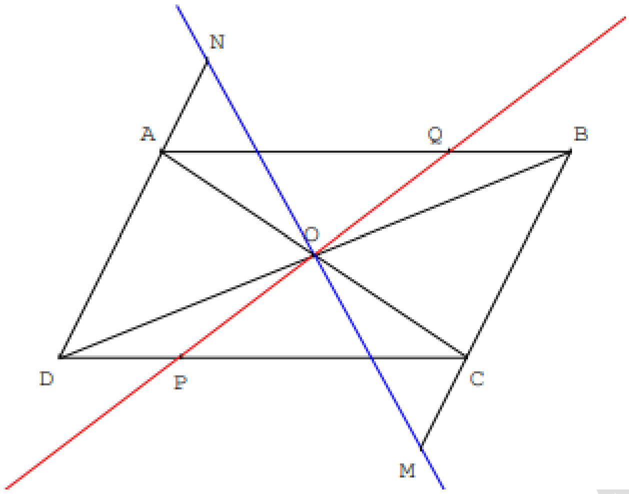
Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°3 :
Les Transformations du plan

Exercice 1 : (**) $ABCD$ un parallélogramme de centre O.
Une droite (D) passant par O coupe les droites (DC) en P et (AB) en Q. Une droite (Δ) passant par O coupe les droites (AD) en N et (BC) en M



1) Quelles sont les images des points A, B, C, D par la symétrie de centre O ?
2) Quelles sont les images des droites (D), (BC) et (CD) par la symétrie de centre O ?
3) Démontrer que le quadrilatère MPNQ est un parallélogramme

Solution : S_O est une symétrie centrale de centre O

1) Par la symétrie de centre O, l'image de A est C : $S_O(A)=C$

L'image de B est D : $S_O(B)=D$

L'image de C est A : $S_O(C)=A$

L'image de D est B : En effet, l'intersection des diagonales d'un parallélogramme est un centre de symétrie Donc : $S_O(D)=B$

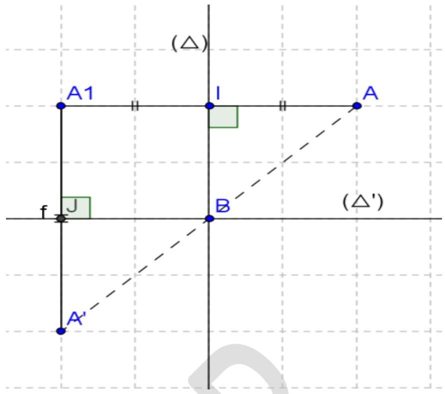
2) Puisque l'image de O est O et que l'image d'une droite est une droite parallèle (par une symétrie centrale), alors l'image de (D) est (D).
Comme l'image de B est D et que l'image de C est A, alors l'image de (BC) est (DA).
Comme l'image de C est A et que l'image de D est B, alors l'image de (CD) est (AB).
3) Démontrons que le quadrilatère MPNQ est un parallélogramme.
L'image de (D) est (D) et l'image de (BC) est (DA), donc l'image de M intersection de (D) et (BC) est N intersection de (D) et (DA).
L'image de (D) est (D) et l'image de (CD) est (AB), donc l'image de P intersection de (D) et (CD) est Q intersection de (D) et (AB).
Puisque, par la symétrie de centre O, l'image de M est N et l'image de P est Q, alors le quadrilatère MPNQ a un centre de symétrie, c'est donc un parallélogramme.

Exercice 2 : (**) On considère les droites (Δ) et (Δ') perpendiculaires en un point O

Soit A un point du plan (P) et A_1 son image par la symétrie axiale : $S_{(\Delta)}$

Et A' l'image de A_1 par la symétrie axiale : $S_{(\Delta)}$

Montrer que : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA'}=\vec{0}$



Solution : On a : $S_{(\Delta)}(A) = A_1$ et $S_{(\Delta)}(A_1) = A'$

Soit I Le milieu du segment $[AA_1]$ donc : $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OI}$

Soit I Le milieu du segment $[A_1A']$ donc : $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OA_1} = 2\overrightarrow{OJ}$

Par suite : $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA} = 2\left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}\right)$

Et puisque : $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OA_1}$ (car OIA_1J est un rectangle)

Alors : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'} = \vec{0}$

Exercice 3 : (***) Soit ABC un triangle ; I et J et K les milieux respectivement des segments $[BC]$ et $[AC]$ et $[AB]$

1) Montrer que : $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CK} = \vec{0}$

2) Soit M le point du plan.

Représenter les points E et F les images du point M respectivement par les translations $t_{\overrightarrow{KC}}$ et $t_{\overrightarrow{BJ}}$

3) Déterminer la translation qui transforme E en F

Solution : 1) Montrons que : $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CK} = \vec{0}$

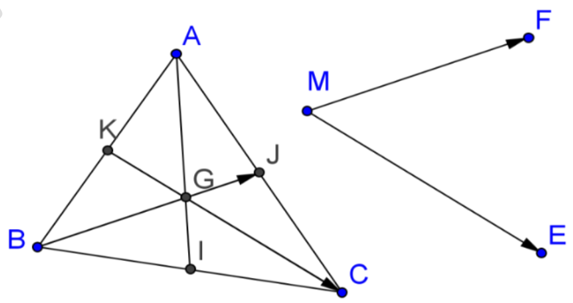
Soit G Le centre de gravité du triangle ABC

Alors on sait que : $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CG}$

Donc : $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BG} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CG} = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}\right) = \vec{0}$ car $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$

2) Représentation des points E et F :

3) Détermination de la translation qui transforme E en F



On a : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MF}$ donc : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{BJ}$

Et puisque : $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CK} = \vec{0}$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CK} = -\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IA}$

Donc : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{IA}$ par suite : $t_{\overrightarrow{IA}}(E) = F$

Par conséquent la translation qui transforme E en F est $t_{\overrightarrow{IA}}$ c'est-à-dire : la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$

Exercice 4: (**) Écrire les expressions vectorielles suivantes en utilisant une homothétie :

1) $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ Avec I un point donné

2) $2\overrightarrow{\Omega B} = -\overrightarrow{BA}$ Avec Ω un point donné

3) $3\overrightarrow{IA} - 5\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ Avec I un point donné

Solution $h(I,k)$:

1) $h(A) = B$ Equivaut à : $\overrightarrow{IB} = k\overrightarrow{IA}$

$2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ Equivaut à : $2\overrightarrow{IA} + 3\left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\right) = \vec{0}$

Equivaut à : $2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Equivaut à : $-\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Equivaut à : $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ donc $h\left(I, \frac{1}{3}\right)$

2) $2\overrightarrow{\Omega B} = -\overrightarrow{BA}$ Equivaut à : $2\overrightarrow{\Omega B} = \overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega B}$

Equivaut à : $2\overrightarrow{\Omega B} - \overrightarrow{\Omega B} = -\overrightarrow{\Omega A}$ Equivaut à : $2\overrightarrow{\Omega B} = \overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $\overrightarrow{\Omega B}=-\overrightarrow{\Omega A}$
Donc $h(\Omega,-1)$

3) $3\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ Equivaut à : $3\overrightarrow{IA}-5\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)=\vec{0}$

Equivaut à : $3\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{AI}-5\overrightarrow{IB}=\vec{0}$
Equivaut à : $3\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{IB}=\vec{0}$
Equivaut à : $8\overrightarrow{IA}=5\overrightarrow{IB}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{IB}=\frac{8}{5}\overrightarrow{IA}$ donc $h\left(I,\frac{8}{5}\right)$.

Exercice 5: (***) Soient A et B deux points fixes du plan. Soit T une transformation du plan qui transforme chaque point M en M' tel que : $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}$
Montrer que T est une homothétie de centre I le milieu du segment $[AB]$ et déterminer son rapport k

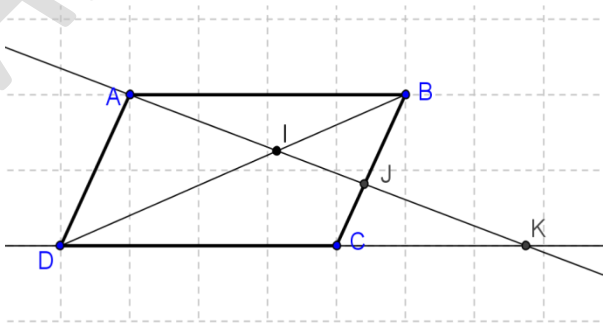
Solution : pour chaque point M du plan nous avons : $T(M)=M'$ Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IM'}=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)$

Équivaut à : $\overrightarrow{IM'}=2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{MI}$
Équivaut à : $\overrightarrow{IM'}=3\overrightarrow{MI}+2\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)$ or on a : I le milieu du segment $[AB]$ donc : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{IM'}=-3\overrightarrow{IM}$
Cela veut dire que : h est une homothétie de centre I le milieu du segment $[AB]$ et de rapport $k=-3$

Exercice 6 : (***) Soit $ABCD$ un parallélogramme et I un point fixe qui appartient a $[BD]$ et J le point d'intersection des droites (AI) et (BC) et soit K le point d'intersection des droites (AI) et (CD)
Soit h l'homothétie de centre I et qui transforme B en D



1) Déterminer $h(A)$ et $h(J)$
2) Montrer que : $IA^2=IJ\times IK$

Solution :1) a) Déterminons $h(A)$?

On a : $h(B)=D$ et puisque l'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle
Alors : l'image de la droite (AB) est la droite qui passe par D est parallèle à (AB) c'est-à-dire (DC)

Par suite : $h((AB))=(CD)$

Et on a : $I\in(AI)$ donc : $h((AI))=(AI)$

Et puisque : $A\in(AI)\cap(AB)$ alors $h(A)\in h((AI))\cap h((AB))$ c'est-à-dire : $h(A)\in(AI)\cap(CD)$

Et on a : $(AI)\cap(CD)=\{K\}$ Donc : $h(A)=K$

b) Déterminons $h(J)$?

On a : $h((AI))=(AI)$ et $h(B)=D$ donc : l'image de la droite (BC) est la droite qui passe par D est parallèle à (BC) c'est-à-dire (AD)

Par suite : $h((BC))=(AD)$

Et puisque : $J \in (BC) \cap (AI)$ alors $h(J) \in h((BC)) \cap h((AI))$ c'est-à-dire : $h(J) \in (AD) \cap (AI)$

Et on a : $(AD) \cap (AI) = \{A\}$ Donc : $h(J) = A$

2) Soit $h(I,k)$: On a : $h(A) = K$ Équivaut à : $\overrightarrow{IK} = k\overrightarrow{IA}$ donc : $IK = |k| IA$ (1)

Et on a : $h(J) = A$ Équivaut à : $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{IJ}$ donc : $IA = |k| IJ$ (2)

De (1) et (2) on déduit que : $\dfrac{IK}{IA} = \dfrac{IA}{IJ} = |k|$ et par suite : $IA^2 = IJ \times IK$

Exercice 7 : (***) Soient deux points fixes différents A et B du plan.

Soit f une transformation du plan qui transforme chaque point M en M' tel que :

$\overrightarrow{M'B} + \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{M'A}$

Montrer que f est une translation et Trouver son vecteur

Solution :1) pour chaque point M du plan nous avons :

$f(M) = M'$ Équivaut à : $\overrightarrow{M'B} + \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{M'A}$

Équivaut à : $\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{M'A}$

Équivaut à : $\overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ c'est-à-dire : $t_{\overrightarrow{AB}}(M) = M'$

Cela veut dire que : f est une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

2) pour chaque point M du plan nous avons :

$f(M) = M'$ Équivaut à : $\overrightarrow{MM'} - 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'} - 3\overrightarrow{MA} + 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'} - 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'} = -2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Équivaut à : $t_{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}(M) = M'$ Cela veut dire que : f est une translation de vecteur $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

3) pour chaque point M du plan nous avons :

$f(M) = M'$ Équivaut à : $7\overrightarrow{MB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{M'M} - 7\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

Équivaut à : $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{M'M} + 7(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = \vec{0}$

Équivaut à : $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{M'M} + 7\overrightarrow{BA} = \vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'} = \dfrac{21}{2}\overrightarrow{BA}$

Équivaut à : $t_{\frac{21}{2}\overrightarrow{BA}}(M) = M'$ Cela veut dire que : f est une translation de vecteur $\dfrac{21}{2}\overrightarrow{BA}$

Exercice 8 : (***) ABC un triangle et I le milieu du segment $[BC]$ soient les points B' et C' tels que : $\overrightarrow{AB'} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et le point J le milieu du segment $[B'C']$

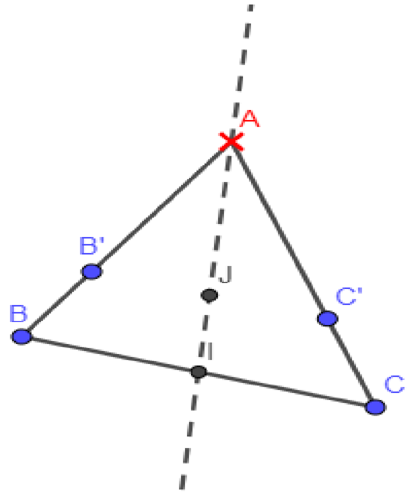
On considère l'homothétie h de centre A et de rapport $k = \dfrac{2}{3}$

1) Montrer que : $\overrightarrow{B'C'} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

2) En utilisant l'homothétie, Montrer que les points J ; A et I sont alignés

Solution :

1) Montrons que : $\overrightarrow{B'C'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$



Méthode 1 :On a : $\overrightarrow{AB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ceci signifie que : $h(B) = B'$

De même on a : $\overrightarrow{AC'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ ceci signifie que : $h(C) = C'$

Donc : $\begin{cases} h(B) = B' \\ h(C) = C' \end{cases}$ et par suite : D'après la propriété

caractéristique on obtient : $\overrightarrow{B'C'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Méthode 2 : En utilisant la relation de Chasles, on a :

$\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{AC'} = \frac{-2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

2) Montrons que les points J ; A et I sont alignés

L'image du point A par l'homothétie h est A' et L'image du point B par h est B'

Donc : L'image du segment $[BC]$ par h est le segment $[B'C']$, et comme I est le milieu du segment $[BC]$ alors $h(I)$ est le milieu de $[B'C']$ et comme J est le milieu de $[B'C']$

Donc : $h(I) = J$: Car l'homothétie conserve les milieux. Ceci signifie que les points J ; A et I sont alignés

Exercice 9 : (***) Soit IAB un triangle et soient les points C et D tels que :

$\overrightarrow{IC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ et $2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{BD} = \vec{0}$

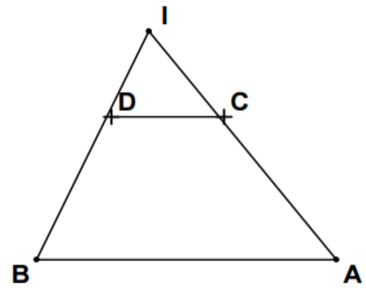
On considère l'homothétie h de centre I et de rapport $k = \frac{1}{3}$

1) Faite une figure

2) Montrer que : $h(A) = C$ et $h(B) = D$

3) Montrer que : $AB = 3CD$

Solution :1) La figure



2) a) Montrons que : $h(A) = C$

On a : $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ ceci signifie que l'image de A par l'homothétie h est C

C'est-à-dire : $h(A) = C$

b) Montrons que : $h(B) = D$: Il suffit de montrer que : $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$

On a : $2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{BD} = \vec{0}$ donc : $2\left(\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DB}\right) + 3\overrightarrow{BD} = \vec{0}$

Donc : $2\overrightarrow{ID} + 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BD} = \vec{0}$

Donc : $2\overrightarrow{ID} + 2\left(\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IB}\right) + 3\left(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{ID}\right) = \vec{0}$

Donc : $5\overrightarrow{ID} + 2\overrightarrow{DI} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{BI} = \vec{0}$ c'est-à-dire : $3\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IB}$ ceci signifie que : $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$

Par suite : $h(B) = D$

3) Montrons que : $AB = 3CD$

On a : : $\begin{cases} h(A)=C \\ h(B)=D \end{cases}$ et par suite : D'après la propriété caractéristique on obtient : $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Par passage à la norme on obtient : $\left\|\overrightarrow{CD}\right\|=\left\|\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right\|$

Donc : $CD=\left|\frac{1}{3}\right|\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

Donc : $CD=\frac{1}{3}AB$ par suite : $AB=3CD$

Exercice 10 : (****) A et B deux points fixes

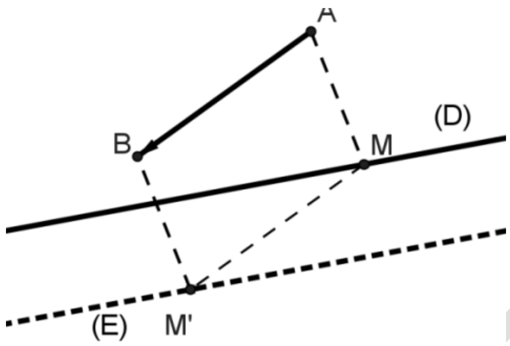
1) Soit une droite (D) et M un point qui varie sur la droite (D)

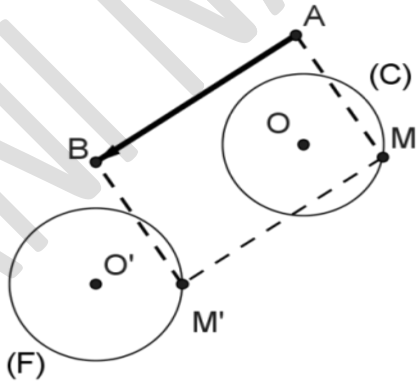
Déterminer l'ensemble (E) des points M' tel que : $MABM'$ est un parallélogramme

2) (C) est un cercle et M un point qui varie sur le cercle (C)

Déterminer l'ensemble (F) des points M' tel que : $MABM'$ est un parallélogramme

Solution : 1)





On a : $MABM'$ est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AB}$ signifie que : $t_{\overrightarrow{AB}}(M)=M'$

Donc : M' est l'image M par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$

Et puisque M un point qui varie sur la droite (D) alors son image M' varie sur l'image de la droite (D)

Et puisque l'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle

Donc : l'ensemble (E) des points M' est la droite qui passe par M' est parallèle a la droite (D)

2) On a : $MABM'$ est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AB}$ signifie que : $t_{\overrightarrow{AB}}(M)=M'$

Donc : M' est l'image M par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$

Et puisque M un point qui varie sur le cercle (C) alors son image M' varie sur l'image du cercle (C)

Et puisque l'image d'un cercle par une translation est un cercle

Donc : l'ensemble (F) des points M' est l'image du cercle (C) par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien