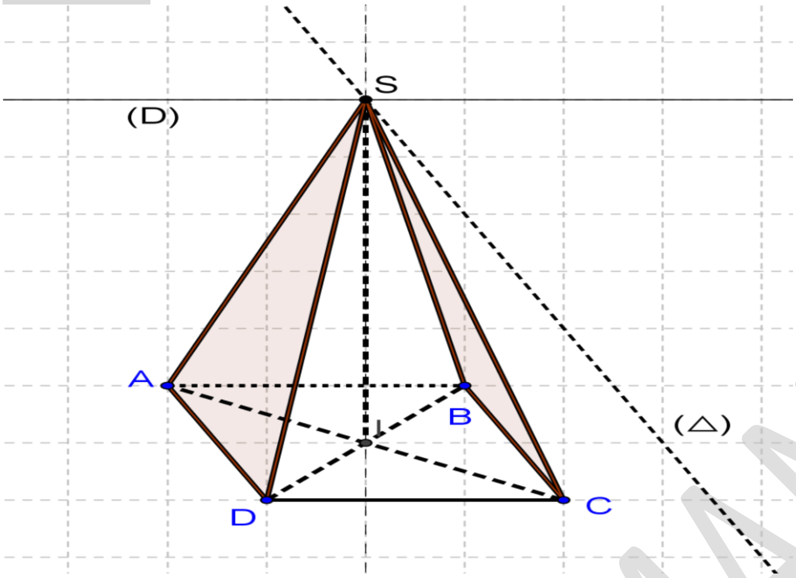
Correction Série N°3 : Géométrie dans l'espace

Exercice 1 : (**) : SABCD est une pyramide de l'espace tel que ABCD soit un parallélogramme
1) determiner la droite (Δ) d'intersection des plans (SBC) et (SAD).
2) determiner la droite (D) d'intersection des plans (SAB) et (SCD).
3) Que peut-on dire du plan P contenant les droites (D) et (Δ) ?

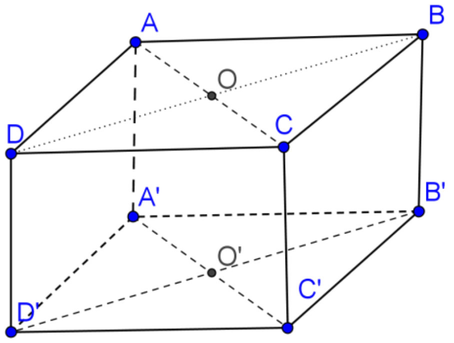
Solution :



1) A ∉ (SCD) donc les plans (SAB) et (SCD) ne sont pas confondus.
S est un point commun des plans (SAB) et (SCD) donc ces deux plans sont sécants.
Or, les deux droites (AB) contenue dans (SAB) et (CD) contenue dans (SCD) sont parallèles car ABC D
est un parallélogramme.
Le théorème du toit permet d'affirmer que la droite (D) d'intersection des plans (SAB) et (SCD) est parallèle à (AB) et à (CD).
Donc, la droite (D) est la droite passant par S et parallèle à (AB).
2° On démontre de la même façon que la droite (Δ) d'intersection des plans (SBC) et (SAD) est la parallèle à (BC) passant par S.
3° (D) et (AB) sont parallèles.
(Δ) et (BC) sont parallèles.
(AB) et (BC) sont sécantes en B et (D) et (Δ) sont sécantes en S.
Deux droites sécantes de (P) sont parallèles à deux droites sécantes du plan (ABCD) donc les plans (P) et (ABCD) sont parallèles.

Exercice 2 : (**) (***) Soit $ABCDA'B'C'D'$ un parallélépipède rectangle de l'espace et Soient O et O' les centres des rectangles $ABCD$ et $A'B'C'D'$ respectivement
1)Faire une figure
2)Montrer que :les points A ; A' ;sont coplanaires C' et C
et que points B ; B' ;sont coplanaires D' et D
3) Montrer que : $(AA'C)\cap(BB'D)=(OO')$
4) Montrer que : $(OO')\parallel(CC')\parallel(DD')$ et $(OO')\parallel(AA')\parallel(BB')$

Solution :1)



1) Dans le rectangle $AA'B'B$ on a : $(AA')\parallel(BB')$ (1)

Dans le rectangle $BB'CC'$ on a : $(BB')\parallel(CC')$ (2)

De (1) et (2) en déduit que : $(AA')\parallel(CC')$

Par suite les points A ; A' ;sont coplanaires C' et C

De la même façon on montre que : $(BB')\parallel(DD')$

Par suite les points B ; B' ;sont coplanaires D' et D

3) On a : O est le centre du rectangles $ABCD$ donc : $O\in(BD)$ et par suite : $O\in(BB'D)$

De même : O' est le centre du rectangles $A'B'C'D'$ donc : $O'\in(B'D')$ et par suite : $O'\in(BB'D)$

On en déduit donc que : $(OO')\subset(BB'D)$ (α)

Et on a : On a : O est le centre du rectangles $ABCD$ donc : $O\in(AC)$ et par suite : $O\in(AA'C)$

De même : O' est le centre du rectangles $A'B'C'D'$ donc : $O'\in(A'C')$ et par suite : $O'\in(AA'C')$

On en déduit donc que : $(OO')\subset(AA'C)$ (β)

Et on a : $(AA'C)\neq(BB'D)$ car A sont non coplanaires D et C , B' , B , A' ,

Donc : de (α) et (β) en déduit que : $(AA'C)\cap(BB'D)=(OO')$

4) On a : $(BB')\parallel(AA')$ et $(AA')\subset(AA'C)$ et $(BB')\subset(BB'D)$ et $(AA'C)\cap(BB'D)=(OO')$

Donc : $(OO')\parallel(AA')\parallel(BB')$

De même on a : $(DD')\parallel(CC'')$ et $(DD')\subset(BB'D)$ et $(CC')\subset(ACC')$ et $(ACC')\cap(BB'D)=(OO')$

Donc : $(OO')\parallel(CC')\parallel(DD')$

Exercice 3 : (***) Soit $ABCD$ un rectangle de l'espace et Soit E un point de l'espace

Tel que : $(AE)\perp(ABC)$

Et Soient I ; J et K les milieux respectifs des Segments $[EB]$; $[AB]$ et $[DC]$

1) Faire une figure

2) Montrer que : $(JIK)\parallel(ADE)$ et que : $(IJ)\parallel(ADE)$

3) Montrer que : $(JK)\perp(ABE)$

4) Déterminer l'intersection des plans (ABE) et (AIK)

Solution :1) La figure

2) Dans le triangle ABE on a I le milieu du segment $[EB]$ et J le milieu du segment $[AB]$

Donc : $(IJ)\parallel(AE)$

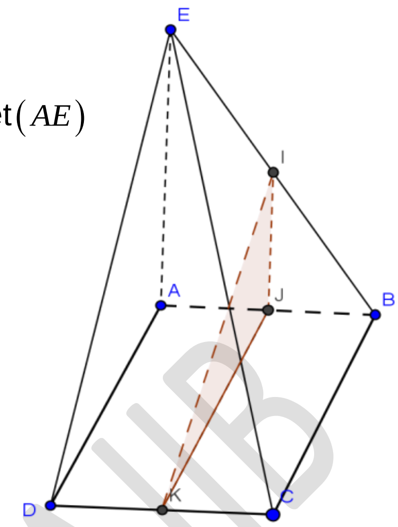
Et on a : $(AE)\subset(ADE)$ donc : $(IJ)\parallel(ADE)$ (1)

On a: $[DC]$ le milieu du segment K

Donc : $(JK)\parallel(AD)\parallel(BC)$ et puisque $(AD)\subset(ADE)$ Alors : $(JK)\parallel(ADE)$ (2)

De : (1) et (2) en déduit que : $(JIK)\parallel(ADE)$

3) On a : $(AE)\perp(ABC)$ et $(JK)\subset(ABC)$ donc : $(AE)\perp(JK)$



Et on a : $(JK)\parallel(AD)$ et $(AD)\perp(AB)$ donc : $(JK)\parallel(AB)$

Donc : puisque (JK) est orthogonale a deux droites sécantes (AB) et (AE)

Contenues dans le plan (ABE) alors : $(JK)\perp(ABE)$

4) On a : $E\notin(ABC)$ car $(AIK)\neq(ABE)$

Et on a : $A\in(ABE)$ et $A\in(AIK)$ et $(EB)\subset(ABE)$

Donc : $I\in(ABE)$ car ($I\in(EB)$)

Et on sait que : $I\in(AIK)$ donc : $(AIK)\cap(ABE)=(AI)$

Exercice 4: (***) Soient dans l'espace un cube $ABCDEFGH$

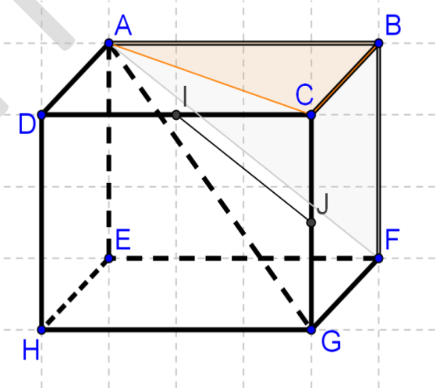
Avec I le milieu du segment $[CD]$ et J le milieu du segment $[CG]$

1) Montrer que : $(CG)\perp(ABC)$

2) Qu'elle est le la longueur du coté du cube $ABCDEFGH$ sachant que la longueur de la diagonal du cube est égale a $\sqrt{14}$

3) Montrer que : $(IJ)\parallel(ABF)$

4) Montrer que : $(AD)\perp(IJ)$



Solution : 1) On a : $(CG)\perp(BC)$ car $BCGF$ carré et on a :

$(CG)\perp(DC)$ car $CDHG$ carré

Et puisque : (DC) et (BC) se coupent dans le plan (ABC) par suite : $(CG)\perp(ABC)$

2) Soit a la longueur du coté d'un cube on a : AG diagonal de $ABCDEFGH$

D'après le théorème de Pythagore directe dans le triangle ABC

On a : $AC^2=AB^2+BC^2$ donc: $AC^2=a^2+a^2=2a^2$

Par suite : $AC=a\sqrt{2}$

Et puisque : $(CG)\perp(ABC)$ et $(AC)\subset(ABC)$ alors : $(CG)\perp(AC)$

Donc : AGC est un triangle rectangle en C

Donc d'après le théorème de Pythagore dans le triangle AGC on a: $AG^2=AC^2+CG^2$

Donc : $AG^2=2a^2+a^2=3a^2$ c'est-à-dire : $AG=\sqrt{3}a$ or on a : $AG=\sqrt{14}$

Donc : $\sqrt{3}a=\sqrt{14}$ c'est-à-dire : $a=\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{42}}{3}$

3)Dans le triangle DCG on a I le milieu du segment $[CD]$ et J le milieu du segment $[CG]$

Donc : $AD=FG$ et puisque on a : (1) $(DG)\parallel(IJ)$

Alors : $ADGF$ est un parallélogramme et par suite : $(DG)\parallel(AF)$

De (1) et (2) en déduit que : $(AF)\parallel(IJ)$

Et on a : $(AF)\subset(ABF)$ par suite $(IJ)\parallel(ABF)$

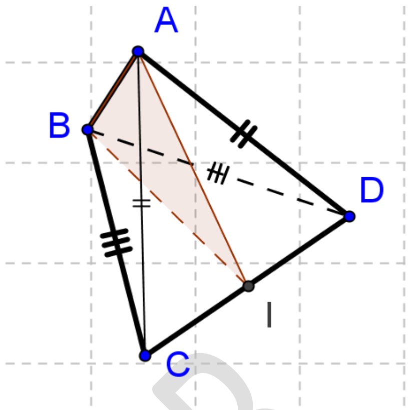
4) On a : $(AD)\perp(DC)$ et $(AD)\perp(DH)$

ET (DC) et (DH) se coupent dans le plan (HDC)

Par suite : $(AD)\perp(HDC)$ et puisque : $(IJ)\subset(HDC)$ alors : $(AD)\perp(IJ)$

Exercice 5 : (***) $ABCD$ Un tétraèdre tel que : $AC = AD$ et $BC = BD$
Soit I le milieu du segment $[CD]$

1)Montrer que : $(CD) \perp (ABI)$ 2) En déduire que $(AB) \perp (CD)$



Solution :1) Le triangle ACD est isocèle en A car $AC = AD$
Et I le milieu du segment $[CD]$

Donc : $(AI) \perp (CD)$ (1)

On a aussi BCD est isocèle en B car $BC = BD$ et I le milieu du segment $[CD]$

Donc : $(BI) \perp (CD)$ (2)

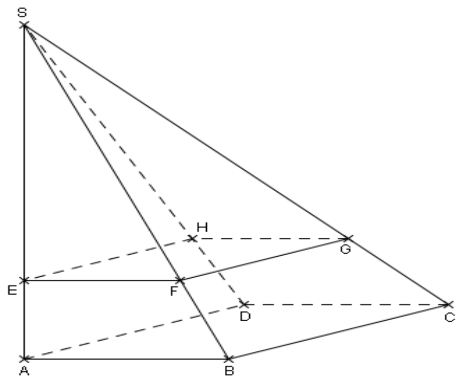
ET (BI) et (AI) se coupent dans le plan (ABI) Par suite : $(CD) \perp (ABI)$

2) On a : $(CD) \perp (ABI)$ et $(AB) \subset (ABI)$ donc : $(AB) \perp (CD)$

Exercice 6 : (**) SABCD est une pyramide à base rectangulaire ABCD, de hauteur [SA].
On donne SA = 15 cm, AB = 8 cm et BC = 11 cm.
1) Calculer le volume V_1 de la pyramide SABCD.
2) Démontrer que SB = 17 cm.
3) On note E le point de [SA] tel que SE = 12 cm et F le point de [SB] tel que SF = 13,6.
Montrer que les droites (EF) et (AB) sont parallèles.
4) On coupe cette pyramide par le plan passant par E et parallèle à la base de la pyramide. La pyramide SEFGH ainsi obtenue est une réduction de la pyramide SABCD.
a) Quel est le coefficient de la réduction ?
b) En déduire le volume V_2 de la pyramide SEFGH en fonction de V_1.

Solution :1) Volume de la pyramide SABCD :

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times SA \times (AB \times BC) = \frac{8 \times 11 \times 15}{3} = 440cm^3$$



Le volume de la pyramide SABCD est de 440 cm^3.
2) On sait que [SA] est la hauteur de la pyramide SABCD donc [SA] est perpendiculaire à [AB] donc le triangle SAB est rectangle en A.
On peut utiliser le théorème de Pythagore dans ce triangle pour déterminer la longueur SB :
$SA^2 + AB^2 = SB^2$ Donc : $15^2 + 8^2 = SB^2$

Donc : $SB = \sqrt{280} = 17$ La longueur SB mesure 17 cm.
3) Les points S, E, A d'une part et les points S, F, B d'autre part sont alignés dans le même ordre.
On a de plus : $\frac{SE}{SA} = \frac{12}{15} = 0.8$ et $\frac{SF}{SB} = \frac{13.6}{17} = 0.8$. Nous avons par conséquent : $\frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SB}$
Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (EF) et (AB) sont parallèles.

4) a) Calcul du coefficient de réduction : $\frac{SE}{SA} = k = 0.8$

Le coefficient de réduction est de 0,8.
b) Si on multiplie les dimensions de la pyramide SABCD par 0,8, on multipliera son volume par 0,8^3 pour obtenir celui de la pyramide SEFGH.
$V_2 = k^3 \times V_1 = 0.8^3 \times 440 = 225.28cm^3$
Le volume de la pyramide SEFGH est de 225,28 cm^3.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien