Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°3 : FONCTIONS - *Généralités*

Exercice 1 : (*) Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=3x^2-1$

1) Calculer les images de 1 ; $\sqrt{2}$ et -1 par f.
2) Déterminer les antécédents éventuels de 2 par f

Solution : 1) Calcul des images :

$f(1)=3\times1^2-1=3-1=2$ et $f(\sqrt{2})=3\times(\sqrt{2})^2-1=6-1=4$

$f(-1)=3\times(-1)^2-1=3-1=2$

2) x est l'antécédents de 2 par f signifie que 2 est l'image de x par f

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=2$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=2$

Équivaut à : $3\times x^2-1=2$

Équivaut à : $3\times x^2=2+1$ équivaut à : $3\times x^2=3$

Équivaut à : $x^2=1$

Équivaut à : $x=-1$ ou $x=1$

Finalement les antécédents de 2 par f sont -1 et 1.

Exercice 2 : (*) (**) (***)

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{2x+|x|}{x+3}-\dfrac{7x^2-5}{x-3}$ 2) $f(x)=\dfrac{-x+8}{4x^2-9}$ 3) $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^3-5x}$ 4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$.

5) $f(x)=\dfrac{|2x-5|}{|x|-2}$. 6) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$. 7) $f(x)=\sqrt{-2x(x-2)(x^2-8x+16)}$

8) $f(x)=\sqrt{2|x|-3}$. 9) $f(x)=\dfrac{2x-1}{|x|+x}$ 10) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-2\sqrt{x}-15}$

11) $f(x)=\dfrac{2\sin x}{\tan x-\sqrt{3}}$ 12) $f(x)=\dfrac{2x^2-2}{(3|x-5|-2|4-3x|)\sqrt{x+1}}$

Solution : 1) $f(x)=\dfrac{2x+|x|}{x+3}-\dfrac{7x^2-5}{x-3}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / x+3\neq0 \ et\ x-3\neq0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / x\neq-3 \ et\ x\neq3\}$

D'où : $D_f=\mathbb{R}-\{-3;3\}$

2) $f(x)=\dfrac{-x+8}{4x^2-9}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / 4x^2-9\neq0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / 4x^2\neq9\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R} / x^2\neq\dfrac{9}{4}\right\}$

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq -\sqrt{\frac{9}{4}} \;\; et \;\; x \neq \sqrt{\frac{9}{4}} \right\}$

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq -\frac{3}{2} \;\; et \;\; x \neq \frac{3}{2} \right\}$

D'où : $D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{3}{2} ; \frac{3}{2} \right\}$

3) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^3 - 5x}$

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x^3 - 5x \neq 0 \right\}$

$x^3 - 5x = 0$ Équivalent à : $x\left(x^2 - 5\right) = 0$

Équivalent à : $x = 0$ ou $x^2 - 5 = 0$

Équivalent à : $x = 0$ ou $x^2 = 5$ Équivalent à : $x = 0$ ou $x = -\sqrt{5}$ ou $x = \sqrt{5}$

D'où : $D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\sqrt{5} ; 0 ; \sqrt{5} \right\}$

4) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$. $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x + 2 \geq 0 \;\; et \;\; x - 1 \neq 0 \right\}$

Signifie : $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq -2 \;\; et \;\; x \neq 1 \right\}$

Donc : $D_f = [-2, 1[\cup]1, +\infty[$

5) $f(x) = \frac{|2x-5|}{|x|-2}$. $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, |x| - 2 \neq 0 \right\}$

$|x| - 2 = 0$ Signifie $|x| = 2$

Signifie $x = 2$ ou $x = -2$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{-2 ; 2\}$

6) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + x + 1 \geq 0 \right\}$

$a = 1$ et $b = 1$ et $c = 1$ donc : $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 \prec 0$

Et puisque : $a = 1 \succ 0$ alors : $x^2 + x + 1 \succ 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Par suite : $D_f = \mathbb{R}$

7) $f(x) = \sqrt{-2x(x-2)\left(x^2 - 8x + 16\right)}$

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, -2x(x-2)\left(x^2 - 8x + 16\right) \geq 0 \right\}$

$-2x(x-2)\left(x^2 - 8x + 16\right) = 0$ Signifie que : $x^2 - 8x + 16 = 0$ ou $x - 2 = 0$ ou $x = 0$

Signifie que : $x^2 - 8x + 16 = 0$ ou $x = 2$ ou $x = 0$

Pour déterminer le signe du trinôme : $x^2 - 8x + 16$

Calculons son discriminant : $a = 1$; $b = -8$; $c = 16$

Donc : $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 16 = 64 - 64 = 0$

Comme : Le coefficient principal est : $a = 1 > 0$ et $\Delta = 0$, alors : $x^2 - 8x + 16 \geq 0$

La racine double est : $x_1 = \frac{8}{2 \times 1} = 4$

$-2x(x-2)\left(x^2 - 8x + 16\right) = 0$ Signifie que : $x = 4$ ou $x = 2$ ou $x = 0$

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$-2x$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2-8x+16$		$+$		$+$		$+$	0	$+$	
$-2x(x-2)(x^2-8x+16)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Par suite : $D_f=[0;2]$

8) $f(x)=\sqrt{2|x|-3}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2|x|-3\geq 0\}$

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/|x|\geq\frac{3}{2}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq\frac{3}{2}\ \ ou\ \ x\leq-\frac{3}{2}\right\}$$

Donc : $D_f=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

9) $f(x)=\dfrac{2x-1}{|x|+x}$ $D_f=\{x\in\mathbb{R}/|x|+x\neq 0\}$

Donc : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/|x|\neq -x\}$

Si $x\in\mathbb{R}^{*+}$ alors $|x|=x\neq -x$ donc : $\mathbb{R}^{*+}\subset D_f$

Si $x\in\mathbb{R}^{*+}$ alors $|x|=-x$ donc : $x\notin D_f$

Par suite : $D_f=\mathbb{R}^{*+}$

10) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-2\sqrt{x}-15}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-2\sqrt{x}-15\neq 0\ \ et\ \ x\geq 0\}$

$x-2\sqrt{x}-15=0\Leftrightarrow\sqrt{x}^2-2\sqrt{x}-15=0$

On pose : $\sqrt{x}=X$ donc l'équation devient : $X^2-2X-15=0$

Le discriminant est Δ = (-2)^2 – 4 x 1 x (-15) = 64 et ses solutions sont :

$X_1=\dfrac{2-\sqrt{64}}{2\times 1}=-3$ et $X_2=\dfrac{2+\sqrt{64}}{2\times 1}=5$

Donc on a : $\sqrt{x}=-3$ et $\sqrt{x}=5$

Mais : $\sqrt{x}=-3$ n'a pas de solution   et $\sqrt{x}=5\Leftrightarrow x=5$

Donc : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 5\ et\ x\geq 0\}$

Donc : $D_f=[0;5[\cup]5;+\infty[$

11) $f(x)=\dfrac{2\sin x}{\tan x-\sqrt{3}}$. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ \ et\ \ \tan x-\sqrt{3}\neq 0/k\in\mathbb{Z}\right\}$

$\tan x-\sqrt{3}=0$ Signifie $\tan x=\sqrt{3}$

$\tan x = \sqrt{3}$ Signifie $\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Signifie $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{3} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

12) $f(x) = \frac{2x^2 - 2}{\left(3|x-5| - 2|4-3x|\right)\sqrt{x+1}}$

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / 3|x-5| - 2|4-3x| \neq 0 \ \text{ et } \ x+1 > 0\right\}$

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / 3|x-5| - 2|4-3x| \neq 0 \ \text{ et } \ x > -1\right\}$

$3|x-5| - 2|4-3x| = 0$ Signifie que : $3|x-5| = 2|4-3x|$

Signifie que : $|3x-15| = |8-6x|$

Signifie que : $3x-15 = 8-6x$ ou $3x-15 = -(8-6x)$

Signifie que : $9x = 23$ ou $-3x = 7$

Signifie que : $x = \frac{23}{9}$ ou $x = -\frac{7}{3}$

Donc : $D_f = \left]-1;+\infty\right[- \left\{-\frac{7}{3};\frac{23}{9}\right\} = \left]-1;\frac{23}{9}\right[\cup \left]\frac{23}{9};+\infty\right[$

Exercice 3 : (***) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x+m}$ avec $m \in \mathbb{R}$

1) Déterminer les valeurs de m pour que $D_f = \mathbb{R}$

2) Soit g la fonction numérique tel que : $g(x) = \frac{1}{x+2}$

Déterminer les valeurs de m pour que on a : $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \{-2;1\}$

Solution :1) $D_f = \mathbb{R}$ signifie que : $x^2 + x + m \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$x^2 + x + m \neq 0$ On a : $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4m$

$\Delta \prec 0$ Signifie que : $m \succ \frac{1}{4}$

Donc : si $m \succ \frac{1}{4}$ alors $\Delta \prec 0$ et donc : $x^2 + x + m \neq 0$ et par suite ; $D_f = \mathbb{R}$

2) $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \{-2;1\}$ Signifie que : $\frac{x-1}{x^2+x+m} = \frac{1}{x+2}$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+2) = x^2 + x + m \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = x^2 + x + m$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -2 = m$

Exercice 4 : (**) Etudier la parité des fonctions suivantes définie par :1) $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$.

2) $f(x) = x^2 + 2x + \frac{1}{x}$ 3) $f(x) = \frac{|x|}{x^2-1}$ 4) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ 5) $f(x) = \frac{2x^3}{x^2+5}$.

6) $f(x) = |x| - \sqrt{2x^2+4}$. 7) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$ 8) $f(x) = \frac{x}{x-2}$ 9) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

Solutions : 1) $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$: On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie que : $x\neq 0$ par suite : $D_f=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $f(-x)=\frac{(-x)^2-1}{-x}=-\frac{x^2-1}{x}$

  $f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

2) $f(x)=x^2+2x+\frac{1}{x}$ on a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie $x\neq 0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$ alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $f(-x)=(-x)^2+2(-x)+\frac{1}{-x}=x^2-2x-\frac{1}{x}$

  $f(-x)\neq -f(x)$

Donc f est une fonction ni paire ni impaire,

3) $f(x)=\frac{|x|}{x^2-1}$ On a : $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie $x^2-1\neq 0$

$x^2-1=0$ Signifie $x^2=1$ Équivaut à : $x=1$ ou $x=-1$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$, alors $-x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$
- $f(-x)=\frac{|-x|}{(-x)^2-1}=\frac{|x|}{x^2-1}$

  $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

4) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/1-x^2\geq 0\}$

$1-x^2=0$ Signifie $x^2=1$ Équivaut à : $x=1$ ou $x=-1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $D_f=[-1,1]$

- Pour tout réel x, si $x\in[-1,1]$ alors $-x\in[-1,1]$
- $f(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}$

  $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

5) $f(x)=\frac{2x^3}{x^2+5}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+5\neq 0\}$

$x^2+5=0$ Signifie : $x^2=-5$ pas de solutions Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=\frac{2(-x)^3}{(-x)^2+5}=\frac{-2x^3}{x^2+5}$

  $f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire

6) $f(x)=|x|-\sqrt{2x^2+4}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2+4\geq 0\}$

Or on sait que $2x^2\geq 0$ Pour tout réel x, donc $2x^2+4\geq 0+4$ par suite $2x^2+4\geq 4\geq 0$

Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

- $f(-x)=|-x|-\sqrt{2(-x)^2+4}=|x|-\sqrt{2x^2+4}$ Donc f est une fonction paire

$f(-x)=f(x)$

7) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{2}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\}$ Donc $D_f=\mathbb{R}^+=[0;+\infty[$

On a $2\in\mathbb{R}^+$ mais $-2\notin\mathbb{R}^+$ donc f est une fonction ni paire ni impaire

8) $f(x)=\frac{x}{x-2}$:On a $f(x)\in\mathbb{R}$ si et seulement si : $x-2\neq 0$ signifie que : $x\neq 2$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

On a $-2\in D_f$ mais $-(-2)=2\notin D_t$

Donc D_f n'est pas symétrique par rapport a O

Donc f est une fonction ni paire ni impaire

9) $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$ on a $f(x)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x\neq 0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}^*$

$f(-1)=(-1)^2+\frac{1}{-1}=1-1=0$ et $f(1)=1^2+\frac{1}{1}=1+1=2$

On a : $f(-1)\neq f(1)$ et $f(-1)\neq -f(1)$

Donc : $\exists x=1\in\mathbb{R}$ / $f(-1)\neq f(1)$ et $f(-1)\neq -f(1)$

Donc : f est une fonction ni paire ni impaire,

Exercice 5 : (***) Soit la fonction f définie par: $f(x)=\frac{1}{2}(|x+2|-|x-2|)$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Etudier la parité de la fonction f et en déduire le domaine d'étude de f
3) Simplifier l'écriture de f dans les intervalles $I=[0;2]$ et $J=[2;+\infty[$
4) Dresser son tableau de variation sur D_f
5) Soit (C_f) la courbe de f .

a) Est ce que les points $A(2;2)$; $B(1;2)$; $c(3;5)$ et $D(3;2)$ appartiennent à la courbe (C_f)

b) Tracer la courbe (C_f) dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé

Solution :1) Un réel a toujours une image. Donc $D_f=\mathbb{R}$

2) - Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

- $f(-x)=\frac{1}{2}(|-x+2|-|-x-2|)=\frac{1}{2}(|-(x-2)|-|-(x+2)|)$

$f(-x)=\frac{1}{2}(|(x-2)|-|(x+2)|)$ car $|-x|=|x|$

$f(-x) = -\frac{1}{2}\left(\left|-(x-2)\right| + \left|(x+2)\right|\right)$

$f(-x) = -\frac{1}{2}\left(\left|\left|(x+2)\right| - (x-2)\right|\right) = -f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

Alors : $O(0;0)$ est un centre de symétrique de (C_f) il suffit de l'étudier sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$

Par suite le domaine d'étude de f est : $D_E = \mathbb{R}^+$

3) si $x \in I = [0;2]$ alors : $0 \le x \le 2$

Donc : $x-2 \le 0$ et $x+2 \ge 0$

Par suite : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x+2-\left(-(x-2)\right)\right) = \frac{1}{2}(x+2+x-2) = x$

Si $x \in J = [2;+\infty[$ alors : $x \ge 2$

Donc : $x-2 \ge 0$ et $x+2 \ge 0$

Par suite : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x+2-(x-2)\right) = \frac{1}{2}(x+2-x+2) = 2$

Finalement on a : $\begin{cases} f(x) = x \ si \ x \in I = [0;2] \\ f(x) = 2 \ si \ x \in J = [2;+\infty[\end{cases}$

4) tableau de variation sur D_f :

On a : f est constante sur l'intervalle : $J = [2;+\infty[$ et croissante dans $I = [0;2]$

Et puisque f est une fonction impaire alors f est constante sur l'intervalle : $J' =]-\infty;-2]$ et croissante dans $I' = [-2;0]$ d'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$\longrightarrow$	-2	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	2	$\longrightarrow$

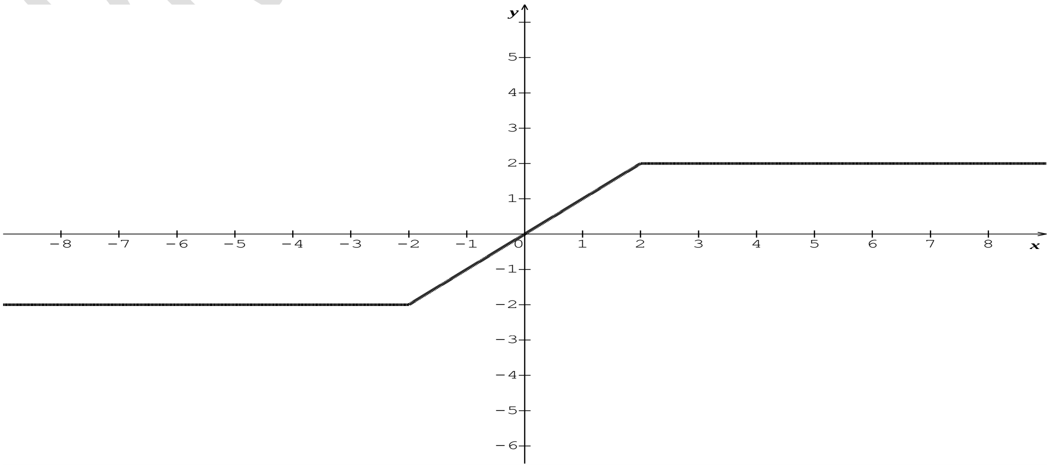
a) On a $f(2) = \frac{1}{2}\left(|2+2| - |2-2|\right) = 2$ donc : $A(2;2) \in (C_f)$

On a $f(1) = \frac{1}{2}\left(|1+2| - |1-2|\right) = 1 \ne 2$ donc : $B(1;2) \notin (C_f)$

On a $f(3) = \frac{1}{2}\left(|3+2| - |3-2|\right) = 2 \ne 5$ donc : $C(3;5) \notin (C_f)$

On a $f(3) = 2$ donc : $D(3;2) \in (C_f)$

b) f est une fonction impaire donc (C_f) est symétrique par rapport à l'origine du repère



Exercice 6 : (*) (**)

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-x^2+x$

Démontrer que : $f(x)\leq\frac{1}{4}$ pour tous $x\in\mathbb{R}$

Solution : On met la fonction sous la forme canonique :

$$f(x)=-x^2+x=-\left(x^2-x\right)=-\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

On a : $-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\leq 0$ donc $-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leq\frac{1}{4}$ c'est-à-dire : $f(x)\leq\frac{1}{4}$ pour tous $x\in\mathbb{R}$

Exercice 7 : (*) (**)

On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f .

x	-4		0		2		3
f	-3	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	5

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies, fausses ou si on ne peut pas répondre.

1) $f(-2)\leq f(-2,5)$

2) $f(-3)=-4$

3) 2est un antécédent de 0 par f

4) Il existe un nombre réel de l'intervalle [0;3] qui a pour image 0 par f

5) Tous les réels de l'intervalle [0;3] ont une image par f positive

6) Il existe un réel de l'intervalle [−3;3] qui a une image strictement négative par f

Solutions :1) $f(-2)\leq f(-2,5)$: FAUX

2) $f(-3)=-4$ FAUX

3) 2est un antécédent de 0 par f : VRAI

4) Il existe un nombre réel de l'intervalle [0;3] qui a pour image 0 par f : VRAI

5) Tous les réels de l'intervalle [0;3] ont une image par f positive : VRAI

6) Il existe un réel de l'intervalle [−3;3] qui a une image strictement négative par f : ON NE SAIT PAS

Exercice 8 : (*) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=5x^2+3$

Montrer que $f(0)=3$ est un minimum de f sur $\mathbb{R}$

Solutions : $D_f=\mathbb{R}$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$ $x^2\geq 0$ donc $5x^2\geq 0$ car $5\succ 0$

Par suite $5x^2+3\geq 3$ et on a $f(0)=3$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $f(x)\geq f(0)$

D'où : $f(0)=3$ est un minimum de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 9 : (*) Soit g une fonction numérique tel que : $g(x)=-4x^2+1$

Montrer que $g(0)=1$ est un maximum de g sur $\mathbb{R}$

Solutions : Soit g une fonction numérique tq : $g(x)=-4x^2+1$ $D_g=\mathbb{R}$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$ $x^2\geq 0$

Donc $-4x^2\leq 0$ car $-4\prec 0$

Par suite $-4x^2+1\leq 1$ et on a $g(0)=1$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $g(x)\leq g(0)$

D'où : $g(0)=1$ est un maximum de g sur $\mathbb{R}$

Exercice 10 : (*) (**) Soit f une fonction tel que : $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{x^2+1}$

1) Déterminer D_f

2) Etudier la parité de la fonction f

3) Montrer que : pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=2-\dfrac{5}{x^2+1}$

4) a) Etudier la monotonie de f sur l'intervalles $[0;+\infty[$

b) En déduire les variations de f sur $]-\infty;0]$

5) Dresser le tableau de variation de f

6) Déterminer les extrémums de f

Solution : $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{x^2+1}$

1 $D_f=\{x\in E\,/\,x^2+2\neq 0\}$

$x^2+2=0$ Signifie $x^2=-2$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : x^2+2 ne s'annule jamais

Par suite : $D_f=\mathbb{R}$

2) Etudions la parité de la fonction f :

- si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=\dfrac{2(-x)^2-3}{(-x)^2+1}=\dfrac{2x^2-3}{x^2+1}=f(x)$ donc : $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire,

3) Montrons que : pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=2-\dfrac{5}{x^2+1}$

Méthode1 : $2-\dfrac{5}{x^2+1}=\dfrac{2(x^2+1)-5}{x^2+1}=\dfrac{2x^2+2-5}{x^2+1}=\dfrac{2x^2-3}{x^2+1}$

Donc : $2-\dfrac{5}{x^2+1}=f(x)$

Méthode2 : $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{x^2+1}=\dfrac{2x^2+2-2-3}{x^2+1}=\dfrac{2(x^2+1)-5}{x^2+1}=\dfrac{2(x^2+1)}{x^2+1}-\dfrac{5}{x^2+1}$

Donc : $f(x)=2-\dfrac{5}{x^2+1}$

4) a) Etudions la monotonie de f sur l'intervalles $[0;+\infty[$

2) soient $x_1\in[0;+\infty[$ et $x_2\in[0;+\infty[$ tel que : $x_1<x_2$

$x_1<x_2$ Implique : $x_1^2<x_2^2$

Implique : $x_1^2+1<x_2^2+1$

Implique : $\frac{1}{x_2^2+1}<\frac{1}{x_1^2+1}$

Implique : $\frac{-5}{x_1^2+1}<\frac{-5}{x_2^2+1}$

Implique : $2-\frac{5}{x_1^2+1}<2-\frac{5}{x_2^2+1}$

Implique : $f(x_1)<f(x_2)$

D’où : f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

b) Déduction des variations de f sur $]-\infty;0]$:

Puisque f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et f est une fonction paire et le symétrique de $[0;+\infty[$ est $]-\infty;0]$

Alors : f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

5) Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$

6)D’après le tableau de variation de f on a : $f(0)=-3$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 11 : (*) (**)

Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2+2x+1$

1) Préciser le domaine de définition de f

2) Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$ Montrer que : $T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=x_1+x_2+2$

3) a) Montrer que f est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$

b) Montrer que f strictement décroissante sur $]-\infty;-1]$

4) Dresser le tableau de variation de f

5) a) En déduire que : pour tout $x\in\mathbb{R}$ On a : $0\leq f(x)$

b) En déduire que : pour tout $x\in[-1;3]$ On a : $0\leq f(x)\leq 16$

c) En déduire que : pour tout $x\in[-5;-2]$ On a : $1\leq f(x)\leq 16$

6)Trouver les points d’intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

7)Soit g la fonction définie sur R par : $g(x)=x+3$

Tracer Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

8)Résoudre graphiquement et algébriquement l’équation : $f(x)=g(x)$

9) Résoudre graphiquement et algébriquement l’inéquation ; $g(x)<f(x)$

10) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l’équation : $-x^2-2x+m-1=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Solution : $f(x)=x^2+2x+1$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

2)Soient : $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$T\left(x_1;x_2\right)=\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}=\frac{\left(x_2^{\,2}+2x_2+1\right)-\left(x_1^{\,2}+2x_1+1\right)}{x_2-x_1}=\frac{x_2^{\,2}+2x_2+1-x_1^{\,2}-2x_1-1}{x_2-x_1}$$

$$T\left(x_1;x_2\right)=\frac{x_2^{\,2}-x_1^{\,2}+2\left(x_2-x_1\right)}{x_2-x_1}$$

$$T\left(x_1;x_2\right)=\frac{\left(x_2-x_1\right)\left(x_2+x_1\right)+2\left(x_2-x_1\right)}{x_2-x_1}=\frac{\left(x_2-x_1\right)\left(x_2+x_1+2\right)}{x_2-x_1}$$

Par suite : $T\left(x_1;x_2\right)=x_1+x_2+2$

3)a) Etude de la monotonie de f sur : $I=\left[-1;+\infty\right[$

Soient : $x_1\in\left[-1;+\infty\right[$ et $x_2\in\left[-1;+\infty\right[$ alors : $x_1\geq -1$ et $x_2\geq -1$ et $x_1\neq x_2$ donc : $x_1+x_2>-2$

Par suite : $x_1+x_2+2>0$.

Donc $T\left(x_1;x_2\right)>0$ d'où : f est strictement croissante sur $I=\left[-1;+\infty\right[$

3)b) Etude de la monotonie de f sur : $J=\left]-\infty;-1\right]$

Soient : $x_1\in\left]-\infty;-1\right]$ et $x_2\in\left]-\infty;-1\right]$ alors : $x_1\leq -1$ et $x_2\leq -1$ et $x_1\neq x_2$

Cela implique $x_1+x_2<-2$

Par suite : $x_1+x_2+2<0$.

Donc $T\left(x_1;x_2\right)<0$

D'où : f est strictement décroissante sur $J=\left]-\infty;-1\right]$

4) Tableau de variation : On a : $f\left(-1\right)=\left(-1\right)^2+2\times\left(-1\right)+1=1-2+1=0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

5) a) D'après le tableau de variation de f on a : $f\left(-1\right)=0$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f\left(-1\right)\leq f\left(x\right)$

Par suite : $0\leq f\left(x\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

b) Soit : $x\in\left[-1;3\right]$ alors : $-1\leq x\leq 3$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement croissante sur $I=\left[-1;+\infty\right[$

Par suite : f est strictement croissante sur $\left[-1;3\right]$

Alors : $f\left(-1\right)\leq f\left(x\right)\leq f\left(3\right)$ et comme : $f\left(-1\right)=0$ et $f\left(3\right)=3^2+2\times 3+1=9+6+1=16$

Par suite : $0\leq f\left(x\right)\leq 16$

b) Soit : $x\in\left[-5;-2\right]$ On a alors : $-5\leq x\leq -2$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement décroissante sur $J=\left]-\infty;-1\right]$

Par suite : f est strictement décroissante sur $\left[-5;-2\right]$

Alors : $f\left(-2\right)\leq f\left(x\right)\leq f\left(-5\right)$ et comme :

$f\left(-5\right)=\left(-5\right)^2+2\times\left(-5\right)+1=25-10+1=16$ Et $f\left(-2\right)=\left(-2\right)^2+2\times\left(-2\right)+1=4-4+1=1$

Par suite : $1\leq f\left(x\right)\leq 16$

6)a) Intersection de la courbe $\left(C_f\right)$ avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$.

$f(x)=0$ Signifie $x^2+2x+1=0$

Signifie : $(x+1)^2=0$

Signifie : $x+1=0$ c'est-à-dire : $x=-1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses est : $A(-1;0)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

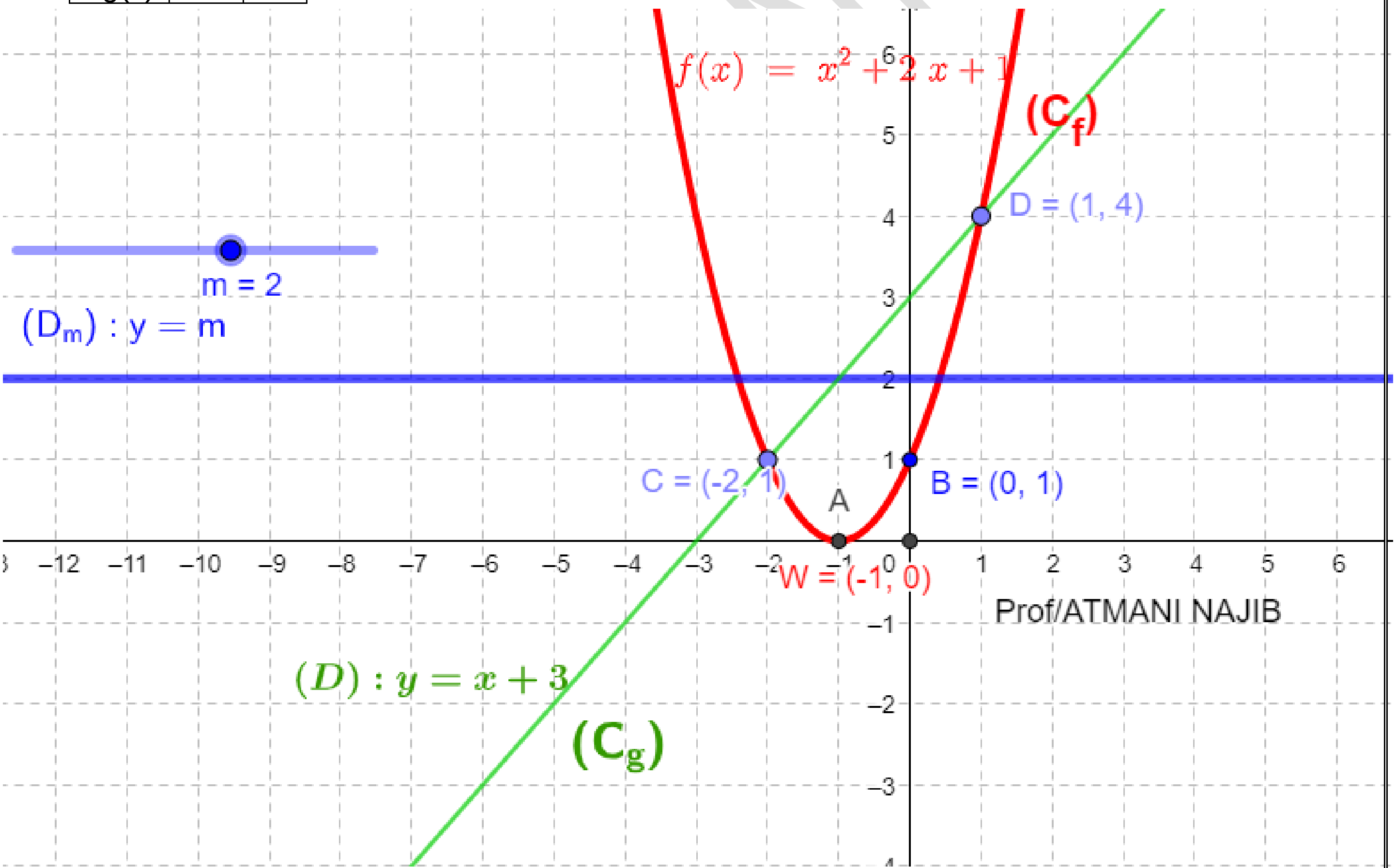
Et on a $f(0)=0^2+2\times0+1=1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $B(0;1)$

7) la courbe représentative (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	9	4	1	0	1	4	9

x	-2	1
g(x)	1	4



8) a) Résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x=-2$ et $x=1$ donc $S=\{-2;1\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ Signifie : $x^2+2x+1=x+3$ c'est-à-dire : $x^2+x-2=0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times(-2)\times 1 = 1+8 = 9 > 0$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\times 1} = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times 1} = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

Donc : $S = \{-2;1\}$

9) a) Résolution graphique de l'inéquation $g(x) < f(x)$:

La courbe (C_g) est au-dessous de (C_f) si $x \in]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$

Donc $S =]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation : $g(x) < f(x)$:

$g(x) < f(x)$ Signifie $x+3 < x^2+2x+1$

C'est-à-dire : $x^2+x-2 > 0$

Les racines sont : $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S =]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$

10) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $-x^2-2x+m-1=0$ avec : $m \in \mathbb{R}$

$-x^2-2x+m-1=0$ Signifie $m = x^2+2x+1$

Signifie : $m = f(x)$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) et la droite : $y = m$

Si : $m<0$ l'équation n'admet pas de solution

Si : $m=0$ il y'a une solution c'est : x = -1

Si : $m>0$ il y'a deux solutions

Exercice 12 : (*) (***)

Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = 2x^2-4x+3$

1)Déterminer D_f et déterminer α et β tel que : $f(x) = 2(x+\alpha)^2+\beta$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

2) Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ses éléments caractéristiques

3) Déterminer le Tableau de variations de f

4) Soit g la fonction numérique tel que : $g(x) = x^2 - |x(x-2)| - 2x + 3$

a) Déterminer D_g et écrire $g(x)$ sans le symbole de la valeur absolue

5)Tracer la courbe représentative de (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

6) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $x^2 - |x(x-2)| - 2x + 1 = 0$

Solution :1) f est une fonction polynôme donc : $D_f = \mathbb{R}$

$f(x) = 2x^2-4x+3 = 2(x^2-2x)+3 = 2(x^2-2\times x\times 1+1^2-1^2)+3$

$f(x) = 2((x-1)^2-1)+3 = 2(x-1)^2-2+3$

Donc ; $f(x) = 2(x-1)^2+1$ par suite : $\alpha = -1$ et $\beta = 1$ et $a = 2$

2)les éléments caractéristiques de (C_f) :

La courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(1;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x = 1$.

3)Le Tableau de variations de f : On a $a = 2 \succ 0$

Donc :

x	$-\infty$ $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$\searrow$ 1 $\nearrow$

4) Soit g la fonction numérique tel que : $g\left(x\right)=x^2-\left|x(x-2)\right|-2x+3$

On a : $D_g=\mathbb{R}$

Etudions le signe de : $x(x-2)$

$x(x-2)=0$ Signifie que : $x=0$ ou $x-2=0$

Signifie que : $x=0$ ou $x=2$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
x	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$x(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

① Si $x\in[0;2]$: $g\left(x\right)=x^2-\left(-x(x-2)\right)-2x+3$

Donc : $g\left(x\right)=x^2+x(x-2)-2x+3=x^2+x^2-2x-2x+3$

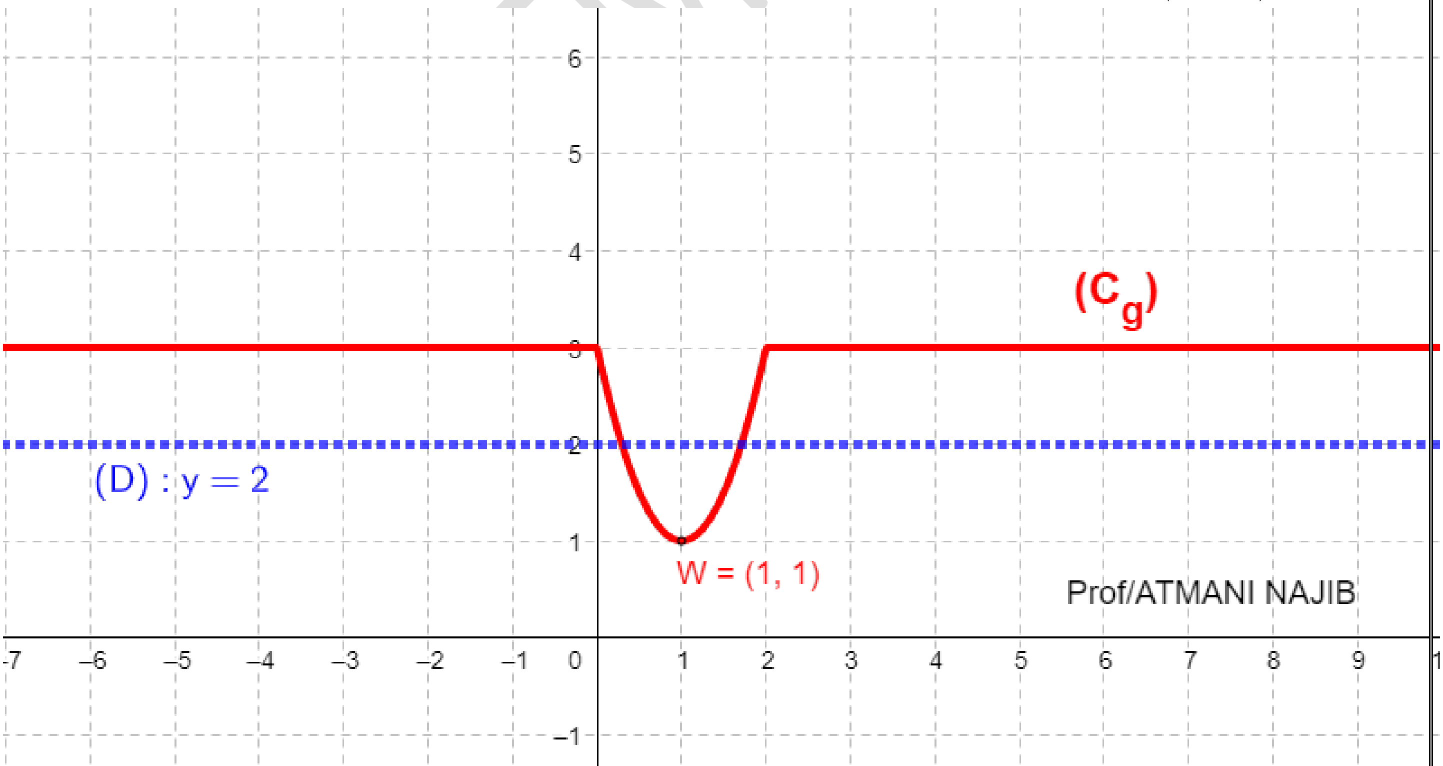
Donc : $g\left(x\right)=2x^2-4x+3$

② Si $x\geq 2$ ou $x\leq 0$: $g\left(x\right)=x^2-\left(x(x-2)\right)-2x+3$

Donc : $g\left(x\right)=x^2-x(x-2)-2x+3=x^2-x^2+2x-2x+3$

Donc : $g\left(x\right)=3$ (constante)

5) Représentation graphique de la courbe représentative de $\left(C_g\right)$ dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$



6) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $x^2-\left|x(x-2)\right|-2x+1=0$

$x^2-\left|x(x-2)\right|-2x+1=0$ Signifie $x^2-\left|x(x-2)\right|-2x+1+2=2$

Signifie : $x^2-\left|x(x-2)\right|-2x+3=2$

Signifie : $g(x)=2$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_g) et la droite : $(D): y=2$

Puisque : la droite $(D): y=2$ coupe (C_g) en deux points alors :

L'équation : $x^2-|x(x-2)|-2x+1=0$ admet exactement 2 solutions

Exercice 13 : (**) Soit g une fonction tel que : $g(x)=\frac{x}{x+1}$.

1) Déterminer D_g .

2) Calculer le taux d'accroissement de fonction de g entre x_1 et x_2 tel que : $x_1 \neq x_2$.

3) Etudier les variations de g sur les intervalles $I=]-\infty;-1[$ et $J=]-1;+\infty[$.

4) Dresser son tableau de variation de f.

5) En déduire une comparaison des nombres : $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ et $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

Solutions : $g(x)=\frac{x}{x+1}$

1) On a $g(x)\in\mathbb{R}$ équivaut à: $x+1\neq 0$ c'est-à-dire : $x\neq -1$

Donc $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$

2) Soient $x_1\in D_g$ et $x_2\in D_g$ tq $x_1\neq x_2$

On a : $T(x_1;x_2)=\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$

$$g(x_1)-g(x_2)=\frac{x_1}{x_1+1}-\frac{x_2}{x_2+1}=\frac{x_1(x_2+1)-x_2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{x_1-x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

3) a) Sur $I=]-\infty;-1[$

Soit $x_1\in]-\infty;-1[$ et $x_2\in]-\infty;-1[$ $x_1\neq x_2$

Donc $x_1\prec -1$ et $x_2\prec -1$ Donc $x_1+1\prec 0$ et $x_2+1\prec 0$ Donc $(x_1+1)(x_2+1)\succ 0$

Donc : $T(x_1;x_2)=\frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}\succ 0$ sur $I=]-\infty;-1[$

D'où : g est strictement croissante sur $I=]-\infty;-1[$

b) Sur $J=]-1;+\infty[$

Soit $x_1\in]-1;+\infty[$ et $x_2\in]-1;+\infty[$ $x_1\neq x_2$

Donc : $x_1\succ -1$ et $x_2\succ -1$ Donc $x_1+1\succ 0$ et $x_2+1\succ 0$ Donc $(x_1+1)(x_2+1)\succ 0$

Donc : $T(x_1;x_2)=\frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}\succ 0$ sur $J=]-1;+\infty[$

D'où : g est strictement croissante sur $J=]-1;+\infty[$

4) Résumé : tableau de variation **:**

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$

5) On a $-\sqrt{2} \in]-\infty;-1[$ et $-\sqrt{3} \in]-\infty;-1[$ et $-\sqrt{3} < -\sqrt{2}$

D'après le tableau de variation de g on a : g est strictement croissante sur $J =]-1;+\infty[$

Alors : $g\left(-\sqrt{3}\right) < g\left(-\sqrt{2}\right)$

Donc : $\frac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+1} < \frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}+1}$

Donc : $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

Exercice 14 : (***) Soit f une fonction tel que : $f(x) = \frac{-x+3}{x+1}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer D_f

2) Montrer que : $f(x) = -1 + \frac{4}{x+1}$ pour tout $x \in D_f$

3) a) Montrer que (C_f) est une hyperbole et déterminer son centre et ses asymptotes

b) Déterminer le tableau de variations de f et tracer la courbe (C_f)

4) Soit g une fonction tel que : $g(x) = \frac{-|x|+3}{|x|+1}$

a) Déterminer D_g

b) Etudier la parité de g

c) Tracer (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

d) Déterminer le tableau de variations de g

Solutions : $f(x) = \frac{-x+3}{x+1}$

1) On a $f(x) \in \mathbb{R}$ signifie que : $x+1 \neq 0$ signifie $x \neq -1$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

2) Montrons que : $f(x) = -1 + \frac{4}{x+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

Soit $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ on a : $-1 + \frac{4}{x+1} = \frac{-x-1+4}{x+1}$

$= \frac{-x+3}{x+1}$

Donc : $f(x) = -1 + \frac{4}{x+1}$ Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

3)a) On utilisant le résumé de notre cours :

Rappelle : Si : $f(x) = \beta + \frac{k}{x+\alpha}$ alors (C_f) est une hyperbole de centre $W(-\alpha;\beta)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x = -\alpha$ et $y = \beta$

Dans notre exercice on a : $f(x) = -1 + \frac{4}{x+1}$ avec : $\alpha = 1$ et $\beta = -1$ et $k = 4$

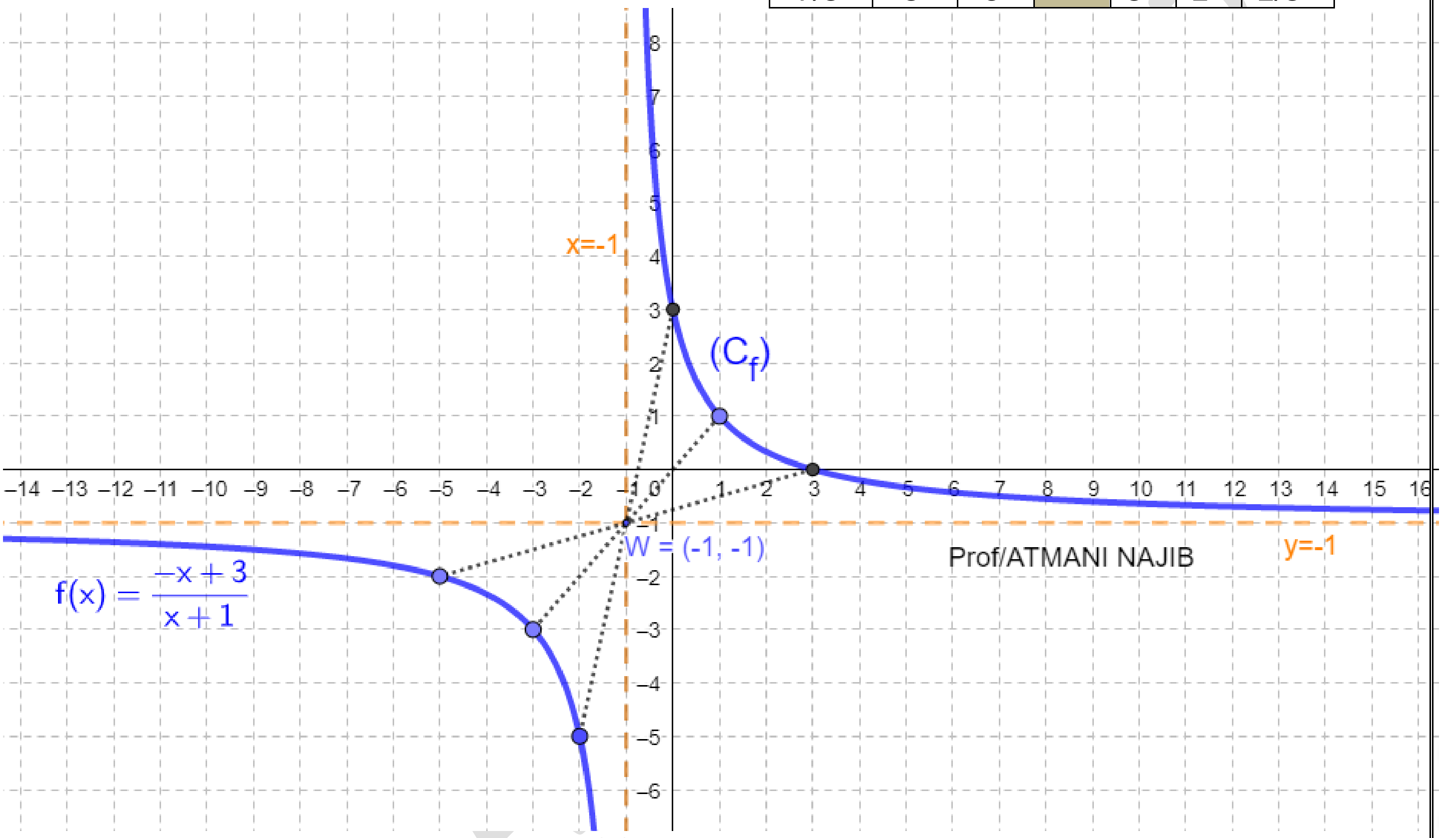
Donc (C_f) est une hyperbole de centre $W(-1;-1)$ et d'asymptotes les droites d'équations :
$x=-1$ et $y=-1$

b) Le tableau de variations de f : $k=4\succ 0$

x	$-\infty$ $\quad$ -1	$+\infty$
$f(x)$	↘	↘

La courbe (C_f) :

- 4	- 3	-2	-1	0	1	2
-7/3	-3	-5		3	1	1/3



4) a) Soit g une fonction tel que : $g(x)=\dfrac{-|x|+3}{|x|+1}$

On a : $g(x)\in\mathbb{R}$ signifie $|x|+1\neq 0$

Signifie $|x|\neq -1$ Par suite : $D_g=\mathbb{R}$

b) Etudions la parité de g :

☞ si $x\in\mathbb{R}$ alors $-x\in\mathbb{R}$

$-x\in D_g=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

☞ $g(-x)=\dfrac{-|-x|+3}{|-x|+1}=\dfrac{-|x|+3}{|x|+1}$ car $|-x|=|x|$

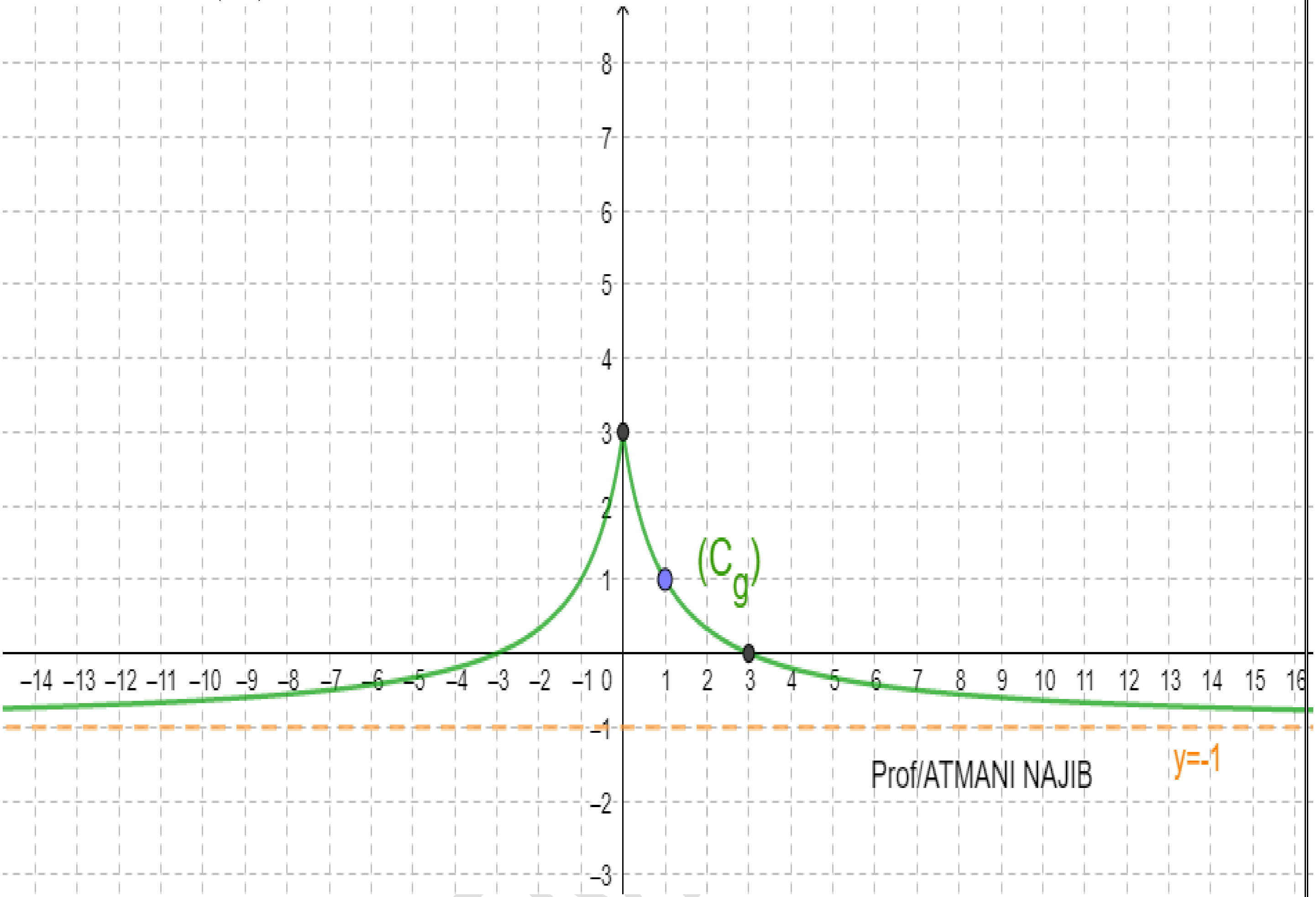
Donc : $g(-x)=g(x)$ Par suite : g est paire

c)La courbe (C_g) : Puisque g est paire alors la courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

On représente alors (C_g) sur $[0;+\infty[$ et trace son symétrique sur $]-\infty;0]$

Or sur $[0;+\infty[$: on a $g(x)=\dfrac{-|x|+3}{|x|+1}=\dfrac{-x+3}{x+1}=f(x)$

Donc la courbe (C_g) est:



d) d'après la courbe représentative de g on déduit le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien