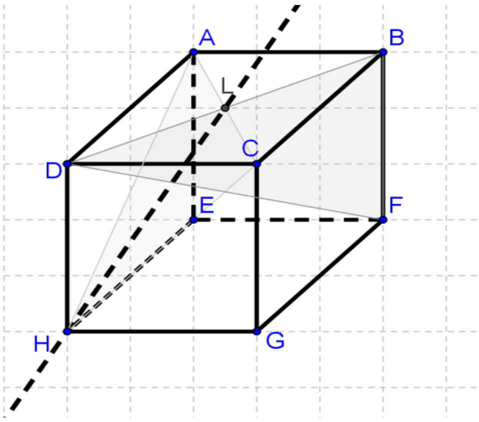
Corrections Série N°2 : Géométrie dans l'espace

Exercice 1 : (**) : Soit $ABCDEFGH$ un cube de l'espace

1) Déterminer et représenter la droite (Δ) d'intersection des plans (ACH) et (BDF)

2) Soient I et J les centres des carrés $EFGH$ et $ABFE$ respectivement
Déterminer la droite (Δ') d'intersection des plans (IJE) et (ADH)

Solution :



1) On a : $A \in (ACH)$ et $A \notin (BDF)$

Donc $(ACH) \neq (BDF)$ (1)

On a : $H \in (ACH)$

Puisque : $DH = BF$ et $(DH) \| (BF)$

Alors : $BDHF$ est un parallélogramme

Par suite les points $B\,;D\,;H\,;F$ sont coplanaires et donc : $H \in (BDF)$

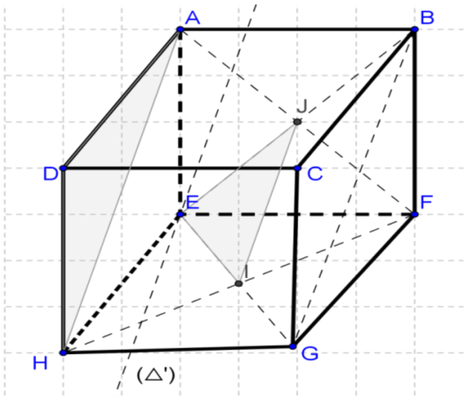
Et par suite : $H \in (BDF) \cap (ACH)$ (2)

Soit L Le point intersection des droites (AC) et (BD) donc : $L \in (ACH)$ et $L \in (BDF)$

Donc $L \in (BDF) \cap (ACH)$ (3)

Par suite : de (1) et (2) et (3) en déduit que :

$(BDF) \cap (ACH) = (HL)$



2) On a : $I \in (IJE)$ et $I \notin (ADH)$

Donc $(IJE) \neq (ADH)$

On a : $E \in (IJE)$ et $E \in (ADH)$ car: $(DH) \| (AE)$

Donc : $E \in (ADH) \cap (IJE)$

Par suite : $(ADH) \cap (IJE) = (\Delta')$

On considère le triangle AHF : on a I et J les milieux respectifs des segments $[HF]$ et $[AF]$

Donc : $(IJ) \| (AH)$

Donc : on a : $(IJ) \| (AH)$ et $(IJ) \subset (IJE)$ et $(AH) \subset (ADH)$ et $(ADH) \cap (IJE) = (\Delta')$

Donc : (Δ') est la droite qui passe par E et parallèle a (IJ) et (AH)

Exercice 2 : (**) (***) $ABCD$ un trapèze de diagonales $[AC]$ et $[BD]$ qui se coupent en I et soit S un point de l'espace qui n'appartient pas au plan (ABC) et tel que : $(SI)\perp(ABC)$

1) Déterminer l'intersection des plans (SAC) et (SBD) et l'intersection des plans (SAB) et (SDC)

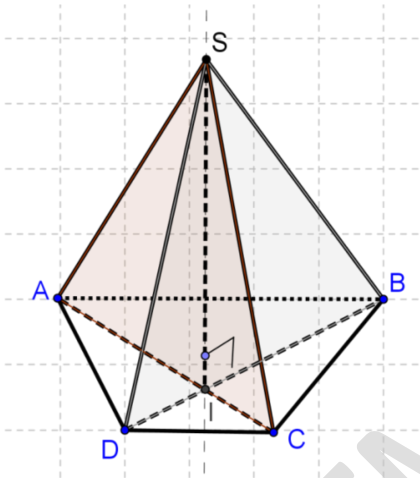
2) Vérifier que $(SI)\perp(AB)$ et montrer que les plans (SAC) et (ABC) sont orthogonaux

3) On suppose que ABC est un triangle rectangle en B et que :

$SI=3$ et $BC=\frac{1}{4}$; $AB=2$ et $CD=3$

Calculer alors le volume de la pyramide $SABCD$

Solution : 1) a)



On a : $(SAC)\neq(SBD)$ (1) car les points : S ; A ; B ; C ; D sont non coplanaires

On a : $S\in(SAC)$ et $S\in(SBD)$ (2)

On a aussi : $I\in(AC)$ et $(AC)\subset(SAC)$

Donc : $I\in(SAC)$

On a aussi : $I\in(BD)$ et $I\in(BD)$ donc : $I\in(SBD)$

Donc : $I\in(SAC)$ et $I\in(SBD)$ (3)

De (1) ; (2) et (3) en déduit que : $(SAC)\cap(SBD)=(IS)$

b) On a : (SAB) et (SDC) sont non confondus

Et $S\in(SAB)$ et $S\in(SDC)$

Et puisque : $(AB)\subset(SAB)$ et $(DC)\subset(SDC)$

et $(DC)\parallel(AB)$ alors d'après le théorème du toit

Les plans (SAB) et (SDC) se coupent suivant une droite qui passe par S et parallèle au droites (AB) et (DC)

2)a) On a : $(SI)\perp(ABC)$ et $(AB)\subset(ABC)$

Donc : $(SI)\perp(AB)$

b) On a : $(SI)\subset(SAC)$ et $(SI)\perp(ABC)$

Par suite : $(ABC)\perp(SAC)$

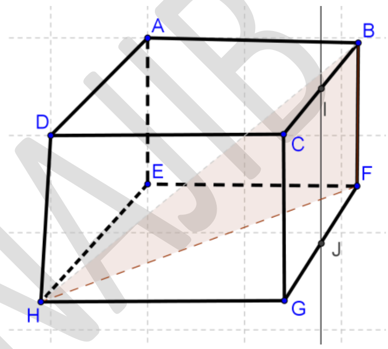
3) On a : $((AB)\perp(BC))$ donc la surface du trapèze $ABCD$ est :

$$S=\frac{(DC+AB)\times BC}{2}=\frac{(3+2)\times\frac{1}{4}}{2}=\frac{5}{8}$$ (Car (BC) est une hauteur)

Et le volume : $V=\frac{1}{3}\cdot S\times(SI)$ de la pyramide $SABCD$ est :

Donc : $V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)\cdot 3=\frac{5}{8}$ (unité)

Exercice 3 : (***) Soit $ABCDEFGH$ un cube de l'espace et Soient I ; J les milieux respectifs des segments $[BC]$; $[FG]$



1) Montrer que : $(IJ)\parallel(HFB)$

2) Montrer que $(HFD)\cap(EIJ)=(PQ)$:

Avec $(HF)\cap(EJ)=\{P\}$ et $(AI)\cap(BD)=\{Q\}$

3) Montrer que $(PQ)\parallel(FB)$:

Solution : 1) On a I le milieu du segment $[BC]$ et J le milieu

Du segment $[FG]$ donc : $(BF)\parallel(IJ)$

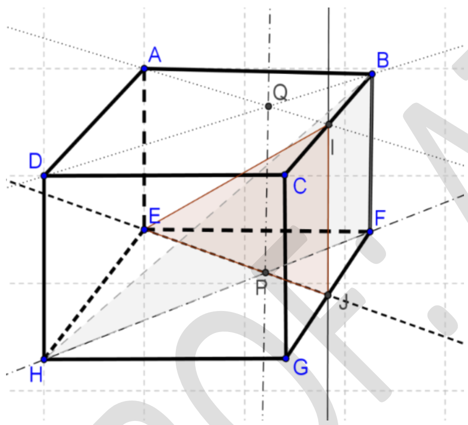
Et on a $(BF)\subset(HFB)$ donc : $(IJ)\parallel(HFB)$

2) On a : $(EJ)\subset(EIJ)$ et $(AI)\subset(EIJ)$ (car $(AE)\parallel(IJ)$ les points A ; J ; E ; I sont coplanaires

Donc les points A ; J ; E ; I sont coplanaires

Donc : $P\in(EIJ)$ et $Q\in(EIJ)$

(car $Q\in(AI)$ et $P\in(EJ)$)



Ce qui équivaut à dire que : $(PQ)\subset(EIJ)$ (1)

D'autre part on a : $(HF)\subset(HFB)$ et $(BD)\subset(HFD)$ (car $(DH)\parallel(BF)$

Donc : D ; H ;et B coplanaires) F

Donc : $P\in(HFD)$ et $Q\in(HFD)$

Ce qui équivaut à dire que/ $(PQ)\subset(HFD)$:2)

Et puisque : $(HFD)\neq(EIJ)$

Alors de (1) et (2) on déduit que : $(HFD)\cap(EIJ)=(PQ)$

3) On a :$(IJ)\subset(EIJ)$ et $(HFD)\cap(EIJ)=(PQ)$ $(BF)\subset(HFD)$ et et $(BF)\parallel(IJ)$

Donc : $(PQ)\parallel(FB)$

Exercice 4 : (***) $ABCD$ Un tétraèdre tel que : $BD = DC$ et Soit I le milieu du segment $[BC]$

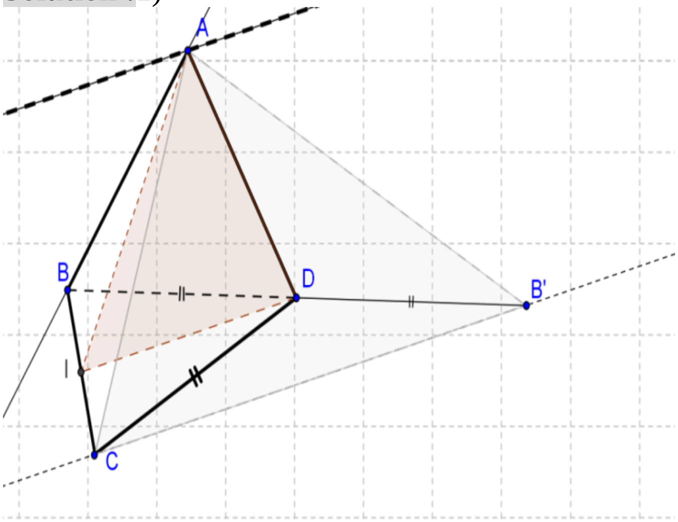
Et B' le symétrique du point B par rapport au point D

1)Faire une figure

2)Montrer que : $(CB') \parallel (AID)$

3) Déterminer l'intersection des plans (AID) et $(AB'C)$

Solution :1)



2) on a I le milieu du segment $[BC]$ et B' le symétrique du point B par rapport a D

Donc : D le milieu du segment $[BB']$

Et par suite $(ID) \parallel (B'C)$

Et on a : $(ID) \subset (AID)$ Donc: $(CB') \parallel (AID)$

3) On a : $A \in (AID)$ et $A \in (AB'C)$ et $(AID) \neq (AB'C)$

Donc : les plans : (AID) et $(AB'C)$ se coupent suivant une droite qui passe par A

Et puisque : $(ID) \subset (AID)$ et $(B'C) \subset (AB'C)$

et $(B'C) \parallel (ID)$ alors les plans : (AID) et $(AB'C)$ se coupent suivant une droite qui passe par A

et parallèle a $(B'C)$ et (ID)

Exercice 5 : (***) Soit $ABCDEFGH$ un cube de l'espace et soient I ; J et K et L les milieux respectifs des Segments : $[AB]$; $[EF]$; $[GH]$; $[GH]$ et $[BC]$

1) Montrer que :les points B ; C ; K et J sont coplanaires

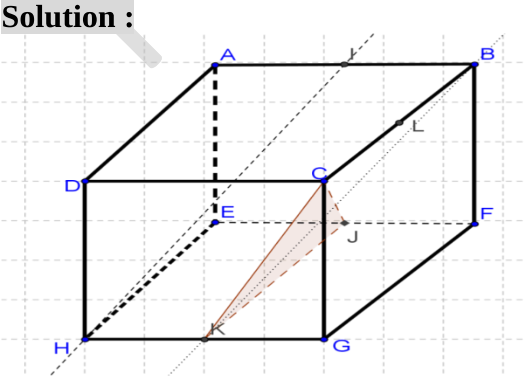
2) Montrer que :les points I; B ; K et H sont coplanaires

3) Est ce que les points I; L ; E et B sont coplanaires ? Justifier

4)Montrer que : $(IH) \parallel (KB)$

5) En déduire que : $(IH) \parallel (JKC)$

Solution :



1) Dans le carré $EFGH$ on a : I le milieu du segment $[AB]$ et K le milieu du segment $[GH]$

Donc : $(EH) \parallel (JK) \parallel (FG)$

Et on sait que : $(FG) \parallel (BC)$ donc : $(JK) \parallel (BC)$

Par suite les points B ; C ; K et J sont coplanaires

2)On a : $(AB) \parallel (EF)$ et $(EF) \parallel (HG)$

Donc : $(AB) \parallel (HG)$

Par suite les points : I ; B ; K et H sont coplanaires

3) Est ce que les points I ; L ; E et B sont coplanaires ? Justifier

On a : $I \in [AB]$ et $L \in [BC]$

Donc : $I \in (ABCD)$ et $L \in (ABCD)$

Et puisque : $E \notin (ABCD)$

Alors les points I ; L ; E et B ne sont pas coplanaires

4) On a : $AB = HG$ et I le milieu du segment $[AB]$ et K le milieu du segment $[GH]$

Donc : $IB = HK$ et on sait que : $(IB) \parallel (HK)$ donc $IBKH$ est un parallélogramme

Et par suite : $(IH) \parallel (KB)$

5) On sait que les points B ; C ; K et J sont coplanaires

et puisque $(IH) \parallel (BK)$ et $(BK) \subset (JCK)$ donc : $(IH) \parallel (JKC)$.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien