Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°2 : PRODUIT SCALAIRE

Exercice1 : (*) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\|=1$ et $\|\vec{v}\|=7$ et $\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\frac{\pi}{2}$

Calculer : $\vec{u}.\vec{v}$

Solution : $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=1\times7\times\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=7\times0=0$ car $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

Donc : $\vec{u}.\vec{v}=0$ $\quad(\vec{u}\perp\vec{v})$

Exercice2 : (*) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\|=2\sqrt{3}$ et $\|\vec{v}\|=\frac{1}{2}$ et $\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\frac{7\pi}{6}$

Calculer : $\vec{u}.\vec{v}$

Solution : $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{2}\times\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$ or $\cos(\pi+x)=-\cos x$

Donc : $\vec{u}.\vec{v}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{3}{2}$

Exercice3 : (*) Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs tels que : $AB=3$ et $AC=8$ et $BAC=\frac{\pi}{4}$

Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Solution : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos BAC=3\times8\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=24\times\frac{\sqrt{2}}{2}=12\sqrt{2}$

Exercice4 : (**) On considère un triangle ABC.

1) Déterminer, si possible, la longueur AC lorsque dans le triangle ABC on a :

a) $AB=4$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-8$ et $BAC=\frac{\pi}{6}$

b) $AB=6$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-12$ et $BAC=120^\circ$

2) Déterminer, si possible, une mesure de l'angle BAC lorsque dans le triangle ABC on a :

a) $AB=4$; $AC=2\sqrt{2}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-8$

b) $AB=5$; $AC=2$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=5$

c) $AB=3$; $AC=5$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=15$

Solution : 1) Déterminons, si possible, la longueur AC lorsque dans le triangle ABC on a :

a) $AB=4$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-8$ et $BAC=\frac{\pi}{6}$

On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos BAC=AB\times AC\times\cos BAC$

Ainsi : $-8=4\times AC\times\cos\frac{\pi}{6}$ or $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc : $-8=4\times AC\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ c'est-à-dire : $-8=2\sqrt{3}\times AC$

Donc : $AC=\frac{-4}{\sqrt{3}}$ ce qui est absurde car AC est une distance et ne peut être négative.

Donc il n'est pas possible de déterminer une distance de AC dans ces conditions.

b) $AB=6$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-12$ et $BAC=120^\circ$

On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos BAC$

Ainsi : $-12 = 6\times AC\times\cos\frac{2\pi}{3}$ car $BAC = 120^\circ = \frac{2\pi}{3} rad$

Ainsi : $-12 = 6\times AC\times\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$ c'est-à-dire : $-12 = -6\times AC\times\cos\frac{\pi}{3}$ or $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

Donc : $-12 = -3AC$ c'est-à-dire : $AC = 4$

2) Déterminons, si possible, une mesure de l'angle BAC lorsque dans le triangle ABC on a :

a) $AB = 4$; $AC = 2\sqrt{2}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -8$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -8$ Signifie que : $-8 = AB\times AC\times\cos BAC$

Signifie que : $-8 = 4\times 2\sqrt{2}\times\cos BAC$

Signifie que : $\cos BAC = \frac{-8}{8\sqrt{2}}$

Signifie que : $\cos BAC = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ et comme $BAC\in[0;\pi]$ alors : $BAC = \frac{3\pi}{4} rad$

b) $AB = 5$; $AC = 2$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 5$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 5$ Signifie que : $5 = AB\times AC\times\cos BAC$

Signifie que : $5 = 5\times 2\times\cos BAC$

Signifie que : $\cos BAC = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ et comme $BAC\in[0;\pi]$ alors : $BAC = \frac{\pi}{3} rad$

c) $AB = 3$; $AC = 5$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 15$

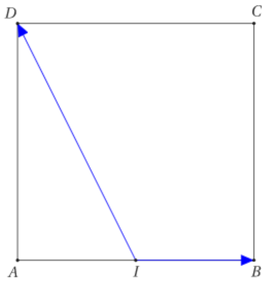
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 15$ Signifie que : $15 = AB\times AC\times\cos BAC$

Signifie que : $15 = 3\times 5\times\cos BAC$

Signifie que : $\cos BAC = \frac{15}{15} = 1$ et comme $BAC\in[0;\pi]$ alors : $BAC = 0$

Exercice5 : (**) Sur la figure ci-dessous, ABCD est un carré de côté 4 unités et I et le milieu du segment [AB].

Calculer la valeur du produit scalaire : $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{ID}$



Solution : La méthode utilisant la projection orthogonale est particulièrement bien adaptée ici puisque l'on connaît la projection orthogonale *A* du point *D* sur la droite (*IB*).

$\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IA}$

Et puisque : $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IA}$ sont colinéaires et sont de sens contraires

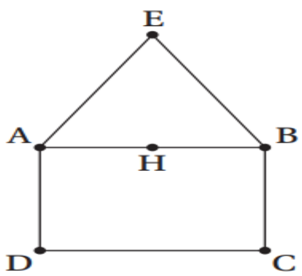
Alors : $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{ID} = -IB\times IA = -2\times 2 = -4$

Exercice6 : (**)

Sur la figure ci-contre, ABCD est un rectangle tel que AB = 4 et BC = 3, ABE est un triangle équilatéral, H est le milieu du segment [AB].

Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}$ b) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DH}$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ d) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AE}$ e) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EC}$



Solution :

CONSEILS : a) Considérez les directions des deux vecteurs.

b) Décomposez le vecteur $\overrightarrow{DH}$ en utilisant la relation de Chasles.
c) Considérez le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
d) Remarquez que $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$, puis considérez le projeté orthogonal de E sur la droite (AB).
e) Utilisez les résultats des deux questions précédentes.

a) Calculons : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}$

Les droites (BC) et (CD) sont perpendiculaires, donc les vecteurs : $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux,

Donc : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}=0$

b) Calculons $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DH}$

$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{DC}.\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AH}\right)=\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AH}$

Les vecteurs : $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont orthogonaux, (les droites (DC) et (DA) sont perpendiculaires

Donc : $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA}=0$

$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AH}=DC\times AH$ Car les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires de même sens

Or : $DC=AB=4$ et $AH=\frac{1}{2}AB=2$

Donc : $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AH}=4\times 2=8$

Donc : $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DH}=0+8=8$

c) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) est B, donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=AB^2=16$

d) Calculons $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$

Le triangle ABE est équilatéral, donc (EH) est la médiatrice du segment [AB]. Le projeté orthogonal de E sur la droite (AB) est donc H.

Les vecteurs : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont colinéaires de même sens, donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AE}=AB\times AH$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AE}=-AB\times AH$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AE}=-8$

e) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EC}$

Par la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EA}=\left(-\overrightarrow{BA}\right).\left(-\overrightarrow{AE}\right)=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AE}$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EA}=-8$ De plus $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=16$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EC}=-8+16=8$

Exercice7 : (**) Soit ABC un triangle tel que : $AB=2\sqrt{7}$ et $AC=4$ et $BC=5$

En appliquant la propriété suivante :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs alors on a : $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ et $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

1)Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

2)Calculer : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

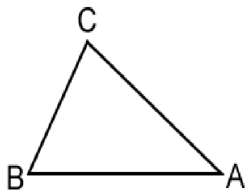
3)Calculer : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

Solution : 1) Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

On en déduit, d'après la propriété que :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\|^2\right)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{BC}\|^2\right)$$



$$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\left(2\sqrt{7}\right)^2+4^2-5^2\right)=\frac{1}{2}\times 19=9,5$$

2) Calculons : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

$$\boxed{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(BA^2+BC^2-AC^2\right)}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\left(2\sqrt{7}\right)^2+5^2-4^2\right)=\frac{1}{2}\times 37=18,5$$

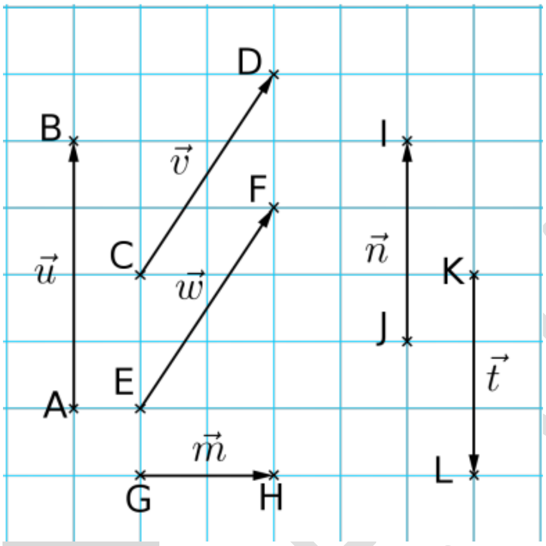
3) Calculons : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

$$\boxed{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\left(CA^2+CB^2-AB^2\right)}$$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\left(5^2+4^2-\left(2\sqrt{7}\right)^2\right)=\frac{1}{2}\times 13=6,5$$

Exercice8 : (**)On considère la figure ci-contre, dont le quadrillage est composé de carrés de côté
Calculer les produits scalaires suivants.

1) $\vec{u}.\vec{v}$ 2) $\vec{t}.\vec{n}$ 3) $\vec{w}.\vec{m}$ 4) $\vec{n}.\vec{u}$ 5) $\vec{v}.\vec{w}$ 6) $\vec{w}.\vec{u}$ 7) $\vec{t}.\vec{m}$



Solution : On utilise dans cet exercice les méthodes de translation de vecteurs et de projection orthogonale.

1) Calculons : $\vec{u}.\vec{v}$

On fait la translation du vecteur $\vec{v}$ sur la droite (AB) au point A puis on fait la projection du point D sur le représentant du vecteur $\vec{v}$ sur la droite (D); par suite on obtient deux vecteurs colinéaires de même sens.

Ainsi $\vec{u}.\vec{v}=4\times 3=12$

2) Calculons : $\vec{t}.\vec{n}$

Les vecteurs $\vec{t}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires et de sens contraire donc on a :

$$\vec{t}.\vec{n}=\left\|\vec{t}\right\|\times\left\|\vec{n}\right\|=3\times 3=9$$

3) Calculons : $\vec{w}.\vec{m}$

On fait la translation du vecteur $\vec{w}$ sur la droite (GH) au point G puis la projection orthogonale du point F sur la (GH), par suite on obtient deux vecteurs colinéaires et de même sens.

$\vec{w}.\vec{m}=2\times 2=4$

4) Calculons : $\vec{n}.\vec{u}$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont deux vecteurs colinéaires de même sens alors

On a : $\vec{n}.\vec{u} = \|\vec{n}\| \times \|\vec{u}\| = 2 \times 4 = 8$

5) Calculons : $\vec{v}.\vec{w}$

Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont deux vecteurs colinéaires de même sens alors

On a : $\vec{v}.\vec{w} = \|\vec{v}\| \times \|\vec{w}\|$

Déterminons et $\|\vec{w}\|$

On a : $EF = CD$ donc : $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$

Calculons donc : $\|\vec{v}\|$

Le vecteur $\vec{v}$ a pour norme CD et CD est l'hypoténuse d'un triangle
Rectangle dont les deux autres côtés ont pour longueurs 3 et 2.
Alors d'après la propriété de Pythagore on a:
$CD = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$
Ainsi : $\vec{v}.\vec{w} = \|\vec{v}\| \times \|\vec{w}\| = \sqrt{13} \times \sqrt{13} = 13$

6) Calculons : $\vec{w}.\vec{u}$

Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, de même sens et $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$ donc : $\vec{w} = \vec{v}$

Alors : $\vec{w}.\vec{u} = \vec{v}.\vec{u} = \vec{u}.\vec{v}$

D'après la réponse de la question on a: $\vec{u}.\vec{v} = 12$

D'où : $\vec{w}.\vec{u} = 12$

7) Calculons : $\vec{t}.\vec{m}$

Les droites d'actions des vecteurs $\vec{t}$ et $\vec{m}$ sont perpendiculaires donc

Les vecteurs $\vec{t}$ et $\vec{m}$ sont orthogonaux alors leur produit scalaire est nul.

D'où : $\vec{t}.\vec{m} = 0$

Exercice9: (***) Soit ABC un triangle rectangle en A et H est le projeté orthogonal du point A
Sur la droite (BC). Montrer que :
1) $AB^2 + AC^2 = BC^2$
2) $AC \times AB = AH \times BC$

Solution :1) $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2$

On a : $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{AC}$ car ABC un triangle rectangle en A

Donc : $BC^2 = BA^2 + AC^2$

2) on considère le triangle : (ABC) donc : $\sin\hat{B} = \dfrac{AC}{BC}$

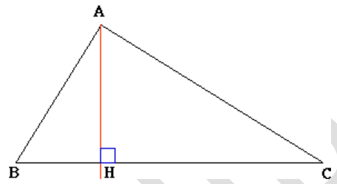
Et on considère le triangle : (ABH) donc : $\sin\hat{B} = \dfrac{AH}{AB}$

Donc : $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AH}{AB}$ donc : $AC \times AB = AH \times BC$

Exercice10 : (**) Soit ABC un triangle rectangle en A et H est le projeté orthogonal du point A Sur la droite (BC) et $AH = 2cm$ et $ABC = \frac{\pi}{3}$

Calculer AB et BH et BC

Solution : a) On à : ABH un triangle rectangle en H



Donc : $\sin\left(ABC\right) = \frac{AH}{AB}$

Par suite : $AB = \frac{AH}{\sin\left(ABC\right)} = \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\times\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

b) On a : $AB^2 = AH^2 + HB^2$ car ABH un triangle rectangle en H

Donc : $AB^2 - AH^2 = HB^2$

Donc : $\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2 - 2^2 = HB^2$

Donc : $\frac{16}{3} - 2^2 = HB^2$ Donc : $HB^2 = \frac{4}{3}$ c'est-à-dire : $HB = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

c)On a $BA^2 = BH \times BC$ donc : $BC = \frac{BA^2}{BH}$

Donc : $BC = \frac{\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2}{\frac{2}{3}\sqrt{3}} = \frac{\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2}{\frac{2}{3}\sqrt{3}} = \frac{8}{3}\sqrt{3}$

Exercice11 : (**) 1) Soit ABC un triangle tel que $AB = 7$ et $AC = 5$ et $BC = 6$

a) Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$ et en déduire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

b) Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) Calculer AH

2) Sachant que $\|\vec{u}\| = 4$ et $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u}.\vec{v} = -\frac{1}{2}$

a) Calculer : $A = \left(2\vec{u} - 3\vec{v}\right).\left(\vec{u} + 2\vec{v}\right)$ et $B = \left(\frac{\vec{u}}{2} - \vec{v}\right).\left(\vec{u} + \frac{\vec{v}}{2}\right)$ $C = \left(\vec{u} - \vec{v}\right)^2$ et $D = \left(2\vec{u} + 3\vec{v}\right)^2$

b) En déduire $E = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ et $F = \|2\vec{u} + 3\vec{v}\|$

Solution :1) Calcule de $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$

On a $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{BA}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2\right)$

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{BC}\|^2 - \|\overrightarrow{BA}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(BC^2 - AB^2 - AC^2\right) = \frac{1}{2}\left(6^2 - 7^2 - 5^2\right) = -19$$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = -19$ Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = 19$

a) Calcul de AH

On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$ donc : $AH = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB} = \frac{19}{7}$

2) a) $A = \left(2\vec{u} - 3\vec{v}\right).\left(\vec{u} + 2\vec{v}\right) = 2\vec{u}.\vec{u} + 4\vec{u}.\vec{v} - 3\vec{u}.\vec{v} - 6\vec{v}.\vec{v}$

$$A = \left(2\vec{u} - 3\vec{v}\right).\left(\vec{u} + 2\vec{v}\right) = 2\vec{u}.\vec{u} + 4\vec{u}.\vec{v} - 3\vec{u}.\vec{v} - 6\vec{v}.\vec{v}$$

$$A = 2.\vec{u}^2 + \vec{u}.\vec{v} - 6\vec{v}^2 = 2.\|\vec{u}\|^2 + \vec{u}.\vec{v} - 6\|\vec{v}\|^2 = 2\times4^2 + \frac{1}{2} - 6\times2^2$$

$A=32+\frac{1}{2}-24=\frac{15}{2}$

$B=\left(\frac{\vec{u}}{2}-\vec{v}\right).\left(\vec{u}+\frac{\vec{v}}{2}\right)=\frac{1}{2}\vec{u}.\vec{u}+\frac{1}{4}\vec{u}.\vec{v}-\vec{u}.\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{v}.\vec{v}$

$B=\frac{1}{2}\times\left\|\vec{u}\right\|^2-\frac{3}{4}\times\vec{u}.\vec{v}-\frac{1}{2}\times\left\|\vec{v}\right\|^2=\frac{1}{2}\times4^2-\frac{3}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\times2^2$

$B=8+\frac{3}{2}-2=\frac{51}{8}$

$C=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\left\|\vec{u}\right\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2=4^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)+2^2$

$C=16+1+4=21$

$D=\left(2\vec{u}+3\vec{v}\right)^2=4\vec{u}^2+12\vec{u}.\vec{v}+9\vec{v}^2=4\left\|\vec{u}\right\|^2+12\vec{u}.\vec{v}+9\left\|\vec{v}\right\|^2$

$D=4\times4^2+12\left(-\frac{1}{2}\right)+9\times2^2=64-6+36=94$

b) $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=21$ donc $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=94$ par suite : $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|=\sqrt{21}$

$\left(2\vec{u}+3\vec{v}\right)^2=94$ Donc $\left\|2\vec{u}+3\vec{v}\right\|^2=94$ par suite : $\left\|2\vec{u}+3\vec{v}\right\|=\sqrt{94}$

Exercice12 : (**) Soit ABC un triangle tel que et $AB=5$ et $AC=8$ et $A=\frac{2\pi}{3}$

Calculer BC et $\cos C$

Solution : a) D'après le Théorème d'Al Kashi on a : $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos A$

$BC^2=5^2+8^2-2\times5\times8\cos\frac{2\pi}{3}$ Donc $BC^2=25+64+40=129$ par suite : $BC=\sqrt{129}$

b) D'après le Théorème d'Al Kashi on a :

$AB^2=AC^2+BC^2-2CA\times CB\cos C$ C'est-à-dire : $2CA\times CB\cos C=AC^2+BC^2-AB^2$

Donc $\cos C=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2CA\times CB}$ c'est-à-dire : $\cos C=\frac{64+129-25}{2\times8\times\sqrt{129}}=\frac{168}{16\sqrt{129}}=\frac{21\sqrt{129}}{258}$

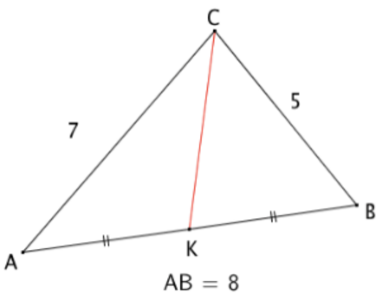
Exercice13: (*) Soit ABC un triangle tel que : $BC=5$; $AC=7$
Et $AB=8$ et K le milieu du segment [AB].
Calculer CK .

Solution : D'après le théorème de la médiane, on a :

$CA^2+CB^2=2CK^2+\frac{AB^2}{2}$

Donc : $CK^2=\frac{1}{2}\left(CA^2+CB^2-\frac{AB^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(7^2+5^2-\frac{8^2}{2}\right)=21$

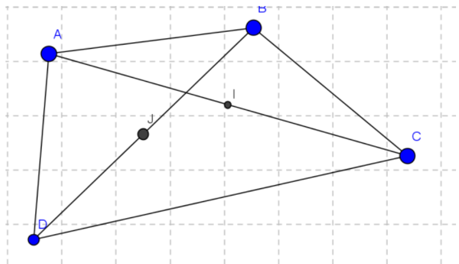
Donc : $CK=\sqrt{21}$.



Exercice14 : (***) Soit $ABCD$ un quadrilatère

Le point I le milieu de la diagonale [AC]. Et J le milieu de la diagonale [BD].
1) Montrer que : $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4IJ^2$
2) Que remarquez-vous si le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle

Solution :



1) Montrons que : $4IJ^2 = 2BI^2 + 2DI^2 - BD^2$?
Appliquons le théorème de la médiane au triangle ABC :

$$AB^2 + BC^2 = 2BI^2 + \frac{1}{2}AC^2 \quad (1)$$

Appliquons aussi le théorème de la médiane au triangle ADC :

$$AD^2 + CD^2 = 2DI^2 + \frac{1}{2}AC^2 \quad (2)$$

Appliquons aussi le théorème de la médiane au triangle IBD :

$$IB^2 + ID^2 = 2IJ^2 + \frac{1}{2}BD^2 \quad (3)$$

Faisons la somme : $(1)+(2)$ ce qui donne : $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2BI^2 + 2DI^2 + AC^2$

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2\left(BI^2 + DI^2\right) + AC^2$$

Or d'après (3) on a : $IB^2 + ID^2 = 2IJ^2 + \frac{1}{2}BD^2$

Donc : $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2\left(2IJ^2 + \frac{1}{2}BD^2\right) + AC^2$

Donc : $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 4IJ^2 + BD^2 + AC^2$
2) Si le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle alors nous aurons : $IJ = 0$ car $I = J$
Par conséquent : $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = BD^2 + AC^2$
C'est le théorème de Pythagore appliqué au rectangle
<u>Exercice15</u>: (***) Soit ABC un triangle tel que : $AB = 1$
Et $AC = \sqrt{2}$ et $CB = 2$ et D un point tel que : $\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

1) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}$ et en déduire : $\cos A$

2) Ecrire $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
3) Calculer $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ et en déduire la nature du triangle ABD
4) Calculer : AD
5) Soit I le milieu du segment $[BC]$ et J le milieu du segment $[AC]$
Calculer : AI et BJ
Solution : 1) D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos BAC$

Et on a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \hat{A} = AB \times AC \times \cos \hat{A}$

Donc : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

Donc : $2^2 = 1^2 + \sqrt{2}^2 - 2\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

Donc : $4 = 1 + 2 - 2\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ donc : $1 = -2\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}$

Déduction de $\cos A$: on a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \hat{A}$

Donc : $-\frac{1}{2}=AB\times AC\times\cos\hat{A}$ donc : $-\frac{1}{2}=1\times\sqrt{2}\times\cos\hat{A}$

Donc : $\cos\hat{A}=\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{2}\right)^2}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

2) $\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ ssi $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+2\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ ssi $\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Ssi $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AD}$ donc : $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)$

3) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\left(AB^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\left(1+2\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=0$

Donc : $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ par suite : $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$

Et donc : ABD est un triangle rectangle en A

4) On a : $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AD}^2=\left(\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)\right)^2$ donc : $AD^2=\frac{1}{9}\left(\left(\overrightarrow{AB}\right)^2+\left(2\overrightarrow{AC}\right)^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{9}\left(AB^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+4AC^2\right)$

$AD^2=\frac{1}{9}\left(1+4\left(-\frac{1}{2}\right)+4\times 2\right)=\frac{1}{9}(1-2+8)=\frac{7}{9}$

Donc : $AD=\sqrt{\frac{7}{9}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

5) a) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a : $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$

Donc : $1^2+\sqrt{2}^2=2AI^2+\frac{1}{2}2^2$

Signifie que : $3=2AI^2+2$ ssi $1=2AI^2$ donc : $AI^2=\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $AI=\sqrt{\frac{1}{2}}$

b) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a :

$BA^2+BC^2=2BJ^2+\frac{1}{2}AC^2$

Donc : $1^2+2^2=2BJ^2+\frac{1}{2}\sqrt{2}^2$ c'est-à-dire : $5=2BJ^2+1$

Signifie que : $BJ^2=2$ et par suite : $BJ=\sqrt{2}$

Exercice16 : (**) Soit ABC un triangle tel que et $AB=3$ et $AC=1$ et $\cos BAC=-\frac{1}{3}$

Soit M le milieu du segment $[BC]$

1) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 2) Calculer AM et BC

3) Soit H tel que $\overrightarrow{AH}=\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}$

Montrer que les droites : (AB) et (MH) sont perpendiculaires

Solution : 1) Calculons $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\cos BAC$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times1\times-\frac{1}{3}=-1$

2) a) Calculons BC :

D'après le Théorème d'Al Kashi dans le triangle ABC on a :

$BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Donc $BC^2=(3)^2+1^2-2\times(-1)=12$ par suite : $BC=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

b) Calculons AM :

On a : M le milieu du segment $[BC]$

D'après le théorème de la médiane dans ABC on a : $AB^2+AC^2=2AM^2+\frac{BC^2}{2}$

Donc : $AM^2=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\frac{BC^2}{2}\right)$

Donc : $AM^2=\frac{1}{2}(9+1-6)=2$ Par suite : $AM=\sqrt{2}$

3) Soit H tel que $\overrightarrow{AH}=\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}$

Montrons que les droites : (AB) et (MH) sont perpendiculaires

M le milieu du segment $[BC]$ donc : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AM}\right)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(-\frac{1}{18}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MH}=-\frac{1}{18}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{18}\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{2}(-1)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MH}=-\frac{1}{18}AB^2-\frac{1}{2}(-1)=-\frac{1}{18}9+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MH}=0$

Donc : les droites (AB) et (MH) sont perpendiculaires

Exercice17 : (**) Soit ABC un triangle isocèle en A tel que : $\cos(B\hat{A}C)=\frac{1}{4}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$

I Un point tel que : $\overrightarrow{BI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$ et J le milieu du segment $[BC]$

Et soit la droite (Δ) qui passe par I et perpendiculaire à la droite (AB) et soit E un point tel que : $E\in(\Delta)$

1) Construire une figure

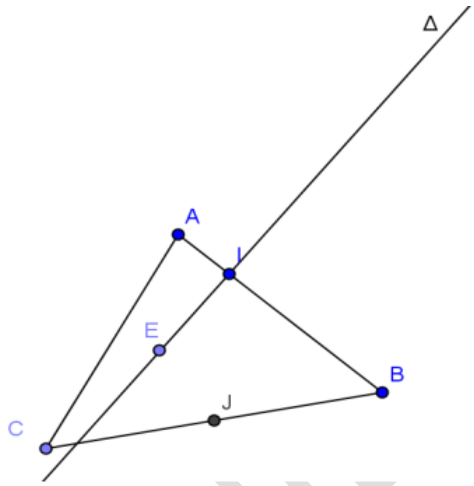
2) Montrer que : $AB=8$ et calculer BC

3) Calculer : $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}$

4) Montrer que : $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=48$

5) Calculer : AJ

Solution :1) La figure



2) On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$ donc : $AB\times AC\times\cos\hat{A}=16$

Donc : $AB\times AB\times\cos\hat{A}=16$ donc : $AB^2\times\frac{1}{4}=16$

Donc : $AB=8$: donc $AB^2=64$

b) D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC on a :

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos A$$

Donc : $BC^2=64+64-2\times 64\times\frac{1}{4}$

Donc : $BC^2=96$ donc : $BC=\sqrt{96}$

3) $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}^2=\frac{3}{4}BA^2=\frac{3}{4}\times 64=48$

4) $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{IB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ car $\overrightarrow{EI}\perp\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-\overrightarrow{BI}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}=48$

5) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a : $AB^2+AC^2=2AJ^2+\frac{1}{2}BC^2$

Donc : $8^2+8^2=2AJ^2+\frac{1}{2}\sqrt{96}^2$

Donc : $128=2AJ^2+48$ donc : $40=AJ^2$ donc : $AJ=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

Exercice18 : (****) Soit $ABCD$ un parallélogramme et O le milieu du segment $[AB]$ et tel que :

$AD=4$ et $CD=6$ et $BAC=\frac{\pi}{3}$

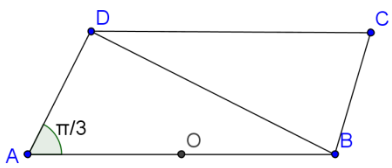
1) Calculer : BD et AC

2) Montrer que : pour tout point M du plan on a : $MA^2+MB^2=2MO^2+\frac{1}{2}AB^2$

3) En déduire que : l'ensemble (C) des points M du plan tel que : $MA^2+MB^2=24$

Solution :1) Calcul de : BD

D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABD nous obtenons :



$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\times AD\cos BAD$

$BD^2=36+16-2\times 6\times 4\times\frac{1}{2}=28$ car $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

D'où : $BD=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

Calcul de : AC

D'après le Théorème d'Al Kashi dans ADC nous obtenons :

$AC^2=DA^2+DC^2-2DA\times DC\cos ADC$

$AC^2=16+36-2\times 4\times 6\times\left(-\frac{1}{2}\right)=76$ car $\cos ADC=\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

D'où : $AC=\sqrt{76}=2\sqrt{19}$

2) Montrons que : pour tout point M du plan on a : $MA^2+MB^2=2MO^2+\frac{1}{2}AB^2$

Puisque O le milieu du segment $[AB]$ donc : D'après le théorème de la médiane dans MAB on a :

$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{1}{2}AB^2$

3) Déterminons l'ensemble (C) des points M du plan tel que : $MA^2 + MB^2 = 24$

On a : $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{1}{2}AB^2$

Donc : $MA^2 + MB^2 = 24$ Equivaut à : $2MO^2 + \frac{1}{2}AB^2 = 24$

Equivaut à : $2MO^2 = 24 - \frac{1}{2} \times AB^2 = 6$ car $AB = CD = 6$

Equivaut à : $MO^2 = 3$ c'est-à-dire : $OM = \sqrt{3}$

Par conséquent : l'ensemble (C) des points M du plan tel que : $MA^2 + MB^2 = 24$

Est le cercle de centre O et de rayon $R = \sqrt{3}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien