématicien