Tronc commun Sciences BIOF

Série N°2 : PRODUIT SCALAIRE

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com/)

Exercice1 : (*) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\|=1$ et $\|\vec{v}\|=7$ et $(\vec{u};\vec{v})=\frac{\pi}{2}$

Calculer : $\vec{u}.\vec{v}$

Exercice2 : (*) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\|=2\sqrt{3}$ et $\|\vec{v}\|=\frac{1}{2}$ et $(\vec{u};\vec{v})=\frac{7\pi}{6}$

Calculer : $\vec{u}.\vec{v}$

Exercice3 : (*) Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs tels que : $AB=3$ et $AC=8$ et $BAC=\frac{\pi}{4}$

Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Exercice4 : (**) On considère un triangle ABC.

1) Déterminer, si possible, la longueur AC lorsque dans le triangle ABC on a :

a) $AB=4$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-8$ et $BAC=\frac{\pi}{6}$

b) $AB=6$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-12$ et $BAC=120^\circ$

2) Déterminer, si possible, une mesure de l'angle BAC lorsque dans le triangle ABC on a :

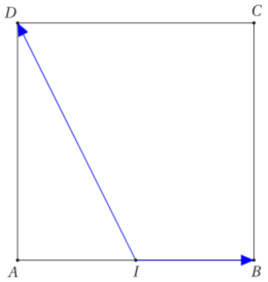
a) $AB=4$; $AC=2\sqrt{2}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-8$

b) $AB=5$; $AC=2$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=5$

c) $AB=3$; $AC=5$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=15$

Exercice5 : (**) Sur la figure ci-dessous, ABCD est un carré de côté 4 unités et I et le milieu du segment [AB].

Calculer la valeur du produit scalaire : $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{ID}$



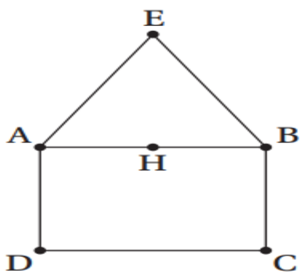
Solution : La méthode utilisant la projection orthogonale est particulièrement bien adaptée ici

Exercice6 : (**)

Sur la figure ci-contre, ABCD est un rectangle tel que AB = 4 et BC = 3, ABE est un triangle équilatéral, H est le milieu du segment [AB].

Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}$ b) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DH}$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ d) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AE}$ e) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EC}$



Exercice7 : (**) Soit ABC un triangle tel que : $AB=2\sqrt{7}$; $AC=4$ et $BC=5$

En appliquant la propriété suivante :

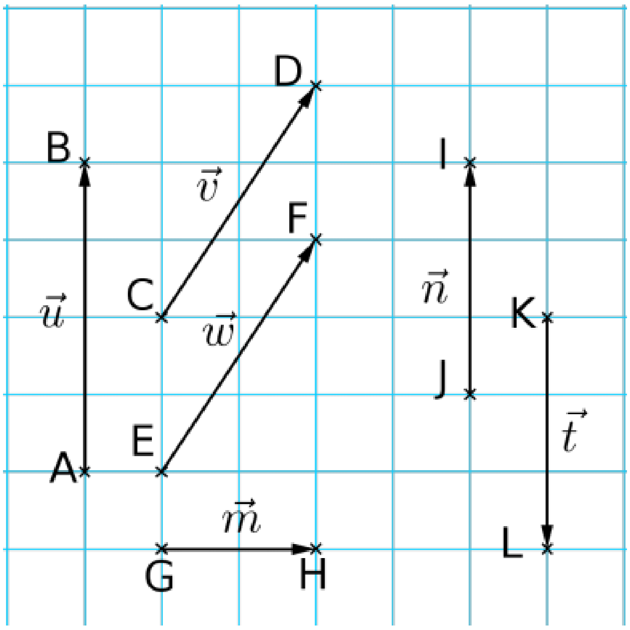
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs alors on a : $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ et $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

1)Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ 2) Calculer : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

3)Calculer : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

Exercice8 : (**) On considère la figure ci-contre, dont le quadrillage est composé de carrés de côté ; Calculer les produits scalaires suivants.

1) $\vec{u}.\vec{v}$ 2) $\vec{t}.\vec{n}$ 3) $\vec{w}.\vec{m}$ 4) $\vec{n}.\vec{u}$ 5) $\vec{v}.\vec{w}$ 6) $\vec{w}.\vec{u}$ 7) $\vec{t}.\vec{m}$



Exercice9: (***) Soit ABC un triangle rectangle en A et H est le projeté orthogonal du point A Sur la droite (BC). Montrer que :

1) $AB^2 + AC^2 = BC^2$

2) $AC \times AB = AH \times BC$

Exercice10 : (**) Soit ABC un triangle rectangle en A et H est le projeté orthogonal du point A Sur la droite (BC) et $AH = 2cm$ et $ABC = \frac{\pi}{3}$

Calculer AB et BH et BC

Exercice11 : (**) 1) Soit ABC un triangle tel que $AB = 7$ et $AC = 5$ et $BC = 6$

a) Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$ et en déduire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

b) Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) Calculer AH

2) Sachant que $\|\vec{u}\| = 4$ et $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u}.\vec{v} = -\frac{1}{2}$

a) Calculer : $A = (2\vec{u} - 3\vec{v}).(\vec{u} + 2\vec{v})$ et $B = \left(\frac{\vec{u}}{2} - \vec{v}\right).\left(\vec{u} + \frac{\vec{v}}{2}\right)$ $C = (\vec{u} - \vec{v})^2$ et $D = (2\vec{u} + 3\vec{v})^2$

b) En déduire $E = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ et $F = \|2\vec{u} + 3\vec{v}\|$

Exercice12 : (**) Soit ABC un triangle tel que et $AB = 5$ et $AC = 8$ et $A = \frac{2\pi}{3}$

Calculer BC et $\cos C$

Exercice13: (*) Soit ABC un triangle tel que : $BC = 5$; $AC = 7$

Et $AB = 8$ et K le milieu du segment [AB].

Calculer CK .

Exercice14 : (***) Soit $ABCD$ un quadrilatère

Le point I le milieu de la diagonale [AC]. Et J le milieu de la diagonale [BD].

1) Montrer que : $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$

2) Que remarquez-vous si le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle

Exercice15: (***) Soit ABC un triangle tel que : $AB=1$
Et $AC=\sqrt{2}$ et $CB=2$ et D un point tel que : $\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

1) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}$ et en déduire : $\cos A$

2) Ecrire $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3) Calculer $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$ et en déduire la nature du triangle ABD

4) Calculer : AD

5) Soit I le milieu du segment $[BC]$ et J le milieu du segment $[AC]$

Calculer : AI et BJ

Exercice16 : (**) Soit ABC un triangle tel que et $AB=3$ et $AC=1$ et $\cos BAC=-\frac{1}{3}$

Soit M le milieu du segment $[BC]$

1) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 2) Calculer AM et BC

3) Soit H tel que $\overrightarrow{AH}=\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}$

Montrer que les droites : (AB) et (MH) sont perpendiculaires

Exercice17 : (**) Soit ABC un triangle isocèle en A tel que : $\cos(B\hat{A}C)=\frac{1}{4}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$

I Un point tel que : $\overrightarrow{BI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$ et J le milieu du segment $[BC]$

Et soit la droite (Δ) qui passe par I et perpendiculaire à la droite (AB) et soit E un point tel que : $E\in(\Delta)$

1) Construire une figure

2) Montrer que : $AB=8$ et calculer BC

3) Calculer : $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}$

4) Montrer que : $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=48$

5) Calculer : AJ

Exercice18 : (****) Soit $ABCD$ un parallélogramme et O le milieu du segment $[AB]$ et tel que :

$AD=4$ et $CD=6$ et $BAC=\frac{\pi}{3}$

1) Calculer : BD et AC

2) Montrer que : pour tout point M du plan on a : $MA^2+MB^2=2MO^2+\frac{1}{2}AB^2$

3) En déduire que : l'ensemble (C) des points M du plan tel que : $MA^2+MB^2=24$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien