Tronc commun Sciences BIOF

# Correction Série N°2 : TRIGONOMÉTRIE2

*Partie 2 : Equations et inéquations trigonométriques*

**Exercice 1 :** (*) A l'aide d'un cercle trigonométrique seulement, donner toutes les valeurs possibles de $x$ vérifiant les conditions données.

1) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ avec : $x\in\left]-\pi,\pi\right]$

1) $\cos x=0$ et $\sin x=-1$ avec : $x\in\left[-2\pi,3\pi\right]$

**Solution :** 1) $x=\frac{\pi}{4}$ 2) $x\in\left\{-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}$

**Exercice 2 :** (*) (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\sin^2 x=\frac{1}{2}$ b) $2\sin x-3=0$ c) $2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1=0$

d) $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{2}=0$ e) $\sin(2x)=\cos(3x)$ f) $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\sqrt{3}$

g) $\sqrt{2}\cos x+2=0$

**Solution :** a) $\sin^2 x=\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin^2 x-\frac{1}{2}=0$

Équivaut à : $\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$

Équivaut à : $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c'est-à-dire : $\sin x=\sin\frac{\pi}{4}$ ou $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\pi-\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$

Ainsi : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi;-\frac{\pi}{4}+2k\pi;\frac{5\pi}{4}+2k\pi;\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right\}$ *avec* $k\in\mathbb{Z}$

b) $2\sin x-3=0$ Équivaut à : $2\sin x=3$

Équivaut à : $\sin x=\frac{3}{2}\notin[-1;1]$

Alors l'équation : $2\sin x-3=0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ et on a : $S_{\mathbb{R}}=\varnothing$.

c) On a : $2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1=0$ Équivaut à : $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

Équivaut à : $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Équivaut à : $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

d) $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{2}=0$ Équivaut à : $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}$ Équivaut à : $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Équivaut à : $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$

Équivaut à : $x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ *ou* $x+\frac{\pi}{3}=\pi-\left(\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ *ou* $x=\pi-\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{12}+2k\pi$ *ou* $x=\frac{5\pi}{12}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{12}+2k\pi\ ;\ \frac{5\pi}{12}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

e) On a : $\sin(2x)=\cos(3x)$ équivaut à : $\sin(2x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$

Équivaut à : $2x=\frac{\pi}{2}-3x+2k\pi$ ou $2x=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $5x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $-x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}$ ou $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5} / k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

f) On a : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\sqrt{3}$ équivaut à : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Équivaut à : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$ équivaut à : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ Équivaut à : $\frac{\pi}{4}-x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$

Équivaut à : $-x=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+k\pi$ cad $x=\frac{7\pi}{12}+k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{7\pi}{12}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

g) $\sqrt{2}\cos x+2=0$ Équivaut à : $\sqrt{2}\cos x=-2$

Équivaut à : $\cos x=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\frac{2\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}\notin[-1;1]$

Alors l'équation : $\sqrt{2}\cos x+2=0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ et on a : $S_{\mathbb{R}}=\varnothing$.

**Exercice 3 :** (**) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) En déduire les solutions dans $]-\pi,\pi]$ de l'équation : $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

**Solution :1)** $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Donc : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{\pi}{6} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z} \right\}$

2) Résolution dans $\left]-\pi, \pi\right]$ de l'équation

Méthode1 : (l'encadrement)

a) Encadrement de : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ : $-\pi < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi$ Équivaut à : $-\pi - \frac{\pi}{6} < 2k\pi \leq \pi - \frac{\pi}{6}$

Équivaut à : $-\frac{7\pi}{6} < 2k\pi \leq \frac{5\pi}{6}$ Équivaut à : $-\frac{7}{6} < 2k \leq \frac{5}{6}$ Équivaut à : $-\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{5}{12}$

C'est-à-dire : $-0,5... \leq k \leq 0,4...$ et $k \in \mathbb{Z}$ Donc $k = 0$

Pour $k = 0$ on remplace on trouve $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2 \times 0 \times \pi = \frac{\pi}{6}$

b) Encadrement de $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ : $-\pi < -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi$

Donc : $-1 < -\frac{1}{6} + 2k \leq 1$ c'est-à-dire : $-1 + \frac{1}{6} < 2k \leq 1 + \frac{1}{6}$

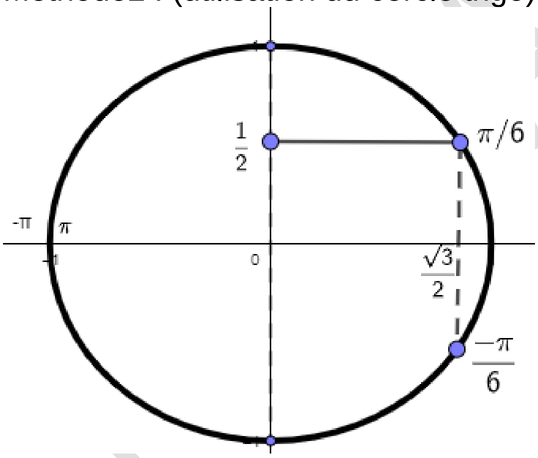
Donc : $-\frac{5}{6} < 2k \leq \frac{7}{6}$ c'est-à-dire : $-\frac{5}{12} < k \leq \frac{7}{12}$

Donc $-0,... \leq k \leq 0,...$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ on remplace on trouve : $x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2 \times 0 \times \pi = -\frac{\pi}{6}$

Donc $S_{]-\pi,\pi]} = \left\{ -\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{6} \right\}$

Méthode2 : (utilisation du cercle trigo)




Donc : $S_{]-\pi,\pi]} = \left\{ -\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{6} \right\}$

**Exercice 4 :** (**) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) En déduire les solutions dans $\left]-\pi, \pi\right]$ de l'équation $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**Solution :1)** $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

2) Résolution dans $\left]-\pi, \pi\right]$ de l'équation

Méthode1 : (l'encadrement)

a) Encadrement de : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ : $-\pi < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$ Équivaut à : $-\pi - \frac{\pi}{3} < 2k\pi \leq \pi - \frac{\pi}{3}$

Équivaut à : $-\frac{4\pi}{3} < 2k\pi \leq \frac{2\pi}{3}$ Équivaut à : $-\frac{4}{3} < 2k \leq \frac{2}{3}$ Équivaut à : $-\frac{2}{3} \leq k \leq \frac{1}{3}$

C'est-à-dire : $-0,6... \leq k \leq 0,3...$ et $k \in \mathbb{Z}$ Donc $k = 0$

Pour $k = 0$ on remplace on trouve $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2 \times 0 \times \pi = \frac{\pi}{3}$

b) Encadrement de $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ : $-\pi < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$

Donc : $-1 < \frac{2}{3} + 2k \leq 1$ c'est-à-dire : $-1 - \frac{2}{3} < 2k \leq 1 - \frac{2}{3}$

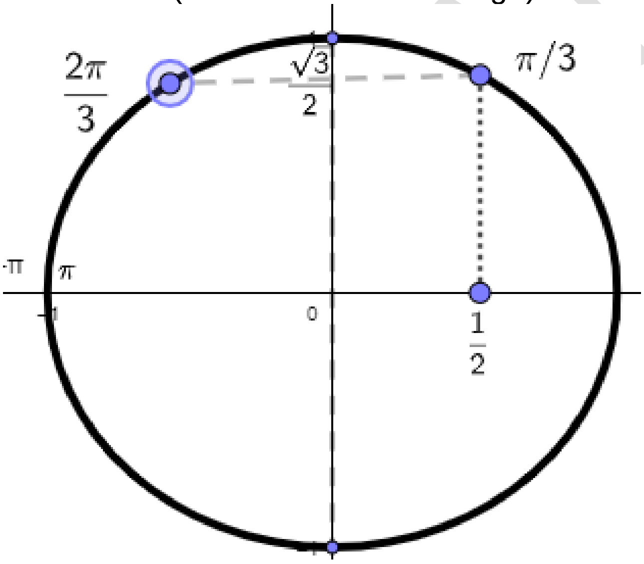
Donc : $-\frac{5}{3} < 2k \leq \frac{1}{3}$ c'est-à-dire : $-\frac{5}{6} < k \leq \frac{1}{6}$

Donc $-0,8... \leq k \leq 0,16...$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ on remplace on trouve : $x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2 \times 0 \times \pi = \frac{2\pi}{3}$

Donc $S_{\left]-\pi,\pi\right]} = \left\{ \frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3} \right\}$

Méthode2 : (utilisation du cercle trigo)

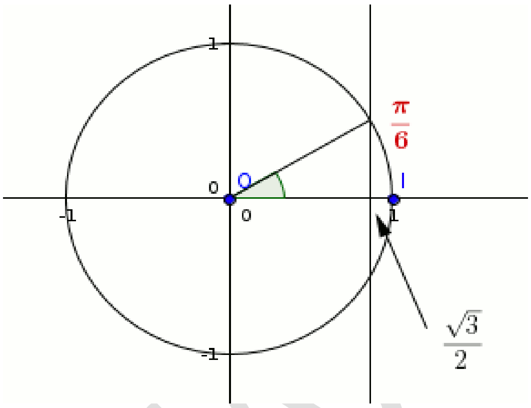



Donc $S_{\left]-\pi,\pi\right]} = \left\{ \frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3} \right\}$

**Exercice 5 :** (**) Résoudre dans $\left]-\pi, \pi\right]$ l'équation : $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**Solution :** Étape 1 : Utiliser le cercle trigonométrique et/ou le tableau de valeurs remarquables afin de retrouver une valeur dont le cosinus vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Le cosinus se lit sur l'axe des abscisses




On peut dire que $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est le cosinus de $\frac{\pi}{6}$ par exemple.

Étape 2 : Utiliser ce résultat pour écrire l'équation proposée sous la forme " $\cos U = \cos V$ "

$\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos 2x = \cos \frac{\pi}{6}$

On applique alors la propriété

Donc on a : $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{6} + 2k'\pi$

Je divise par 2 chaque membre de chaque égalité,

j'obtiens : $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{12} + k'\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$

- Étape3 :Mais il ne va falloir garder que les valeurs de $x$ dans l'intervalle imposé c'est à dire dans $\left]-\pi, \pi\right]$

on a deux méthodes soit encadrement ou on donnant des valeurs a $k$

Pour la première série de valeurs : $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Prenons par exemple la valeur $k = -2$ et remplaçons on obtient $x = \frac{\pi}{12} - 2\pi$ ; cette valeur n'appartient pas à $\left]-\pi, \pi\right]$ ; il est donc évident que des valeurs de $k$ inférieures à -2 ne conviendront pas non plus. Par contre, si je choisis $k = -1$ :on obtient/ $x = \frac{\pi}{12} - \pi$ ; cette valeur appartient à $\left]-\pi, \pi\right]$

Il s'agit donc de trouver toutes les valeurs de $k$ telles que les solutions trouvées appartiennent bien à l'intervalle imposé, en appliquant cette démarche de manière systématique.

pour $k = -1$ : $x_1 = \frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{11\pi}{12}$ convient car appartient à $\left]-\pi, \pi\right]$

pour $k = 0$ : $x_2 = \frac{\pi}{12}$ convient car appartient à $\left]-\pi, \pi\right]$

pour $k = 1$ : $x = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12}$ ne convient pas car n'appartient pas à $\left]-\pi, \pi\right]$

Il est inutile de poursuivre pour la première série de valeur (car si pour $k = 1$, la valeur trouvée n'appartient plus à l'intervalle, il en sera de même *a fortiori* pour des valeurs supérieures de $k$)

Faisons de même pour la deuxième série de valeurs

$x = -\frac{\pi}{12} + k'\pi$ avec $k'$ dans **Z**

pour $k' = -1$ : $x = -\frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{13\pi}{12}$ ne convient pas car n'appartient pas à $\left]-\pi, \pi\right]$

pour $k' = 0$ : $x_3 = -\frac{\pi}{12}$ convient car appartient à $\left]-\pi, \pi\right]$

pour $k' = 1$ : $x = -\frac{\pi}{12} + \pi = \frac{11\pi}{12}$ convient pas car appartient à $\left]-\pi, \pi\right]$

pour $k' = 2$ : $x = -\frac{\pi}{12} + 2\pi$ ne convient pas car n'appartient pas à $\left]-\pi, \pi\right]$

Donc : l'ensemble solution de l'équation dans $\left]-\pi, \pi\right]$ est donc: $S = \left\{-\frac{11\pi}{12}; -\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right\}$

**Exercice 6 :** (**) Résoudre dans $[0,2\pi]$de l'équation : $\cos 3x=-\cos\frac{\pi}{7}$

**Solution :** $\cos 3x=-\cos\frac{\pi}{7}$ Équivaut à : $\cos 3x=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)$

Équivaut à : $\cos 3x=\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$

Équivaut à : $3x=\frac{6\pi}{7}+2k\pi$ ou $3x=-\frac{6\pi}{7}+2k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{2\pi}{7}+\frac{2k\pi}{3}$ ou $x=-\frac{2\pi}{7}+\frac{2k\pi}{3}$

a) Encadrement de : $x=\frac{2\pi}{7}+\frac{2k\pi}{3}$ : $0\le\frac{2\pi}{7}+\frac{2k\pi}{3}\le 2\pi$

Donc : $0\le\frac{2}{7}+\frac{2k}{3}\le 2$ c'est-à-dire : $0-\frac{2}{7}<\frac{2k}{3}\le 2-\frac{2}{7}$

Donc : $-\frac{2}{7}<\frac{2k}{3}\le\frac{12}{7}$ c'est-à-dire : $-\frac{6}{7}<2k\le\frac{36}{7}$ c'est-à-dire : $-\frac{3}{7}<k\le\frac{18}{7}$

Donc $-0,4...\le k\le 2,5...$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ ou $k=1$ ou $k=2$on remplace on trouve :

Si $k=0$ alors : $x=\frac{2\pi}{7}$

Si $k=1$ alors : $x=\frac{2\pi}{7}+\frac{2\pi}{3}=\frac{20\pi}{21}$

Si $k=2$ alors : $x=\frac{2\pi}{7}+\frac{4\pi}{3}=\frac{34\pi}{21}$

b) Encadrement de : $x=-\frac{2\pi}{7}+\frac{2k\pi}{3}$ : $0\le-\frac{2\pi}{7}+\frac{2k\pi}{3}\le 2\pi$

Donc : $0\le-\frac{2}{7}+\frac{2k}{3}\le 2$ c'est-à-dire : $0+\frac{2}{7}<\frac{2k}{3}\le 2+\frac{2}{7}$

Donc : $\frac{2}{7}<\frac{2k}{3}\le\frac{16}{7}$ c'est-à-dire : $\frac{6}{7}<2k\le\frac{48}{7}$ c'est-à-dire : $\frac{3}{7}<k\le\frac{24}{7}$

Donc $0,4...\le k\le 3,4...$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=1$ ou $k=2$ ou $k=3$on remplace on trouve :

Si $k=1$ alors : $x=-\frac{2\pi}{7}+\frac{2\pi}{3}=\frac{8\pi}{21}$

Si $k=2$ alors : $x=-\frac{2\pi}{7}+\frac{4\pi}{3}=\frac{22\pi}{21}$

Si $k=3$ alors : $x=-\frac{2\pi}{7}+\frac{6\pi}{3}=\frac{36\pi}{21}=\frac{12\pi}{7}$

Donc $S_{[0,2\pi]}=\left\{\frac{2\pi}{7};\frac{20\pi}{21};\frac{22\pi}{21};\frac{34\pi}{21};\frac{12\pi}{7}\right\}$

**Exercice 7 :** (*) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\tan x=\sqrt{3}$

2) Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation suivante : $\tan x=\sqrt{3}$

**Solution :**1) On a : $\tan x=\sqrt{3}$ est définie dans $\mathbb{R}$ si et seulement si : $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ avec ; $k\in\mathbb{Z}$

On sait que : $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ signifie que : $\tan x=\tan\frac{\pi}{3}$ si et seulement si : $x=\frac{\pi}{3}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$

Donc L'ensemble de solution de l'équation dans $\mathbb{R}$ est : $S=\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) Résolution dans $\left]-\pi\,;\pi\right]$ l'équation : $\tan x=\sqrt{3}$

$\tan x=\sqrt{3}$ Signifie que : $x=\frac{\pi}{3}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$

On a deux méthodes soit l'encadrement ou en donnant des valeurs a $k$

Prenons par exemple la valeur $k=-2$ et remplaçons on obtient : $x=\frac{\pi}{3}-2\pi=-\frac{5\pi}{3}$ ; cette valeur n'appartient pas à $\left]-\pi,\pi\right]$ ; il est donc évident que des valeurs de $k$ inférieures à -2 ne conviendront pas non plus.

Par contre, si je choisis $k=-1$ : on obtient $x=\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{2\pi}{3}$ ; cette valeur appartient à $\left]-\pi,\pi\right]$.

En appliquant cette démarche de manière systématique :

pour $k=-1$ : $x_1=\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{2\pi}{3}$ convient car appartient à $\left]-\pi,\pi\right]$

pour $k=0$ : $x_2=\frac{\pi}{3}$ convient car appartient à $\left]-\pi,\pi\right]$

pour $k=1$ : $x=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3}$ ne convient pas car n'appartient pas à $\left]-\pi,\pi\right]$

Il est inutile de poursuivre (car si pour $k=1$, la valeur trouvée n'appartient plus à l'intervalle, il en sera de même *a fortiori* pour des valeurs supérieures de $k$)

Donc : les seules valeurs dans $\left]-\pi\,;\pi\right]$ sont : $x=\frac{\pi}{3}$ et $x=\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{2\pi}{3}$

Par suite : $S=\left\{-\frac{2\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}$

**Exercice 8 :** (**) Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation : $\tan x=-\tan\frac{\pi}{12}$

**Solution :** $\tan x=-\tan\frac{\pi}{12}$ Équivaut à : $\tan x=\tan\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$

Encadrement de : $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$ : $-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{12}+k\pi<\frac{\pi}{2}$

Donc : $-\frac{1}{2}<-\frac{1}{12}+k<\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}<k<\frac{1}{2}+\frac{1}{12}$ c'est-à-dire : $-\frac{5}{12}<k<\frac{7}{12}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $k=0$ par suite : $x=-\frac{\pi}{12}+0\times\pi=-\frac{\pi}{12}$

Donc $S_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}=\left\{-\frac{\pi}{12}\right\}$

**Exercice9 :** (***) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $(E)$ : $2\cos^2 x-3\sqrt{3}\cos x+3=0$

2) En déduire les solutions de l'équation $(E)$ dans $[0\,;\pi]$

**Solution :1)** On pose $t=\cos x$ et l'équation $(E)$ devient : $2t^2-3\sqrt{3}t+3=0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2-3\sqrt{3}t+3$ :

Calcul du discriminant : $\Delta=b^2-4ac=\left(-3\sqrt{3}\right)^2-4\times2\times3=27-24=3$

Les racines sont : $t_1=\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2\times2}=\frac{2\sqrt{3}}{2\times2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $t_2=\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2\times2}=\frac{4\sqrt{3}}{2\times2}=\sqrt{3}$

Donc : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos x = \sqrt{3}$

- Pour : $\cos x = \sqrt{3}$

On sait que : $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc l'équation $\cos x = \sqrt{3}$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$

- Pour : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \; ; \; \frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\; / k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) On a deux méthodes soit l'encadrement ou en donnant des valeurs a $k$

a) Pour : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Prenons par exemple la valeur $k = -1$ et remplaçons on obtient : $x = \frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6}$ ; cette valeur n'appartient pas à $[0\,;\pi]$ ; il est donc évident que des valeurs de $k$ inférieures à -1 ne conviendront pas non plus.

Par contre, si je choisis $k = 0$ : on obtient $x = \frac{\pi}{6}$ ; cette valeur appartient à $[0\,;\pi]$.

Pour $k = 1$ : $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi \notin [0\,;\pi]$

Il est inutile de poursuivre pour des valeurs supérieures à : 1

Donc : la seule valeur dans $[0\,;\pi]$ est : $x = \frac{\pi}{6}$

b) Pour : $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

La même démarche que précédemment

Pas de valeurs dans $[0\,;\pi]$

Conclusion : $S_{[0\,;\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$

**Exercice10 :** (***) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

**1)** $(E)$ : $\cos^3 x + \sin^2 x = -1$ **2)** $(F)$ : $\cos x + \sin x = 2$

**Solution :**1) $\cos^3 x + \sin^2 x = -1$ Équivaut à : $\cos^3 x + (1 - \cos^2 x) = -1$

Équivaut à : $\cos^3 x - \cos^2 x + 2 = 0$

On pose $t = \cos x$ et l'équation $(E)$ devient : $t^3 - t^2 + 2 = 0$

On cherche les racines du trinôme $t^3 - t^2 + 2$ :

On remarque que -1 est une racine évidente de : $t^3 - t^2 + 2$

Par la division euclidienne on trouve que : $t^3 - t^2 + 2 = (t+1)(t^2 - 2t + 2)$

Donc : $\cos^3 x - \cos^2 x + 2 = (\cos x + 1)(\cos^2 x - 2\cos x + 2)$

$\cos^3 x + (1 - \cos^2 x) = -1$ Équivaut à : $(\cos x + 1)(\cos^2 x - 2\cos x + 2) = 0$

Équivaut à : $\cos x+1=0$ ou $\cos^2 x-2\cos x+2=0$
Équivaut à : $\cos x=-1$ ou $\cos^2 x-2\cos x+1=-1$
Équivaut à : $\cos x=-1$ ou $(\cos x-1)^2=-1$ (impossible)
Équivaut à : $\cos x=-1$Équivaut à : $x=\pi+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$
Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\{\pi+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$

**2)** $(F)$ : $\cos x+\sin x=2$
$\cos x+\sin x=2$ Équivaut à : $2-\cos x-\sin x=0$
Équivaut à : $(1-\cos x)+(1-\sin x)=0$ et puisque : $1-\cos x\geq 0$ et $1-\sin x\geq 0$
Équivaut à : $1-\cos x=0$ et $1-\sin x=0$
Équivaut à : $\cos x=1$ et $\sin x=1$ cela est impossible : $S_{\mathbb{R}}=\varnothing$

**Exercice 11 :** (**) 1) Montrer que : $2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos(x+11\pi)-1=(\cos x+1)(2\cos x-1)$ si $x\in\mathbb{R}$

2) Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation suivante : $2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos(x+11\pi)-1=0 \quad (E)$

3) Placer sur le cercle trigonométrique munie d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ les solutions de l'équation $(E)$.

4) Soient $A$ ; $B$ ; $C$ les points trouvés dans la question 3)
Montrer que : $ABC$ est un triangle équilatéral

**Solution :**1) $2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos(x+11\pi)-1=2(\cos x)^2-\cos(x+10\pi+\pi)-1$
$=2(\cos x)^2-\cos(x+\pi)-1=2(\cos x)^2+\cos x-1$
Et on a $(\cos x+1)(2\cos x-1)=2(\cos x)^2+\cos x-1$
Donc : $2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos(x+11\pi)-1=(\cos x+1)(2\cos x-1)$ si $x\in\mathbb{R}$

2) $2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos(x+11\pi)-1=0$ Équivaut à : $(\cos x+1)(2\cos x-1)=0$

Équivaut à : $\cos x+1=0$ ou $2\cos x-1=0$ c'est-à-dire : $\cos x=-1$ ou $\cos x=\frac{1}{2}$

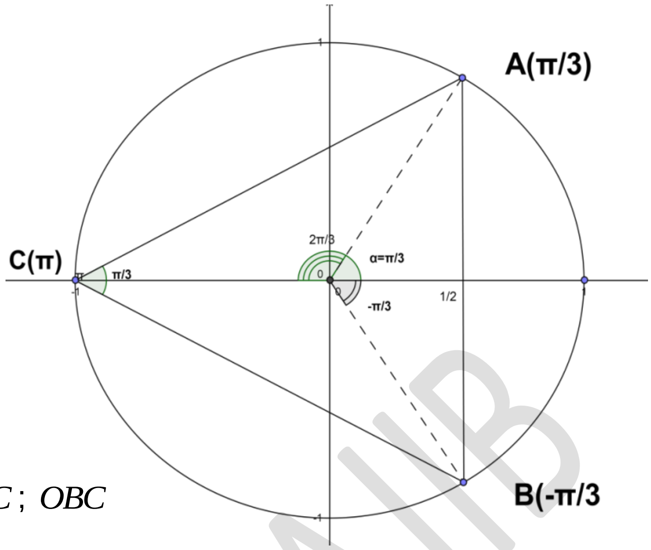
Équivaut à : $\cos x=-1$ ou $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $x=(2k+1)\pi$ ou $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

• Encadrement de $(2k+1)\pi$ : $-\pi<(2k+1)\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$
Donc $-1<2k+1\leq 1$ c'est-à-dire : $-2<2k\leq 0$ équivaut à : $-1<k\leq 0$ et $k\in\mathbb{Z}$
Donc $k=0$ et on trouve $x_1=\pi$

• Encadrement de $\frac{\pi}{3}+2k\pi$ : $-\pi<\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$ Donc $-1<\frac{1}{3}+2k\leq 1$
Donc $\frac{-4}{3}<2k\leq\frac{2}{3}$ cad $\frac{-2}{3}<k\leq\frac{1}{3}$ et $k\in\mathbb{Z}$
Donc $k=0$ et on trouve $x_2=\frac{\pi}{3}$

• Encadrement de $-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ : $-\pi<-\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$




Donc $-1<-\frac{1}{3}+2k\leq 1$ équivaut à : $\frac{-2}{3}<2k\leq\frac{4}{3}$

C'est-à-dire : $\frac{-1}{3}<k\leq\frac{2}{3}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ et on trouve $x_3=-\frac{\pi}{3}$

Donc $S_{]-\pi\,;\,\pi]}=\left\{\pi;\frac{\pi}{3};\frac{-\pi}{3}\right\}$

3) Voir figure.

4) Montrons que : $ABC$ est un triangle équilatéral :

On a : $OA=OB=OC$ donc les triangles : $OAB$ ; $OAC$ ; $OBC$ sont des triangles isocèles de sommet $O$

Exemple dans le triangle $OAB$ on a : $AOB=\frac{2\pi}{3}$ Donc : $OAB=OBA=\frac{\pi}{6}$

De même on déduit que : $OBC=OCB=OAC=OCA=\frac{\pi}{6}$ Équivaut à $ABC=BAC=ACB=\frac{\pi}{3}$

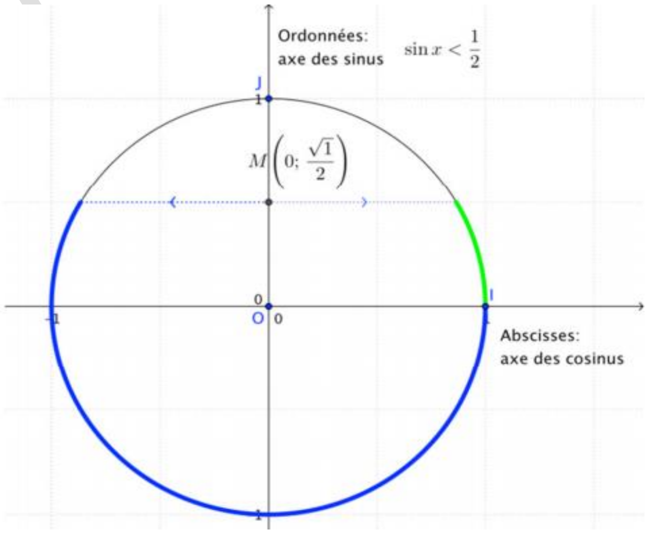
Par suite : $ABC$ est un triangle équilatéral

**Exercice12 :** (**) Résoudre dans $[0\,;\,2\pi]$ l'inéquation suivante : $\sin x<\frac{1}{2}$

**Solution :** $\sin x=\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x=\sin\frac{\pi}{6}$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$




Et puisque : $x\in[0;2\pi]$ alors : $x=\frac{\pi}{6}$ ou $x=\frac{5\pi}{6}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\sin x$ et $\frac{1}{2}$ dans $[0\,;\,2\pi]$

On trouve que : $\sin x<\frac{1}{2}$ Équivaut à :

$x\in\left]0;\frac{\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{6};2\pi\right[$

Donc : $S=\left]0;\frac{\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{6};2\pi\right[$

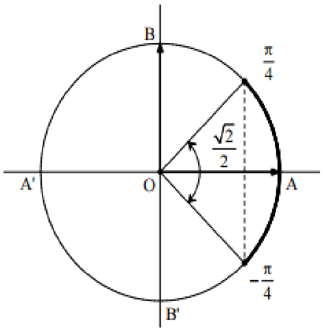
**Exercice13 :** (**) Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ l'inéquation suivante : $\cos x\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$

**Solution :** $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Et puisque : $x\in]-\pi;\pi]$ alors : $x=-\frac{\pi}{4}$ ou $x=\frac{\pi}{4}$

$\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\cos x \geq \cos\frac{\pi}{4}$



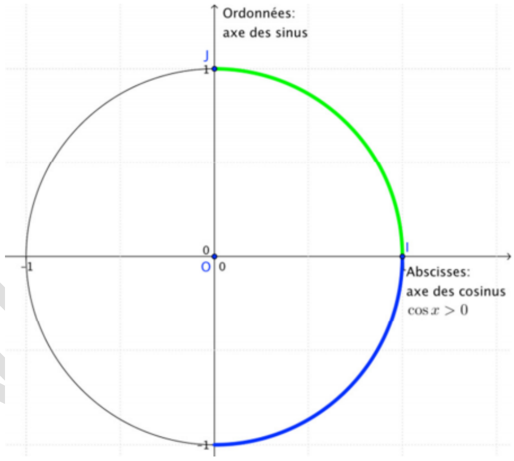

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\cos x$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$

On trouve que : $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $x \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

Donc : $S=\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

**Exercice14 :** (**) Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation suivante : $\cos x > 0$

**Solution :** $\cos x = 0$ Équivaut à : $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$




Et puisque : $x\in[0;2\pi]$ alors : $x=\frac{\pi}{2}$ ou $x=\frac{3\pi}{2}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\cos x$ et $0$ dans $[0;2\pi]$

Donc : $S=\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$

**Exercice15 :** (***) Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation suivante : $\sin 2x \leq -\frac{1}{2}$

**Solution :**

1iér étape : On pose : $X=2x$

$x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ Équivaut à : $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ Équivaut à : $-\pi\leq 2x\leq\pi$

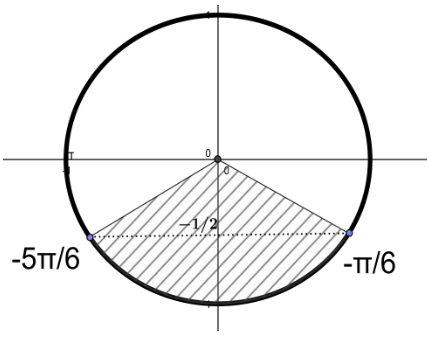
Équivaut à : $-\pi\leq X\leq\pi$

$\sin X=-\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin X=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $X=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $X=\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi$

Équivaut à : $X=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $X=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Et puisque : $X\in]-\pi;\pi]$ alors : $X=-\frac{\pi}{6}$ ou $X=-\frac{5\pi}{6}$




En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\sin x$ et $-\frac{1}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$ :

$\begin{cases}\sin X\leq-\frac{1}{2}\\ -\pi\leq X\leq\pi\end{cases}$ Équivaut à : $X\in\left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6}\right]$

2iér étape : Or : $X=2x$

$X \in \left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6}\right]$ Équivaut à : $-\frac{5\pi}{6} \le 2x \le -\frac{\pi}{6}$ Équivaut à : $-\frac{5\pi}{12} \le x \le -\frac{\pi}{12}$

Donc : $S = \left[-\frac{5\pi}{12};-\frac{\pi}{12}\right]$

**Exercice16 :** (**) Résoudre dans $[-\pi\,;\pi]$ l'inéquation suivante : $3\tan x-\sqrt{3} \ge 0$

**Solution :**

• L'inéquation $3\tan x-\sqrt{3} \ge 0$ est définie si et seulement si : $x \ne \frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in [-\pi\,;\pi]$ alors : $x \ne \frac{\pi}{2}$ et $x \ne -\frac{\pi}{2}$

• Résolution de l'équation : $3\tan x-\sqrt{3} = 0$

On a $3\tan x-\sqrt{3} = 0$ Équivaut à : $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

On sait que : $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

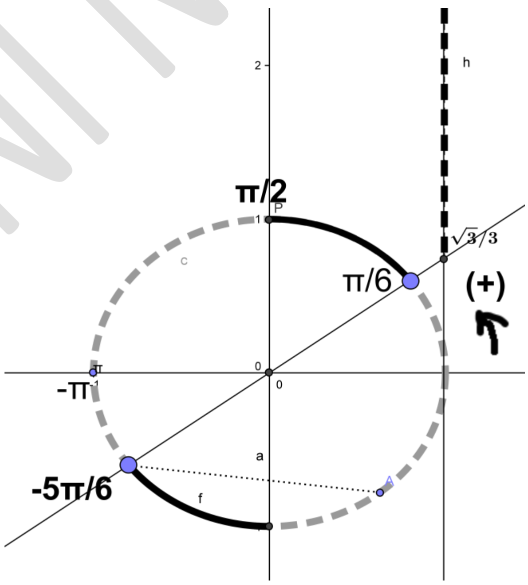
$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ Équivaut à : $x = \frac{\pi}{6}+k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in [-\pi\,;\pi]$ alors : $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = -\frac{5\pi}{6}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare

$\tan x$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}$ dans $[-\pi\,;\pi]$

On trouve que : $\tan x \succ \frac{\sqrt{3}}{3}$




Équivaut à : $x \in \left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{2}\right[ \cup \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$

Donc : $S = \left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{2}\right[ \cup \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$

**Exercice17 :** (*) Résoudre dans $S = \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ l'inéquation suivante : $\tan x \ge 1$

**Solution :** $S = \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

**Exercice18 :** (***) 1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $2\sin^2 x-9\sin x-5=0$ et en déduire les solutions dans $[0\,;2\pi]$

b) Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ l'inéquation suivante : $2\sin^2 x-9\sin x-5 \le 0$

2) Résoudre dans $[0\,;\pi]$ l'inéquation suivante : $(2\cos x-1)(\tan x+1) \ge 0$

**Solution :** 1) a) On pose $t=\sin x$ et l'équation $2\sin^2 x-9\sin x-5 \le 0$ devient : $2t^2-9t-5 \le 0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2-9t-5$ :

Calcul du discriminant : $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 121$

Les racines sont : $t_1 = \frac{9-\sqrt{121}}{2\times 2} = -\frac{1}{2}$ et $t_2 = \frac{9+\sqrt{121}}{2\times 2} = 5$ Donc $\sin x = -\frac{1}{2}$ et $\sin x = 5$

Or on sait que $-1 \le \sin x \le 1$ donc l'équation $\sin x = 5$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$\sin x = -\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ donc : $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

• Encadrement de $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ : $0 \le -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le 2\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $0 \le -\frac{1}{6} + 2k \le 2$ équivaut à : $\frac{1}{12} \le k \le \frac{13}{12}$

C'est-à-dire : $0,08 \le k \le 1,02$ et $k \in \mathbb{Z}$ Donc $k = 1$

Pour $k = 1$ on remplace on trouve $x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$

• Encadrement de $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ : $0 \le \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \le 2\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $0 \le \frac{7}{6} + 2k \le 2$ c'est-à-dire : $-\frac{7}{12} \le k \le \frac{5}{12}$

Donc $-0,5 \le k \le 0,41$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ on remplace on trouve $x_2 = \frac{7\pi}{6}$

Donc $S_{[0;2\pi]} = \left\{\frac{11\pi}{6} ; \frac{7\pi}{6}\right\}$

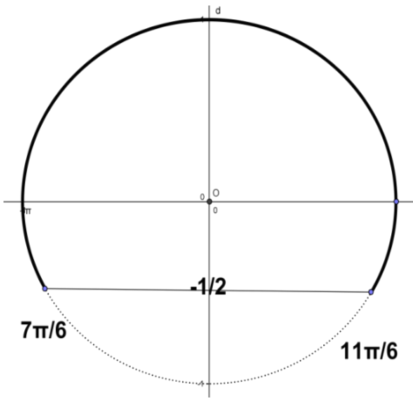
**1)** b) $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \le 0$ ssi $2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \le 0$

Or on sait que $-1 \le \sin x \le 1$ donc $-1 \le \sin x \le 1 < 5$ c'est-à-dire : $\sin x - 5 < 0$

Puisque $\sin x - 5 < 0$ et $2 > 0$ alors $2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \le 0$

Équivaut à : $\sin x + \frac{1}{2} \ge 0$

Équivaut à : $\sin x \ge -\frac{1}{2}$ équivaut à : $\sin x \ge \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$




L'arc en trait plein correspond à tous les points $M(x)$

Tel que : $x$ vérifie $\sin x \ge -\frac{1}{2}$

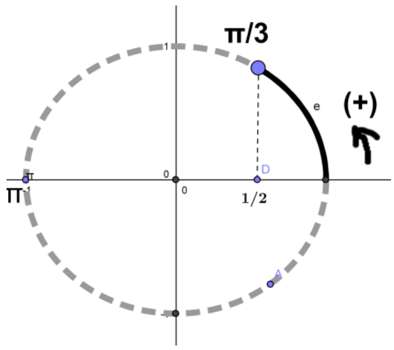
Donc $S = \left[0 ; \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6} ; 2\pi\right]$

**2)** l'inéquation $(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \ge 0$ est définie dans $[0 ; \pi]$ si et seulement si : $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$

Donc : $D = [0 ; \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

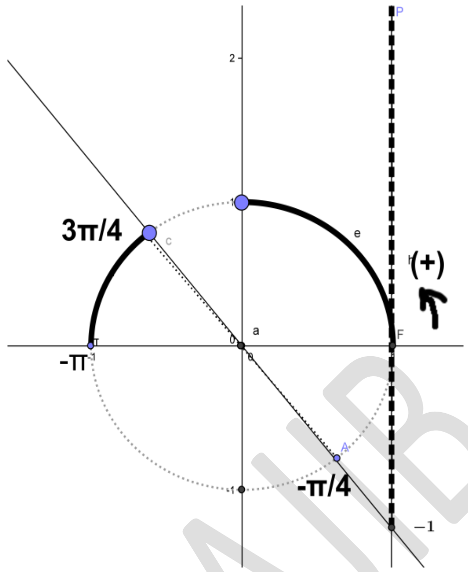
$2\cos x - 1 \ge 0$ Équivaut à : $\cos x \ge \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos x \ge \cos\frac{\pi}{3}$

$\tan x + 1 \ge 0$ Équivaut à : $\tan x \ge -1$ si et seulement si : $\tan x \ge \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$



| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{3\pi}{4}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2cosx-1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | \|\| | $-$ | \| | $-$ | |
| $tanx+1$ | | $+$ | \| | $+$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $produit$ | | $+$ | $0$ | $-$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | |

Donc : $S = \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$




*C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.*
*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien*