Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°3 : PRODUIT SCALAIRE

Exercice1 : (*) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\|=3$ et $\|\vec{v}\|=2\sqrt{2}$ et $(\vec{u};\vec{v})=\frac{\pi}{4}$

Calculer : $\vec{u}.\vec{v}$

Solution : $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})=3\times2\sqrt{2}\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=6$

Exercice2 : (*) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\|=3$ et $\|\vec{v}\|=\frac{1}{2}$ et $(\vec{u};\vec{v})=\frac{2\pi}{3}$

Calculer : $\vec{u}.\vec{v}$

Solution : $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})=3\times\frac{1}{2}\times\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}\times\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$ or $\cos(\pi-x)=-\cos x$

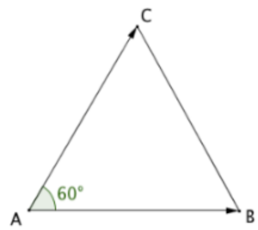
Donc : $\vec{u}.\vec{v}=-\frac{3}{2}\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}$

Exercice3 : (**) Soit un triangle équilatéral ABC de côté *a*.

Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Solution : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos BAC$

$$=a\times a\times\cos\frac{\pi}{3}=a^2\times\frac{1}{2}=\frac{a^2}{2}$$



Exercice4: (**) Déterminer, si possible, une mesure de l'angle $(\vec{u};\vec{v})$ (ou une approximation, si c'est possible) dans les cas suivants :

a) $\|\vec{u}\|=2$ et $\|\vec{v}\|=3$ et $\vec{u}.\vec{v}=-6$

b) $\|\vec{u}\|=2$ et $\|\vec{v}\|=\sqrt{3}$ et $\vec{u}.\vec{v}=-3$

c) $\|\vec{u}\|=3\sqrt{2}$ et $\|\vec{v}\|=2$ et $\vec{u}.\vec{v}=-6$

d) $\|\vec{u}\|=3$ et $\|\vec{v}\|=7$ et $\vec{u}.\vec{v}=14$

Solution :a) $\|\vec{u}\|=2$ et $\|\vec{v}\|=3$ et $\vec{u}.\vec{v}=-6$

On sait que : $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos(\vec{u};\vec{v})$ donc : $\cos(\vec{u};\vec{v})=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$

Donc : $\cos(\vec{u};\vec{v})=\frac{-6}{2\times3}=-1=\cos\pi$

Donc : $(\vec{u};\vec{v})\equiv\pi[2\pi]$

b) $\|\vec{u}\|=2$ et $\|\vec{v}\|=\sqrt{3}$ et $\vec{u}.\vec{v}=-3$

On sait que : $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos(\vec{u};\vec{v})$ donc : $\cos(\vec{u};\vec{v})=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$

Donc : $\cos(\vec{u};\vec{v})=\frac{-3}{2\sqrt{3}}=-\frac{3\sqrt{3}}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Donc : $\left(\vec{u};\vec{v}\right)\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$ ou $\left(\vec{u};\vec{v}\right)\equiv-\frac{5\pi}{6}[2\pi]$

c) $\left\|\vec{u}\right\|=3\sqrt{2}$ et $\left\|\vec{v}\right\|=2$ et $\vec{u}.\vec{v}=-6$.

On sait que : $\vec{u}.\vec{v}=\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)$ donc : $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|}$

Signifie que : $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\frac{-6}{3\sqrt{2}\times 2}=\frac{-6}{6\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Signifie que : $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

Donc : $\left(\vec{u};\vec{v}\right)\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]$ ou $\left(\vec{u};\vec{v}\right)\equiv-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

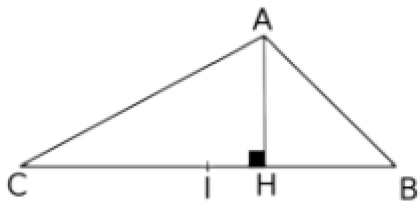
d) $\left\|\vec{u}\right\|=3$ et $\left\|\vec{v}\right\|=7$ et $\vec{u}.\vec{v}=14$

On sait que : $\vec{u}.\vec{v}=\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)$ donc : $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|}$

Signifie que : $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\frac{14}{3\times 7}=\frac{14}{21}=\frac{2}{3}$

Signifie que : $\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\equiv 0,841[2\pi]$ ou $\left(\vec{u};\vec{v}\right)=-\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\equiv -0,841[2\pi]$

Exercice5 : (*) Considérons un triangle ABC tels que : BC = 6, I est le milieu de [BC] et H le projeté orthogonal de A sur (BC). On a H ∈ [BI] et IH = 1.



Calculer : 1) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$ 2) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$

Solution :1) Calculons : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$

H étant le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) alors on a :

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH}$

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BH}$ étant colinéaire et de même sens alors :

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH}=BC\times BH$

Déterminons BH.

On a : $BH=BC-HC$ Or : $HC=HI+IC=3+1=4$ alors : $HC=4$

Ainsi : $BH=6-4=2$

Par conséquent : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH}=BC\times BH=6\times 2=12$

2)Calculons : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$

H étant le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) alors on a :

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CH}$

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CH}$ étant colinéaire et de sens contraire alors :

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CH}=-BC\times CH$

De ce qui précède on a : $HC=4$

Donc : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CH}=-6\times 4=-24$ D'où : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}=-24$

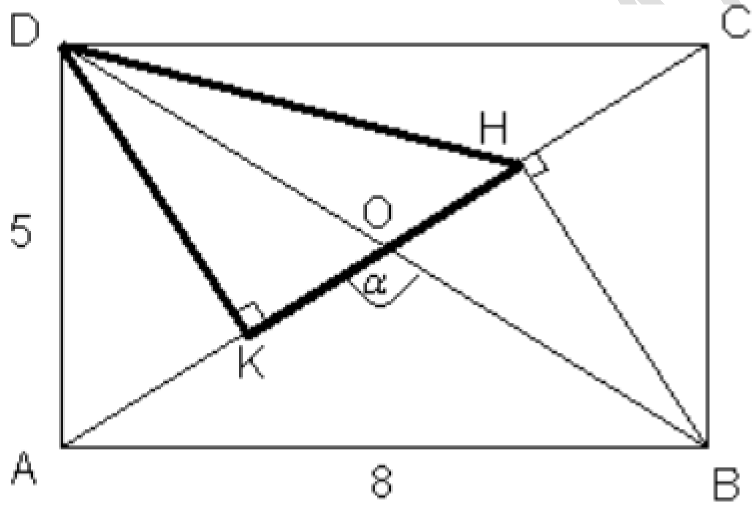
Exercice6 : (**) ABCD est un rectangle de centre O tel que AB=8 et AD=5
1) Calculer les produits scalaires suivants :a) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$

2) On désigne par α une mesure de l'angle AOB
Calculer $\cos\alpha$ puis en déduire une valeur approchée par défaut à 1 degré près de α
3) H et K sont les projetés orthogonaux respectifs de B et D sur (AC). Calculer AK et HK

4)a) Donner la valeur exacte de $\tan HDK$

b) En déduire une valeur approchée à 1 degré près de HDK

Solution : 1)a) Calculons : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$
Le point C se projette orthogonalement en D sur (AD), de sorte que :
$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}^2 = AD^2 = 25$
b) Calculons : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DC}$
On « réarrange » le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DC}$ avant de le calculer :
Le point A se projette orthogonalement en D sur (CD), de sorte que :
$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD}^2 = CD^2 = 64$
Donc : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DC} = 64$
c) Calculons : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$
On applique la relation de Chasles et la distributivité du produit scalaire pour calculer :
$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$
Le point C se projette orthogonalement en B sur (AB), de sorte que :
$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = 64$
Ainsi : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = -64 + 25 = -39$



2) On calcule de deux manière différentes le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$
D'une part : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}.\frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB} = \frac{1}{4}\left(-\overrightarrow{AC}\right).\left(-\overrightarrow{BD}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$
On a déjà calculé : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = -39$
Donc : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = -\frac{39}{4}$
D'autre part : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \left\|\overrightarrow{OA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OB}\right\| \times \cos\left(AOB\right)$
D'après le théorème de Pythagore, la diagonale AC du rectangle mesure :
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 5^2} = \sqrt{89}$
Donc : La demi diagonales mesurent : $OA = OB = \frac{1}{2}\sqrt{89}$

Ainsi : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\sqrt{89}\times\frac{1}{2}\sqrt{89}\times\cos(\alpha)$

En égalant les deux expressions du produit scalaire, on obtient : $\frac{89}{4}\times\cos(\alpha)=-\frac{39}{4}$

Donc : $\cos(\alpha)=-\frac{39}{89}$

Grâce à la calculatrice, on déduit que l'angle AOB mesure environ 116 ° (à 1 degré près)

3) On calcule de deux manière différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AD}$.

D'une part, le point D se projette orthogonalement en K sur (AO).

Ainsi : $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AK}$, et puisque les vecteurs $\overrightarrow{AO}$ *et* $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires de même sens,

Alors : $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AK}=AO\times AK=\frac{1}{2}\sqrt{89}AK$

D'autre part : $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\frac{25}{2}$

En égalant les deux expressions du produit scalaire $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AD}$

On obtiendra : $\frac{1}{2}\sqrt{89}AK=\frac{25}{2}$ qui signifie que : $AK=\frac{25}{\sqrt{89}}=\boxed{\frac{25\sqrt{89}}{98}}$

Par symétrie, on déduit la valeur de $HC=\boxed{\frac{25\sqrt{89}}{98}}$

On calcule alors $HK=AC-(AK+HC)$ c'est-à-dire : $HK=\sqrt{89}-2\frac{25}{\sqrt{89}}=\frac{89-50}{\sqrt{89}}=\frac{39}{\sqrt{89}}=\boxed{\frac{39\sqrt{89}}{89}}$

4) a) Dans le triangle HDK rectangle en K, on calcule $\tan HDK=\frac{HK}{DK}$

On calcule la longueur DK en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AKD rectangle en K : $DK^2=AD^2-AK^2=25-\left(\frac{25}{\sqrt{89}}\right)^2=\frac{1600}{89}$

Donc : $DK=\sqrt{\frac{1600}{89}}=\frac{40}{\sqrt{89}}$ et on termine de calculer : $\tan HDK=\frac{HK}{DK}=\frac{\frac{39}{\sqrt{89}}}{\frac{40}{\sqrt{89}}}=\frac{39}{40}$

b) Grâce à la calculatrice, on déduit que l'angle HDK mesure environ 44 ° (à 1 degré près)

Exercice7 : (**) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de même norme.

Démontrer que les vecteurs : $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux

Solution : Calculons : $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})$

On applique « l'identité remarquable du produit scalaire » :

$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$ or $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$

Donc : $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=0$

Par suite : les vecteurs : $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux

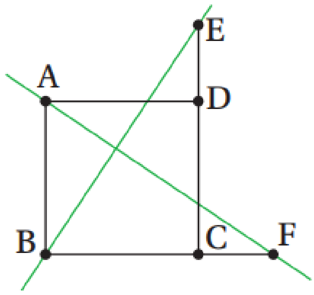
Exercice8 : (**) ABCD est un carré de côté c.

Les points E et F sont définis par : $\overrightarrow{CE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

Montrer que les droites (AF) et (BE) sont perpendiculaires.

Solution :

CONSEILS : Utilisez la relation de Chasles pour décomposer les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BE}$ et les écrire en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$, puis calculez leur produit scalaire.



$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$

Donc : $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE} = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}\right).\left(\overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}\right)$ et, en développant :

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} + \frac{9}{4}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}$$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD} = 0$ car $\overrightarrow{BC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}^2 = -AB^2 = -c^2$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}^2 = BC^2 = c^2$

D'où : $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE} = 0 - \frac{3}{2}c^2 + \frac{3}{2}c^2 + \frac{9}{4} \times 0 = 0$

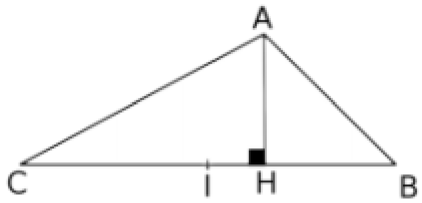
Donc : $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont orthogonaux, par suite : (AF) et (BE) sont perpendiculaires.

Exercice9 : (**) Considérons un triangle ABC tels que : $BAC = \frac{2\pi}{3}$ et $AC = 2$ et $AB = \sqrt{3} - 1$

1) a) Montrer que : $BC = \sqrt{6}$

b) Montrer que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 3 - \sqrt{3}$

2)Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).



Calculer : BH

Solution :1) a) Montrons que : $BC = \sqrt{6}$

D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC nous obtenons :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos BAC$$

$$BC^2 = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2 + 4 - 4\left(\sqrt{3} - 1\right)\cos\frac{2\pi}{3}$$

$BC^2 = 8 - 2\sqrt{3} - 4\left(\sqrt{3} - 1\right)\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ on a : $\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

$$BC^2 = 8 - 2\sqrt{3} + 4\left(\sqrt{3} - 1\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$BC^2 = 8 - 2\sqrt{3} + 4\left(\sqrt{3} - 1\right)\frac{1}{2} = 6$$

Donc : $BC = \sqrt{6}$

b) Montrons que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 3 - \sqrt{3}$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}^2-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = BA^2-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB\times AC\cos\frac{2\pi}{3}$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left(\sqrt{3}-1\right)\times 2\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}+1$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \left(\sqrt{3}-1\right)^2+\sqrt{3}-1$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 3-\sqrt{3}$

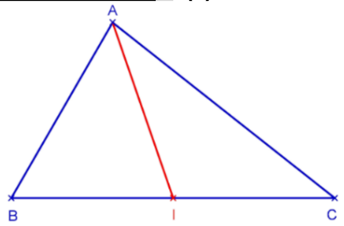
2)Calculons : BH

On a : H le projeté orthogonal de A sur (BC) et puisque : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 3-\sqrt{3} > 0$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = BH\times BC$

Donc : $\boxed{BH = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BC} = \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}$

Exercice10 : (*) ABC est un triangle tel que AB=2 ; BC=6 et AC=5 et I est le milieu de [BC].



Calculer la longueur AI.

Solution :D'après le Théorème de la médiane dans ABC nous obtenons :

$AB^2+AC^2 = 2AI^2+\frac{BC^2}{2}$

Donc : $4+25 = 2AI^2+\frac{36}{2}$

Donc : $2AI^2 = 29-18$

Donc : $AI^2 = \frac{11}{2}$

Donc : $\boxed{AI = \sqrt{\frac{11}{2}}}$

Exercice11 : (***) Soit ABC un triangle tel que et $AB=3$ et $BC=4\sqrt{3}$ et $ABC = \frac{\pi}{6}$

I le milieu du segment$[BC]$

1) Calculer AC

2) Montrer que $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 18$

3) Montrer que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

4) Calculer : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}$ et en déduire la nature du triangle AIB

Solution : 1) Calculons AC

D'après le Théorème d'Al Kashi on a :

$AC^2 = BA^2+BC^2-2BA\times BC\cos ABC$

$AC^2 = 9+48-24\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $AC^2 = 21$ par suite : $AC = \sqrt{21}$

b) Montrons que : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 18$

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=BA\times BC\times\cos ABC=3\times4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=18$$

3) Montrons que : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Nous avons : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}$

Puisque I est le milieu du segment $[BC]$ nous obtenons : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

4) Calculons $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$$

Donc : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=9-\frac{1}{2}\times18=0$

On a : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ Nous en déduisons que la droite (AI) est perpendiculaire à la droite (AB)

Et par conséquent le triangle AIB est rectangle en A

Exercice12 : (***) Soit $ABCD$ un carré de centre I et a la longueur de son côté ; on construit à l'extérieur un triangle équilatérale BCE (voir figure)

1) Soit J le milieu du segment $[AD]$ et K le milieu du segment $[BC]$

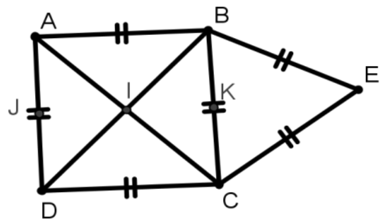
Calculer $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC}$ en fonction de a

2) a) Montrer que : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

b) En déduire que : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

3) En utilisant les résultats de la question b) montrer que $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$:

Et en déduire : $\sin\frac{7\pi}{12}$ et $\tan\frac{7\pi}{12}$



Solution : 1) Calcul de $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC}$ en fonction de a

On a : $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IJ}\bullet\left(\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{KC}\right)$ donc : $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{KC}$

Et puisque : $(IJ)\perp(KC)$ alors : $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{KC}=0$

Et puisque : I le milieu de $[JK]$ alors : $\overrightarrow{IK}=-\overrightarrow{IJ}$

Donc : $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IJ}\bullet\left(-\overrightarrow{IJ}\right)=-\overrightarrow{IJ}^2=-IJ^2$

Donc : $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC}=-\frac{a^2}{4}$ car $IJ=\frac{a}{2}$

2) a) Montrons que : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

• Montrons d'abord que les points : I ; K et E sont alignés ?

On a : $EC=EB$ et $IC=IB$ car $ABCD$ un carré

Et on a : $KC=KB$ car K le milieu du segment $[BC]$

Donc : les points : I ; K et E appartiennent à la médiatrice du segment $[BC]$

Donc : I ; K et E sont alignés

• On a : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=\left(\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{KB}\right)\bullet\overrightarrow{IE}$ donc : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=\overrightarrow{IK}\bullet\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{KB}\bullet\overrightarrow{IE}$

Et puisque : $(KB)\perp(IE)$ alors : $\overrightarrow{KB}\bullet\overrightarrow{IE}=0$

Donc : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=\overrightarrow{IK}\bullet\overrightarrow{IE}$

Donc : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=IK\times IE\cos\left(\overrightarrow{IK};\overrightarrow{IE}\right)$

Donc : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=IK\times IE\cos(0)=IK\times IE$ car $\cos(0)=1$

Or on a : $IK=\frac{a}{2}$ et $IE=IK+KE=IK+\sqrt{CE^2-CK^2}$

Donc : $IE=\frac{a}{2}+\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{2}+\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}a$

Donc : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}a\times a=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}a^2$

b) déduction que : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

On a : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BI}\bullet\left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IE}\right)$ donc : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BI}^2+\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{IE}=BI^2+\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{IE}$

Donc : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=BI^2-\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}$

Donc : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=KI^2+KB^2-\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}$ car $BI^2=KI^2+KB^2$ (le triangle IKB est rectangle en K) ($KI=KB=\frac{a}{2}$)

Donc : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=2\left(\frac{a}{2}\right)^2-\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}a^2$ $\frac{a}{2}$ et par suite : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

3) Montrons que : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

On a : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=BI\times BE\cos\left(\widehat{IBE}\right)$ donc : $\cos\left(\widehat{IBE}\right)=\frac{\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}}{BI\times BE}$

Et on a : $\widehat{IBE}=\widehat{IBC}+\widehat{CBE}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}$ et on a $BI=\frac{\sqrt{2}}{2}a$ et $BE=a$ et $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

Donc : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)a^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}a^2}=\frac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Déduction de : $\sin\frac{7\pi}{12}$?

On a : $\sin^2\frac{7\pi}{12}+\cos^2\frac{7\pi}{12}=1$ donc : $\sin^2\frac{7\pi}{12}=1-\cos^2\frac{7\pi}{12}=1-\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2=1-\frac{8-2\sqrt{12}}{16}=\frac{8+2\sqrt{12}}{16}$

Donc : $\sin^2\frac{7\pi}{12}=\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2$ par suite : $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ou $\sin\frac{7\pi}{12}=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Or : $0\prec\frac{7\pi}{12}\prec\pi$ donc : $\sin\frac{7\pi}{12}\geq 0$ et par suite : $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Calcul de : $\tan\frac{7\pi}{12}$?

$$\tan\frac{7\pi}{12}=\frac{\sin\frac{7\pi}{12}}{\cos\frac{7\pi}{12}}=\frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2}{\sqrt{2}^2-\sqrt{6}^2}=\frac{8+2\sqrt{12}}{-4}=-2-\sqrt{3}$$

Exercice13 : (****) Soit A et B deux points dans le plan tel que : $AB=5$

Et soit I le point du segment $[AB]$ tel que : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$

1) Montrer que : $4\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$
2) Calculer les distances : IA et IB
3) Montrer que : quel que soit M un point du plan on a : $4MA^2+MB^2=5MI^2+17$
4) Déterminer (C) l'ensemble des points M du plan tel que : $4MA^2+MB^2=37$

Solution : $AB=5$ et $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$

1) Montrons que : $4\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

$$4\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=4\left(-\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}$$

$$=-\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$

2) Calculons les distances IA et IB : On a : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ donc : $\left\|\overrightarrow{AI}\right\|=\left\|\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}\right\|$

Donc : $AI=\frac{1}{5}AB=\frac{1}{5}\times 5=1$ Par suite : $IB=AB-AI=4$

3) Montrons que : quel que soit M un point du plan on a : $4MA^2+MB^2=5MI^2+17$

Soit M un point du plan on a : $4MA^2+MB^2=4\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2$

Donc : $4MA^2+MB^2=4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

Donc : $4MA^2+MB^2=4\left(\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}^2$

Donc : $4MA^2+MB^2=5\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\left(4\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+IA^2+IB^2$

Donc : $4MA^2+MB^2=5\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\left(\vec{0}\right)+1^2+4^2$

Par suite : $4MA^2+MB^2=5MI^2+17$

4) Déterminons l'ensemble (C) des points M du plan tel que : $4MA^2+MB^2=37$?

On a : $4MA^2+MB^2=5MI^2+17$ Donc : $5MI^2+17=37$

Cela équivaut à dire que : $MI^2=4$

Par conséquent : l'ensemble (C) des points M du plan tel que : $4MA^2+MB^2=37$

Est le cercle de centre I et de rayon $R=2$.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien