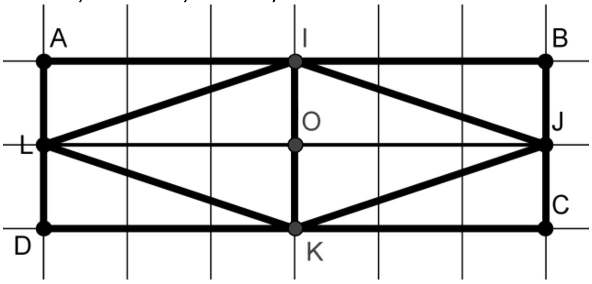
Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°2 :
Les Transformations du plan

Exercice 1 : (*) ABCD est un rectangle de centre O.
I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].
AIOL, LOKD, IBJO, OJCK sont alors des rectangles et O le milieu des segments [LJ] et [IK].



1) a) Quel est le transformé du triangle AIL par la symétrie d'axe (IK)?
b) Quel est le transformé du triangle AIL par la symétrie de centre O ?
2) a) Montrer que : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AO}$.
b) Montrer que : $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{LK}$.
c) Quel est le transformé du triangle AIL par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$?

Solution : 1) a) $S_{(IK)}(A)=B$ et $S_{(IK)}(I)=I$ car $I\in(IK)$ et $S_{(IK)}(L)=J$

Donc le transformé du triangle AIL par la symétrie d'axe (IK) est le triangle IBJ

Par suite : $S_{(IK)}(AIL)=IBJ$.

b) $S_O(A)=C$ et $S_O(I)=K$ et $S_O(L)=J$

Par suite : $S_O(AIL)=CKJ$.

Donc le transformé du triangle AIL par la symétrie de centre O est le triangle CKJ.

2)a) $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{IO}$ car AIOL est un rectangle, donc un parallélogramme.

$\overrightarrow{LO} = \overrightarrow{OJ}$ car O est le milieu du segment : [LJ]

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AO}$ car $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{LO}$ et $\overrightarrow{LO} = \overrightarrow{OJ}$

Donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{OJ}$ par suite : AIJO est un parallélogramme donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AO}$.

b) $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{LD}$ car L est le milieu de [AD]

$\overrightarrow{LO} = \overrightarrow{DK}$ car LOKD est un rectangle.

$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{LK}$ car $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{LD}$ et $\overrightarrow{LD} = \overrightarrow{OK}$ donc : $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{OK}$ et ALKO est un parallélogramme

Par suite : $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{LK}$.

c)On a : $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{IJ}$ donc : $t_{\overrightarrow{IJ}}(A)=O$ et on a : $\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{IJ}$ donc : $t_{\overrightarrow{IJ}}(L)=K$

Et aussi on a : $t_{\overrightarrow{IJ}}(I)=J$ donc : $t_{\overrightarrow{IJ}}(AIL)=OJK$

Par suite le transformé du triangle AIL par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est le triangle OJK

Exercice 2 : (**) $ABCD$ Un rectangle de centre O et $S_{(BD)}$ est la Symétrie axiale d'axe (BD)

Les points : A' , C' les images respectives des points A , C par $S_{(BD)}$

Montrer que : $AA'CC'$ est aussi un rectangle

Solution : On a : $S_{(BD)}(A)=A'$ et $S_{(BD)}(C)=C'$ et O le milieu du segment $[AC]$

Donc $S_{(BD)}(O)=O'$ est aussi le milieu du segment $[A'C']$ car la symétrie axiale conserve le milieu

Or : $O\in(BD)$ donc : $S_{(BD)}(O)=O$

Donc : O le milieu du segment $[A'C']$ et de $[AC]$

Donc : les segments $[A'C']$ et de $[AC]$ ont le même milieu O

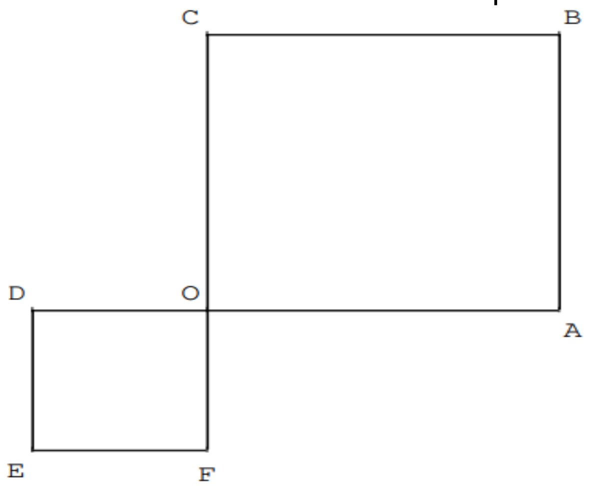
Par suite $AA'CC'$ est un parallélogramme

Et on a aussi : $S_{(BD)}(A) = A'$ et $S_{(BD)}(C) = C'$ donc $AC = A'C'$ (car la symétrie axiale

Conserve les distances) Par conséquent : $AA'CC'$ est aussi un rectangle

Exercice 3 : (**)

Deux carrés OABC et ODEF sont disposés comme l'indique la figure ci-dessous et $OA \neq OD$.



1) a) Démontrer que la droite (EB) est un axe de symétrie de la figure.

b) En déduire que : $DCO = OAF$

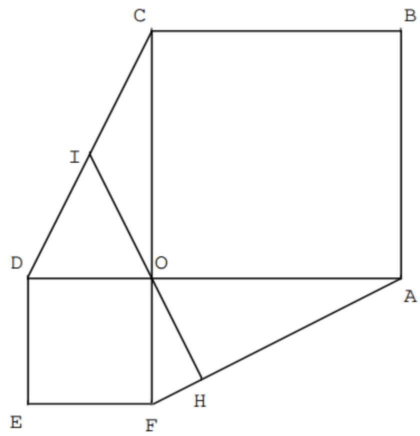
2)I est le milieu du segment [DC] et la droite (OI) coupe la droite (FA) en H.

a) Démontrer que le triangle DOI est isocèle.

b) Démontrer que $HOA = CDO$ (angles d'un triangle isocèle, angles opposés par le sommet).

3)En déduire, en utilisant les questions précédentes, que les droites (OI) et (AF) sont perpendiculaires.

Solution :1)a) Démontrons que la droite (EB) est un axe de symétrie de la figure.



Les diagonales d'un carré sont des axes de symétrie, donc (EB) est un axe de symétrie du carré ODEF et Aussi du carré OABC, donc (EB) est un axe de symétrie de la figure.

b) Nous allons en déduire que $DCO = OAF$

Par la symétrie axiale d'axe (EB), l'image de D est F, l'image de C est A et l'image de O est O.

Donc l'image de DCO est OAF et ces angles sont égaux car les réflexions conservent les angles.

2) I est le milieu du segment [DC] et la droite (OI) coupe la droite (FA) en H.

a) Démontrons que le triangle DOI est isocèle.

Le triangle DOI est rectangle, donc la médiane [IO] issue de l'angle droit, mesure la moitié de L'hypoténuse. Autrement dit, IO = ID = IC. Comme IO = ID, le triangle DOI est isocèle en I.

b) Démontrons que $HOA = CDO$ (angles d'un triangle isocèle, angles opposés par le sommet).

Le triangle DOI est isocèle, donc ses deux angles à la base et sont égaux.

Les angles DOI et HOA Sont opposés par le sommet, donc égaux également.

On a donc : $DIO = DOI = HOA$

Et donc on a :

3) Nous allons en déduire, en utilisant les questions précédentes, que les droites (OI) et (AF) sont Perpendiculaires.

Comme le triangle DOI est rectangle, les angles CDO et DCO sont complémentaires.

Comme : $CDO = HOA$ et $DCO = OAF$ alors les angles HOA et OAF sont complémentaires également. Ceci prouve que le triangle OAH est rectangle et donc que les droites (OI) et (AF) sont perpendiculaires.

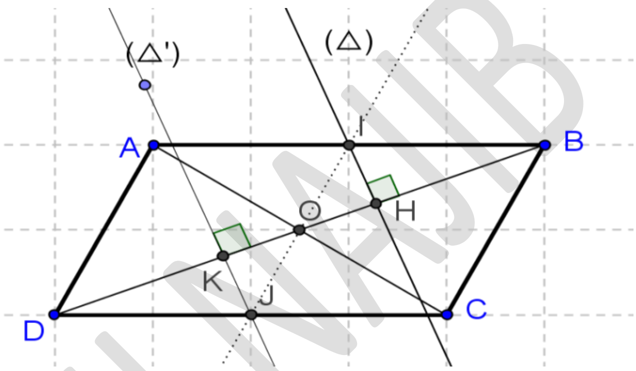
Exercice 4 : (***) $ABCD$ un parallélogramme de centre O

Les points : I , J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$

Les points : H , K sont les projections orthogonales respectives des points I , J sur la droite (BD).

Montrer que : $IHJK$ est un parallélogramme

Solution :



• On a : O est le centre de symétrie du parallélogramme $ABCD$

• On a : $S_O(A) = C$ et $S_O(B) = D$ et I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[CD]$

Puisque la symétrie centrale conserve le milieu alors : $S_O(I) = J$

• Puisque $O \in (BD)$ alors $S_O((BD)) = (BD)$

Soit (Δ) la droite qui passe par le point I et perpendiculaire a (BD) donc l'image de la droite (Δ) par S_O

Est la droite qui passe par le point J et perpendiculaire a (Δ) (conservation de la perpendiculaire)

On a : $(BD) \cap (\Delta) = \{H\}$ donc : $S_O((BD)) \cap S_O((\Delta)) = \{S_O(H)\}$ c'est-à-dire : $(BD) \cap (\Delta') = \{S_O(H)\}$

Donc : $S_O(H) = K$ par suite : et O le milieu du segment $[HK]$

Et puisque : les diagonales $[IJ]$ et $[HK]$ ont le même milieu O alors : $IHJK$ est un parallélogramme

Exercice 5 : (***) Soit $ABCD$ un trapèze tel que : $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$

Soit I le milieu du segment $[CD]$ et J un point tel que : $ACJD$ est un parallélogramme

On considère la translation $t_{\overrightarrow{AD}}$ de vecteur $\overrightarrow{AD}$

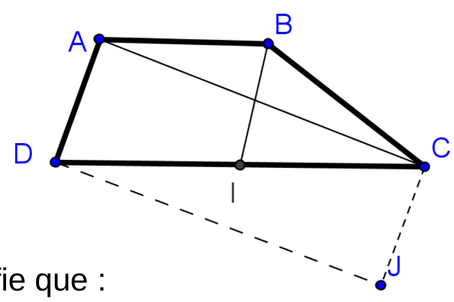
1) Déterminer les images des points A et C par la translation $t_{\overrightarrow{AD}}$

2) Montrer que : $t_{\overrightarrow{AD}}(B) = I$

3) En déduire que : $(IJ) \parallel (BC)$

Solution : 1) Déterminons les images des points A et C Par la translation $t_{\overrightarrow{AD}}$

• Déterminons $t_{\overrightarrow{AB}}(A)$?



Soit A' est l'image du point A par la translation $t_{\overrightarrow{AD}}$

Cela signifie que : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD}$ c'est-à-dire $A' = D$

Donc : $t_{\overrightarrow{AD}}(A) = D$

• Déterminons $t_{\overrightarrow{AD}}(C)$?

Soit C' est l'image du point C par la translation $t_{\overrightarrow{AD}}$ cela signifie que : $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD}$

Et puisque : $ACJD$ est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CJ}$

Alors : $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CJ}$ c'est-à-dire $C' = J$ donc : $t_{\overrightarrow{AD}}(C) = J$

2) Montrer que : $t_{\overrightarrow{AD}}(B)=I$

On a : $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}$ et I le milieu du segment $[CD]$ donc : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DI}$ Par suite $ABID$ est un parallélogramme

Donc : $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AD}$ et par suite : $t_{\overrightarrow{AD}}(B)=I$

3) déduction que : $(IJ)\parallel(BC)$?

Puisque : $t_{\overrightarrow{AD}}(C)=J$ et $t_{\overrightarrow{AD}}(B)=I$ d'après la propriété caractéristique de la translation on a : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{IJ}$ et par suite : $(IJ)\parallel(BC)$

Exercice 6 : (*) Écrire l'expression vectorielle suivante : $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MO}$ en utilisant une homothétie

Solution : $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MO}$ Equivaut à : $\overrightarrow{ON}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OM}$ Equivaut à : $h(M)=N$

Avec : $h_{\left(O,-\frac{1}{3}\right)}$ l'homothétie de centre O et de rapport $k=-\frac{1}{3}$

Exercice 7 : (**) Déterminer dans les cas suivants le rapport k de l'homothétie h de centre A et qui transforme B en C

1) $6\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ 2) $\overrightarrow{CA}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$ 3) $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Solution: soit $h(A,k)$ l'homothétie h de centre A et de rapport k et $h(B)=C$

$h(B)=C$ Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$

1) $6\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=\frac{2}{6}\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $k=\frac{1}{3}$ donc $h\left(A,\frac{1}{3}\right)$: le rapport de l'homothétie h est : $k=\frac{1}{3}$

2) $\overrightarrow{CA}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $k=-\frac{5}{6}$ donc $h\left(A,-\frac{5}{6}\right)$: le rapport de l'homothétie h est : $k=-\frac{5}{6}$

3) $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BA}$

Equivaut à : $2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $k=\frac{3}{2}$ donc $h\left(A,\frac{3}{2}\right)$: le rapport de l'homothétie h est : $k=\frac{3}{2}$

Exercice 8 : (***) On considère deux points A et B et une homothétie h qui transforme A en C et laisse invariant le point B de sorte que : $\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$
Trouver le rapport k de cette homothétie

Solution : nous avons : $h(A)=C$ et $h(B)=B'=B$

D'après la propriété caractéristique de l'homothétie

On a ; $\overrightarrow{CB}=k\overrightarrow{AB}$ (1)

D'autre part nous avons :

$\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ Équivaut à : $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{CB}=4\overrightarrow{AB}\ (2)$

De (1) et (2) nous déduisons : $k=4$

Exercice 9 : (***) Soit deux points A et B du plan et soit h une transformation du plan qui transforme chaque point M en M' tel que : $\overrightarrow{M'A}-2\overrightarrow{M'B}-\overrightarrow{M'M}=\vec{0}$

1) Déterminer les points invariants par la transformation h

2)Montrer que : h est une homothétie et trouver le centre et le rapport k de cette homothétie

Solution :

1) Déterminons les points invariants par la transformation h

Soit Ω un point invariant par la transformation h

Ω un point invariant par la transformation h signifie que : $h(\Omega)=\Omega$

Signifie que : $\overrightarrow{\Omega A}-2\overrightarrow{\Omega B}-\overrightarrow{\Omega\Omega}=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{\Omega A}-2\left(\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{AB}\right)+\vec{0}=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{\Omega A}-2\overrightarrow{\Omega A}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Signifie que : $-\overrightarrow{\Omega A}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{A\Omega}=2\overrightarrow{AB}$

Donc : le point invariant par la transformation h vérifie : $\overrightarrow{A\Omega}=2\overrightarrow{AB}$

2)Montrons que : h est une homothétie

Soit M un point du plan et $h(M)=M'$

Équivaut à : $\overrightarrow{M'A}-2\overrightarrow{M'B}-\overrightarrow{M'M}=\vec{0}$

Équivaut à : $\left(\overrightarrow{M'\Omega}+\overrightarrow{\Omega A}\right)-2\left(\overrightarrow{M'\Omega}+\overrightarrow{\Omega B}\right)-\left(\overrightarrow{M'\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}\right)=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{M'\Omega}+\overrightarrow{\Omega A}-2\overrightarrow{M'\Omega}-2\overrightarrow{\Omega B}-\overrightarrow{M'\Omega}-\overrightarrow{\Omega M}=\vec{0}$

Équivaut à : $-2\overrightarrow{M'\Omega}+\left(\overrightarrow{\Omega A}-2\overrightarrow{\Omega B}\right)-\overrightarrow{\Omega M}=\vec{0}$ et puisque : $\overrightarrow{A\Omega}=2\overrightarrow{AB}$ alors : $\overrightarrow{A\Omega}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Équivaut à : $-2\overrightarrow{M'\Omega}-\overrightarrow{\Omega M}=\vec{0}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{\Omega M'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega M}$

Cela veut dire que : h est une homothétie de centre Ω et de rapport $k=\frac{1}{2}$

Exercice 10 : (***) Soit ABC un triangle et soient les points M et N tels que :

$\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $5\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{CN}=\vec{0}$

On considère l'homothétie h de centre A et de rapport $k=-\frac{1}{4}$

1) Montrer que : $h(B)=M$ et $h(C)=N$

2) Faite une figure

3) Montrer que : $BC=4MN$

4) Montrer que : $(MN)\parallel(BC)$

Solution :1) a) Montrons que : $h(B)=M$

On a : $\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ ceci signifie que l'image de B par l'homothétie h est M

C'est-à-dire : $h(B)=M$

b) Montrons que : $h(C)=N$

Il suffit de montrer que : $\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

On a : $5\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{CN}=\vec{0}$ donc : $5\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$

Donc : $5\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

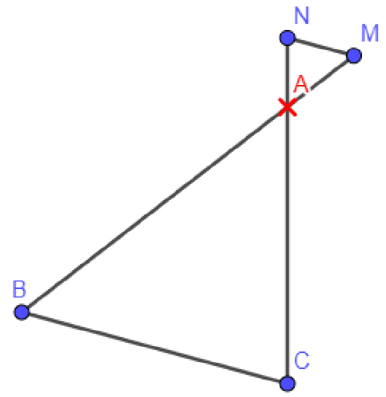
Donc : $5\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AC}$

Donc : $4\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

Par suite : $h(C)=N$

2) La figure



3) Montrons que : $BC=4MN$

On a : $\begin{cases} h(B)=M \\ h(C)=N \end{cases}$ et par suite : D'après la propriété caractéristique on obtient : $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

Par passage à la norme on obtient : $\left\|\overrightarrow{MN}\right\|=\left\|-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\right\|$

Donc : $MN=\left|-\frac{1}{4}\right|\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$

Donc : $MN=\frac{1}{4}BC$ c'est-à-dire : $BC=4MN$

4) Montrons que : $(MN)\parallel(BC)$

On a : $\begin{cases} h(B)=M \\ h(C)=N \end{cases}$ donc : $h((BC))=(MN)$

Et puisque l'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle

Donc : $(MN)\parallel(BC)$

Exercice 11 : (***) Soit ABC un triangle et $I\in[BC]$ tel que : $I\neq B$ et $I\neq C$

Et soit G le point tel que : $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AI}$

1) Faite une figure

2)On considère l'homothétie h de centre I et de rapport k tel que : $h(A)=G$

a) Montrer que le rapport de l'homothétie est $k=\frac{1}{4}$

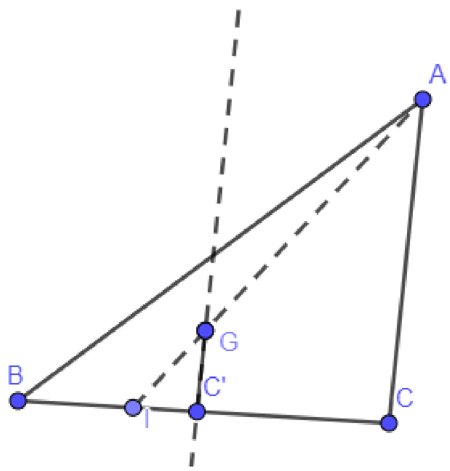
b) Déterminer l'image de la droite (BC) par l'homothétie h.

Justifier votre réponse.

c) Déterminer l'image de la droite (AC) par l'homothétie h.

Puis construire le point C' tel que : $h(C)=C'$

Solution :1) La figure



2)On considère l'homothétie h de centre I et de rapport k tel que : $h(A)=G$

a) Montrons que le rapport de l'homothétie est $k=\frac{1}{4}$

On a : $h(A)=G$ donc : $\overrightarrow{IG}=k\overrightarrow{IA}$

D'autre part, on a : $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AI}$ donc : $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AI}$

Donc : $\overrightarrow{IG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AI}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{IG}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}$

Donc : $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{IA}$

Ce qui signifie que le rapport de l'homothétie est $k=\frac{1}{4}$

b) Déterminons l'image de la droite (BC) par l'homothétie h.

On a : $I\in(BC)$ donc : $h((BC))=(BC)$

c) Déterminons l'image de la droite (AC) par l'homothétie h.

On a : $h(A)=G$ donc : $h((AC))$ est la droite qui passe par G est parallèle (AC)

On a : $h(C)=C'$ donc : C' appartient à la droite qui passe par G est parallèle (AC)

et $C'\in h((BC))=(BC)$ appartient à la droite qui passe par G est parallèle (AC)

Donc : C' est le point d'intersection des droites (BC) et la droite qui passe par G est parallèle (AC)

Exercice 12 : (***) ABC un triangle tel que : $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et m un paramètre réel

On considère une transformation T du plan qui transforme chaque point M en M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'}=3m\overrightarrow{MA}+\left(m+\frac{4}{3}\right)\overrightarrow{MB}-4\left(m+\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{MC}$$

1) Montrer que pour tout réel m on a T est une translation dont on déterminera son vecteur
2) Déterminer l'image de la droite (BC) par la translation T et en déduire l'image de la droite (AB) par T

Solution : 1) Soit M un point M du plan :

$T(M)=M'$ Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=3m\overrightarrow{MA}+\left(m+\frac{4}{3}\right)\overrightarrow{MB}-4\left(m+\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{MC}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=3m\overrightarrow{MA}+m\overrightarrow{MB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{MB}-4m\overrightarrow{MC}-\frac{4}{3}\overrightarrow{MC}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=m\left(3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}\right)+\frac{4}{3}\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=m\left(3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-4\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)\right)+\frac{4}{3}\left(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MB}\right)$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=m\left(3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{AC}\right)+\frac{4}{3}\left(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MB}\right)$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=m\left(\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}\right)+\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$

Et puisque : $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ alors : $\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Donc : $\overrightarrow{MM'}=\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$ c'est-à-dire : $t_{\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}}(M)=M'$

Donc : $T=t_{\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}}$ est la translation dont de vecteur $\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$

2) Déterminons l'image de la droite (BC) par la translation $T = t_{\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}}$

On a : $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc les points A et B et C sont des points alignés

Posons : $t_{\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}}(B) = B'$ signifie que : $\overrightarrow{BB'} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$ donc : $B' \in (BC)$

De même si $t_{\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}}(C) = C'$ signifie que : $\overrightarrow{CC'} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$ donc : $C' \in (BC)$

Donc : $(B'C') = (BC)$ et par suite : $t_{\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}}(BC) = (BC)$

Et puisque : points A et B et C sont des points alignés alors : $(AB) = (BC)$ par suite :
$t_{\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}}(AB) = (BC)$

Exercice 13 : (****) Soit ABC un triangle

On associe à chaque point M du segment $[BC]$ Le point M' tel que M le milieu du segment $[AM']$

1) Montrer qu'il existe une homothétie h tel que : $h(M) = M'$ pour tous point du segment $[BC]$

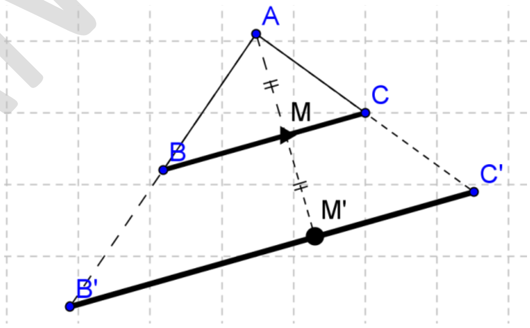
2) En déduire l'ensemble (E) des points M' lorsque M varie sur le segment $[BC]$

Solution : 1) On a M le milieu du segment $[AM']$ donc :

$\overrightarrow{AM'} = 2\overrightarrow{AM}$

C'est-à-dire : M' est l'image du point M par l'homothétie h de centre A et de rapport : $k = 2$

2)Si le point M varie sur Le segment $[BC]$ alors son image M' varie sur l'image du segment $[BC]$ par l'homothétie h de centre A et de rapport : $k = 2$



C'est-à-dire : M' varie sur le segment $[B'C']$ avec :

$h(B) = B'$ et $h(C) = C'$

($\overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'} = 2\overrightarrow{AC}$)

Donc l'ensemble (E) des points M' lorsque M varie sur le segment $[BC]$ est le segment $[B'C']$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien