Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°3 : TRIGONOMÉTRIE2

Partie 2 : Equations et inéquations trigonométriques

Exercice 1 : (*) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $\sin x = -\frac{1}{2}$

2) En déduire les solutions dans $[0;2\pi]$ de l'équation $\sin x = -\frac{1}{2}$

Solution :1) $\sin x = -\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Donc : $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

2)

- Encadrement de $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$: $0 \le -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le 2\pi$

Équivaut à : $\frac{1}{12} \le k \le \frac{13}{12}$

C'est-à-dire : $0,08 \le k \le 1,02$ et $k \in \mathbb{Z}$ Donc $k = 1$

Pour $k = 1$ on remplace on trouve $x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$

- Encadrement de $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$: $0 \le \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \le 2\pi$ Donc $0 \le \frac{7}{6} + 2k \le 2$ c'est-à-dire : $-\frac{7}{12} \le k \le \frac{5}{12}$

Donc $-0,5 \le k \le 0,41$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ on remplace on trouve : $x_2 = \frac{7\pi}{6}$

Donc $S_{[0;2\pi]} = \left\{\frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right\}$

Exercice 2 : (*) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) En déduire les solutions dans $]-\pi,\pi]$ de l'équation : $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution :1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Donc : $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) Résolution dans $]-\pi,\pi]$ de l'équation

Méthode1 : (l'encadrement)

a) Encadrement de : $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$: $-\pi<\frac{\pi}{4}+2k\pi\le\pi$ Équivaut à : $-\pi-\frac{\pi}{4}<2k\pi\le\pi-\frac{\pi}{4}$

Équivaut à : $-\frac{5\pi}{4}<2k\pi\le\frac{3\pi}{4}$ Équivaut à : $-\frac{5}{4}\le 2k\le\frac{3}{4}$ Équivaut à : $-\frac{5}{8}\le k\le\frac{3}{8}$

C'est-à-dire : $-0,6...\le k\le 0,37...$ et $k\in\mathbb{Z}$ Donc $k=0$

Pour $k=0$ on remplace on trouve $x_1=\frac{\pi}{4}+2\times 0\times\pi=\frac{\pi}{4}$

b) Encadrement de $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$: $-\pi<-\frac{\pi}{4}+2k\pi\le\pi$

Donc : $-1<-\frac{1}{4}+2k\le 1$ c'est-à-dire : $-1+\frac{1}{4}<2k\le 1+\frac{1}{4}$

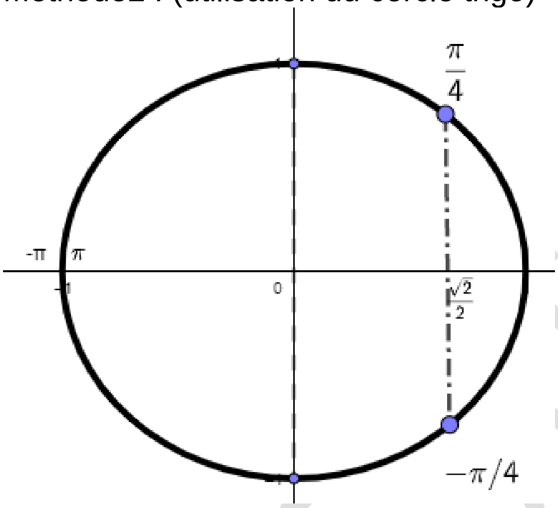
Donc : $-\frac{3}{4}<2k\le\frac{5}{4}$ c'est-à-dire : $-\frac{3}{8}<k\le\frac{5}{8}$

Donc $-0,37...\le k\le 0,62...$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ on remplace on trouve : $x_2=-\frac{\pi}{4}+2\times 0\times\pi=-\frac{\pi}{4}$

Donc $S_{]-\pi,\pi]}=\left\{-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right\}$

Méthode2 : (utilisation du cercle trigo)



Donc : $S_{]-\pi,\pi]}=\left\{-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right\}$

Exercice 3 : (*) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) En déduire les solutions dans $]-\pi,\pi]$ de l'équation : $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution :1) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos x=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $\cos x=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Donc : $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{5\pi}{6}+2k\pi;\frac{5\pi}{6}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) Résolution dans $]-\pi,\pi]$ de l'équation

Méthode1 : (l'encadrement)

a) Encadrement de $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$: $-\pi<\frac{5\pi}{6}+2k\pi\leq\pi$

Donc : $-1<\frac{5}{6}+2k\leq 1$ c'est-à-dire : $-1-\frac{5}{6}<2k\leq 1-\frac{5}{6}$

Donc : $-\frac{11}{6}<2k\leq\frac{1}{6}$ c'est-à-dire : $-\frac{11}{12}<k\leq\frac{1}{12}$

Donc $-0,9...\leq k\leq 0,08...$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ on remplace on trouve : $x_2=\frac{5\pi}{6}+2\times 0\times\pi=\frac{5\pi}{6}$

b) Encadrement de $x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$: $-\pi<-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\leq\pi$

Donc : $-1<-\frac{5}{6}+2k\leq 1$ c'est-à-dire : $-1+\frac{5}{6}<2k\leq 1+\frac{5}{6}$

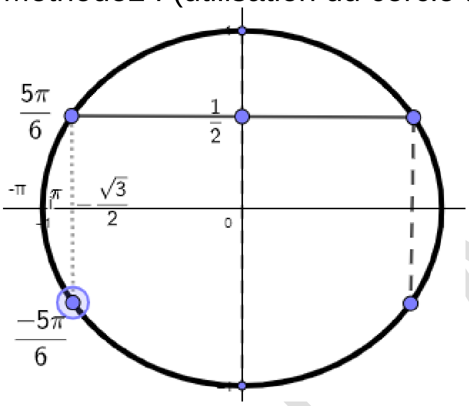
Donc : $-\frac{1}{6}<2k\leq\frac{11}{6}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{12}<k\leq\frac{11}{12}$

Donc $-0,...\leq k\leq 0,...$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ on remplace on trouve : $x_2=-\frac{5\pi}{6}+2\times 0\times\pi=-\frac{5\pi}{6}$

Donc $S_{]-\pi,\pi]}=\left\{-\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\}$

Méthode2 : (utilisation du cercle trigo)



Donc : $S_{]-\pi,\pi]}=\left\{-\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\}$

Exercice 4 : (**) Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation : $\cos x=-\sin\frac{\pi}{5}$

Solution : $\cos x=-\sin\frac{\pi}{5}$ Équivaut à : $\cos x=\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$

Équivaut à : $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$ Équivaut à : $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)$ Équivaut à : $\cos x=\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right)$

Équivaut à : $x=\frac{7\pi}{10}+2k\pi$ ou $x=-\frac{7\pi}{10}+2k\pi$

a) Encadrement de : $x=\frac{7\pi}{10}+2k\pi$: $-\frac{\pi}{2}<\frac{7\pi}{10}+2k\pi<\frac{\pi}{2}$

Donc : $-\frac{1}{2}<\frac{7}{10}+2k<\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{2}-\frac{7}{10}<2k<\frac{1}{2}-\frac{7}{10}$

Donc : $-\frac{6}{5}<2k<-\frac{1}{5}$ c'est-à-dire : $-\frac{6}{10}<k<-\frac{1}{10}$ et $k\in\mathbb{Z}$ (impossible)

b) Encadrement de : $x=-\frac{7\pi}{10}+2k\pi$: $-\frac{\pi}{2}<-\frac{7\pi}{10}+2k\pi<\frac{\pi}{2}$

Donc : $-\frac{1}{2}<-\frac{7}{10}+2k<\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{2}+\frac{7}{10}<2k<\frac{1}{2}+\frac{7}{10}$

C'est-à-dire : $\frac{1}{5}<2k\leq\frac{6}{5}$ c'est-à-dire : $\frac{1}{10}<k\leq\frac{6}{10}$ et $k\in\mathbb{Z}$ (impossible)

Donc $S_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}=\varnothing$

Exercice 5 : (*) **1)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

2) Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation suivante : $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Solution :1) On a : $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ est définie dans $\mathbb{R}$ si et seulement si : $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ avec ; $k\in\mathbb{Z}$

On sait que : $\text{t}\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ signifie que : $\tan x=\tan\frac{\pi}{6}$ si et seulement si : $x=\frac{\pi}{6}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$

Donc L'ensemble de solution de l'équation dans $\mathbb{R}$ est : $S=\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) Résolution dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation : $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ Signifie que : $x=\frac{\pi}{6}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$

On a deux méthodes soit l'encadrement ou en donnant des valeurs a k

Prenons par exemple la valeur $k=-2$ et remplaçons on obtient : $x=\frac{\pi}{6}-2\pi=-\frac{11\pi}{6}$; cette valeur n'appartient pas à $]-\pi,\pi]$; il est donc évident que des valeurs de k inférieures à -2 ne conviendront pas non plus.

Par contre, si je choisis $k=-1$: on obtient $x=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5\pi}{6}$; cette valeur appartient à $]-\pi,\pi]$.

En appliquant cette démarche de manière systématique :

pour $k=-1$: $x_1=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5\pi}{6}$ convient car appartient à $]-\pi,\pi]$

pour $k=0$: $x_2=\frac{\pi}{6}$ convient car appartient à $]-\pi,\pi]$

pour $k=1$: $x=\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{7\pi}{6}$ ne convient pas car n'appartient pas à $]-\pi,\pi]$

Il est inutile de poursuivre (car si pour $k=1$, la valeur trouvée n'appartient plus à l'intervalle, il en sera de même *a fortiori* pour des valeurs supérieures de k)

Donc : les seules valeurs dans $]-\pi\,;\pi]$ sont : $x_1=-\frac{5\pi}{6}$ et $x_2=\frac{\pi}{6}$

Par suite : $S=\left\{-\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right\}$

Exercice 6 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante $\sin^2 x=1$

Solution : Règles : Par lecture du cercle trigonométrique, on obtient dans chaque cas une seule famille de solutions.

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

On effectue la racine carrée de chaque côté de l'égalité et on obtient : $\sin x = 1$ ou $\sin x = -1$

En regardant dans le cercle trigonométrique, on trouve que :

$\sin x = 1$ Équivaut à : $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\sin x = -1$ Équivaut à : $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

Donc L'ensemble solution de l'équation dans $\mathbb{R}$ est : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \, ; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\} avec\ k \in \mathbb{Z}$

Exercice 7 : (*) (**) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{2} \quad (E)$

2) En déduire dans $[-\pi \, ; 2\pi[$ les solutions de l'équation (E)

Solution :1) on a : $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{2}$ équivaut à : $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sin\frac{\pi}{6}$

Équivaut à : $\frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\frac{\pi}{4} - x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Équivaut à : $-x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $-x = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{12} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

2) Résolution dans $[-\pi \, ; 2\pi[$ de l'équation (E)

- Encadrement de : $\frac{\pi}{12} + 2k\pi$: $-\pi \le \frac{\pi}{12} + 2k\pi < 2\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $-1 \le \frac{1}{12} + 2k < 2$ c'est-à-dire : $-\frac{13}{12} \le 2k < \frac{23}{12}$ cela signifie que : $-\frac{13}{24} \le k < \frac{23}{24}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ et Pour $k = 0$ on trouve : $x_1 = \frac{\pi}{12}$

- Encadrement de : $-\frac{7\pi}{12} + 2k\pi$: $-\pi \le -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi < 2\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $-1 \le \frac{-7}{12} + 2k < 2$ alors : $-1 + \frac{7}{12} \le 2k < 2 + \frac{7}{12}$ c'est-à-dire : $-\frac{5}{24} \le k < \frac{31}{24}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ ou $k = 1$

Pour $k = 0$ on trouve $x_2 = \frac{-7\pi}{12}$ et Pour $k = 1$ on trouve $x_3 = \frac{17\pi}{12}$

Donc $S_{[-\pi \, ; 2\pi[} = \left\{ \frac{-7\pi}{12} ; \frac{\pi}{12} ; \frac{17\pi}{12} \right\}$

Exercice8 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : (E) : $\sqrt{3}\tan^2 x+\left(\sqrt{3}-1\right)\tan x-1=0$

Solution :1) On pose $t=\tan x$ et l'équation (E) devient : $\sqrt{3}t^2+\left(\sqrt{3}-1\right)t-1=0$

On cherche les racines du trinôme $\sqrt{3}t^2+\left(\sqrt{3}-1\right)t-1$

Calcul du discriminant :

$$\Delta=b^2-4ac=\left(\sqrt{3}-1\right)^2+4\times1\times\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}\right)^2-2\times\sqrt{3}+1+4\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\times\sqrt{3}+1=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$$

Les racines sont : $t_1=\dfrac{-\left(\sqrt{3}-1\right)+\left|\sqrt{3}+1\right|}{2\times\sqrt{3}}=\dfrac{2}{2\times\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $t_2=\dfrac{-\left(\sqrt{3}-1\right)-\left|\sqrt{3}+1\right|}{2\times\sqrt{3}}=\dfrac{-2\times\sqrt{3}}{2\times\sqrt{3}}=-1$

Donc : $\tan x=-1$ et $\tan x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

- Pour : $\tan x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ Équivaut à : $\tan x=\tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$

- Pour : $\tan x=-1$

$\tan x=-1$ Équivaut à : $\tan x=-\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ Équivaut à : $\tan x=\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

Équivaut à : $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\ ;\ \dfrac{\pi}{6}+k\pi\ \ /k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice 9 : (**) Soit x un réel tel que : $\sin x\times\cos x=\dfrac{1}{2}$ (E)

Montrer alors que : $\sin x=\cos x$ et déterminer tous les réels x qui vérifient l'égalité (E)

Solution :1) On a : $\sin x\times\cos x=\dfrac{1}{2}$ Équivaut à : $2\sin x\times\cos x=1$

Or on a : $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ donc : $\sin^2 x+\cos^2 x=2\sin x\times\cos x$

Donc : $\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\times\cos x=0$

Équivaut à : $(\sin x-\cos x)^2=0$

Équivaut à : $\sin x-\cos x=0$ c'est-à-dire : $\sin x=\cos x$

Équivaut à : $\sin x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$

Équivaut à : $x=\dfrac{\pi}{2}-x+2k\pi$ ou $x=\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+2k\pi$

Équivaut à : $2x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $0=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ qui est impossible

Donc : $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc : les réels x qui vérifient l'égalité (E) sont : $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

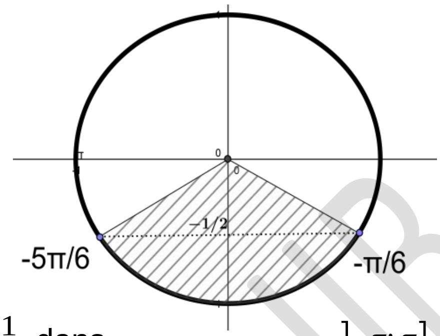
Exercice10 : (**) Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'inéquation suivante : $\sin x \leq -\frac{1}{2}$

Solution : $\sin x = -\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in]-\pi;\pi]$ alors : $x = -\frac{\pi}{6}$ ou $x = -\frac{5\pi}{6}$



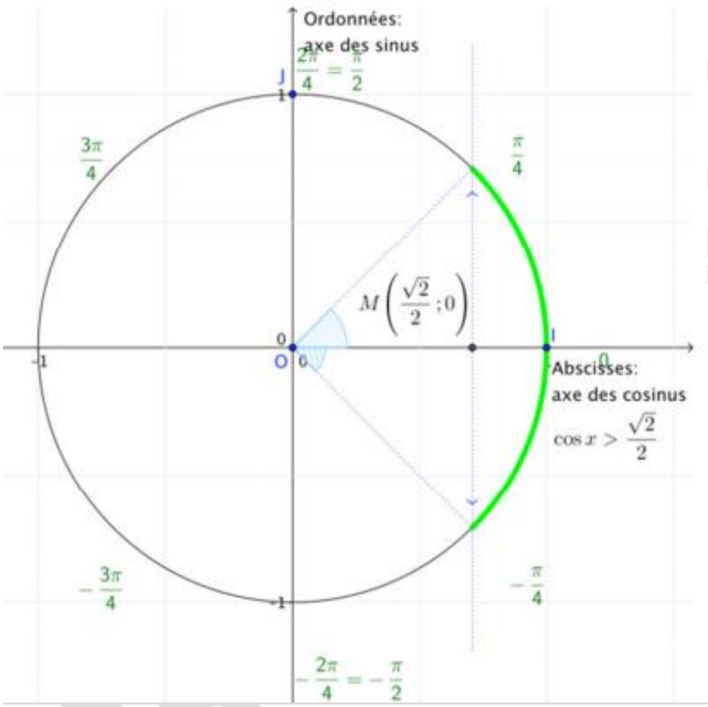
$\sin x \leq -\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x \leq -\sin\frac{\pi}{6}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\sin x$ et $-\frac{1}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$

On trouve que : $\sin x \leq -\frac{1}{2}$ Équivaut à : $x \in \left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6}\right]$ Donc $S = \left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6}\right]$

Exercice11 : (**) Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'inéquation suivante : $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution :



Donc : $S = \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$

Exercice12 : (**) Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation suivante : $\sin 2x \geq \frac{1}{2}$

Solution :

1iér étape : On pose : $X = 2x$

$x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ Équivaut à : $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ Équivaut à : $-\pi \leq 2x \leq \pi$

Équivaut à : $-\pi \leq X \leq \pi$

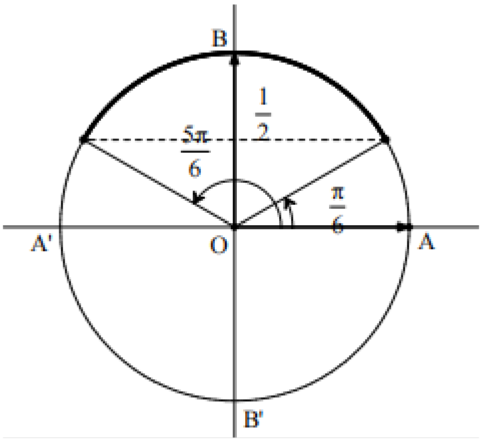
$\sin X = \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin X = \sin\frac{\pi}{6}$

Équivaut à : $X = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $X = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Équivaut à : $X = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $X = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $-\pi \le X \le \pi$ alors : $X = \frac{\pi}{6}$ ou $X = \frac{5\pi}{6}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\sin X$ et $\frac{1}{2}$ dans $-\pi \le X \le \pi$



$\begin{cases} \sin X \ge \frac{1}{2} \\ -\pi \le X \le \pi \end{cases}$ Équivaut à : $X \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$

On trouve que : $\sin X \ge \frac{1}{2}$ Équivaut à : $X \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$

2iér étape : Or : $X = 2x$

$X \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$ Équivaut à : $\frac{\pi}{6} \le 2x \le \frac{5\pi}{6}$ Équivaut à : $\frac{\pi}{12} \le x \le \frac{5\pi}{12}$

Donc : $S = \left[\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}\right]$

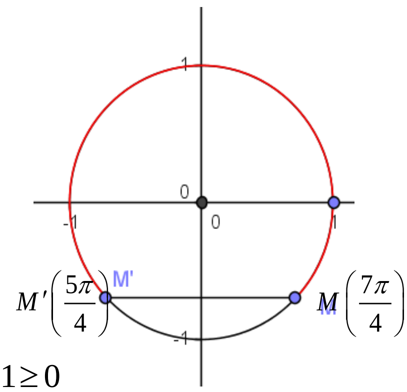
Exercice13 : (**) Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation suivante : $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : On sait que : $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

L'arc MM' en rouge correspond à tous les points $M(x)$ tel que :

x Vérifie $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ Donc : $\sin x \ge \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x \ge \sin\frac{\pi}{6}$

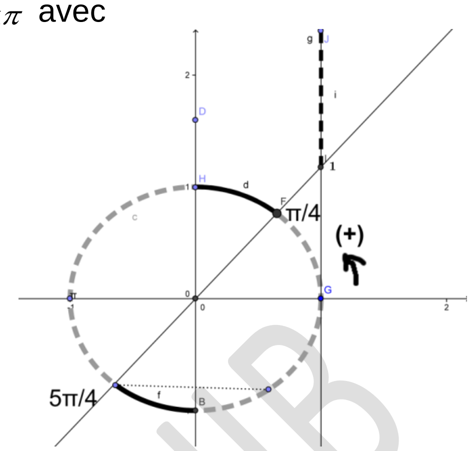
Donc : $S = \left[0; \frac{5\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right]$



Exercice14 : (**) Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation suivante : $\tan x - 1 \ge 0$

Solution : $\tan x - 1 \ge 0$ Équivaut à : $\tan x \ge 1$

- L'inéquation $\tan x - 1 \geq 0$ est définie si et seulement si : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$



Et puisque : $x \in [0; 2\pi]$ alors : $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $x \neq \frac{3\pi}{2}$

- Résolution de l'équation : $\tan x = 1$

$\tan x = 1$ Équivaut à : $\tan x = \tan \frac{\pi}{4}$ Équivaut à : $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

Et puisque : $x \in [0; 2\pi]$ alors : $x = \frac{5\pi}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{4}$

En utilisant le cercle trigonométrique

On compare $\tan x$ et 1 dans $[0; 2\pi]$

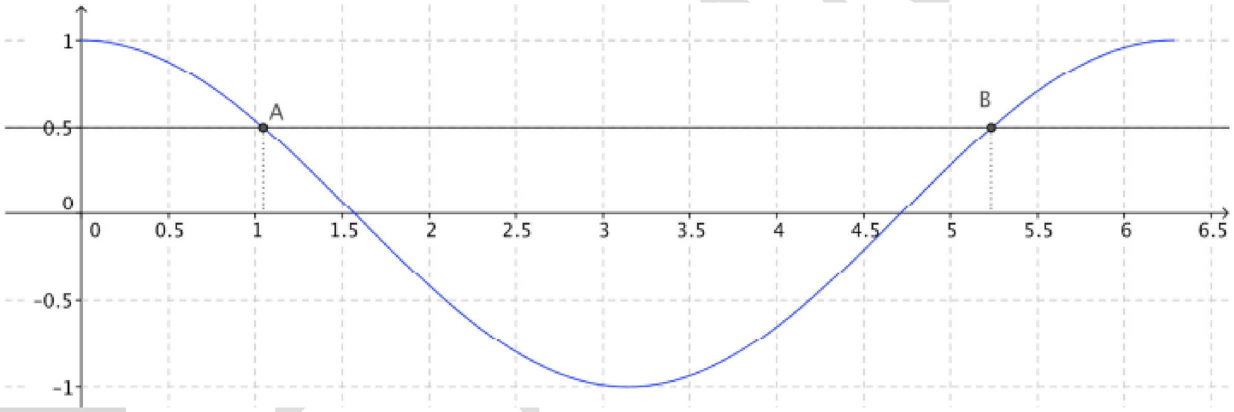
On trouve que : $\tan x \geq 1$ Équivaut à : $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right[$

Donc : $S = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right[$

Exercice15 : (**)

On a tracé sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ la représentation graphique de la fonction cosinus.

Résoudre graphiquement dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ l'équation : $\cos x \leq \frac{1}{2}$



Solution : Graphiquement, on lit que les solutions sont :

$x_1 \simeq 1,05 (soit\ x_1 = \frac{\pi}{3})$ et $x_2 \simeq 5,25 (soit\ x_2 = \frac{5\pi}{3})$

Exercice16 : (***)

Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation suivante : (I) : $(2\sin x - 1)\left(\sqrt{3}\tan x + 1\right) > 0$

Solution :

L'inéquation (I) existe si et seulement si : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Mais dans : $[0; 2\pi]$: $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $x \neq \frac{3\pi}{2}$

Donc : $D_I = [0; 2\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$

Résolvons dans $[0; 2\pi]$ les équations : $2\sin x - 1 = 0$ et $\sqrt{3}\tan x + 1 = 0$

- $2\sin x - 1 = 0$ Équivaut à : $2\sin x = 1$ Équivaut à : $\sin x = \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

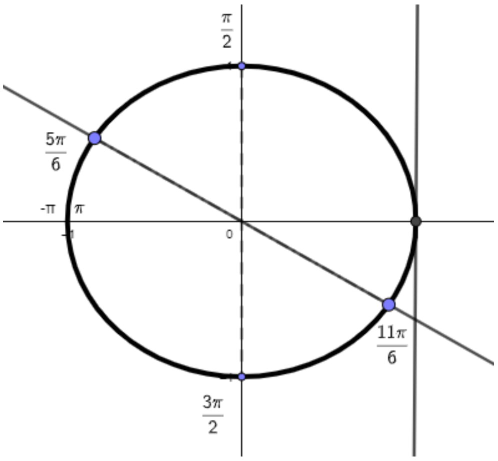
Mais dans : $[0;2\pi]$: $x=\frac{\pi}{6}$ ou $x=\frac{5\pi}{6}$

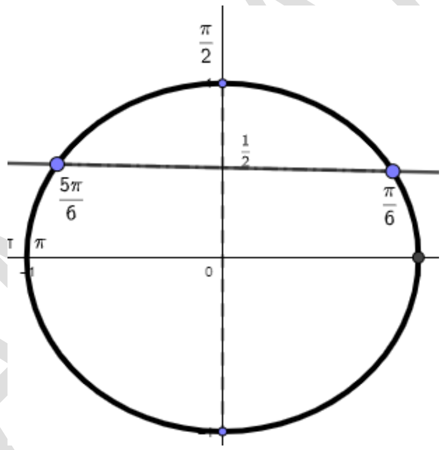
- $\sqrt{3}\tan x+1=0$ Équivaut à : $\tan x=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\tan\frac{\pi}{6}=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

  Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$

Mais dans : $[0;2\pi]$: $x=\frac{11\pi}{6}$ ou $x=\frac{5\pi}{6}$

On va étudier le signe des expressions : $P_1(x)=2\sin x-1$ et $P_2(x)=\sqrt{3}\tan x+1$





On en déduit le tableau de signe de l'expression : $P(x)=(2\sin x-1)\left(\sqrt{3}\tan x+1\right)$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$2sinx-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	
$\sqrt{3}tanx+1$		$+$	|	$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

Donc : $S=\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{2};\frac{11\pi}{6}\right[$

Exercice17 : (***) On pose : $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ avec $x\in\mathbb{R}$

1) Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation (E) : $f(x)=0$

2) En déduire le signe de : $f(x)$ dans $]-\pi\,;\pi]$

Solution :1) $f(x)=0$ signifie que : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0$

Équivaut à : $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$

Équivaut à : $2x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+k\pi$

Équivaut à : $2x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ Équivaut à : $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$

Dans l'intervalle : $\left]-\pi\,;\pi\right]$ les solutions sont : $\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}=\frac{7\pi}{12}$; $\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{2}=-\frac{5\pi}{12}$; $\frac{\pi}{12}-\pi=-\frac{11\pi}{12}$

Par conséquent : $S_{\left]-\pi\,;\pi\right]}=\left\{-\frac{11\pi}{12};-\frac{5\pi}{12};\frac{\pi}{12};\frac{7\pi}{12}\right\}$

2) Déduction du signe de : $f(x)$ dans $\left]-\pi\,;\pi\right]$

- Sur l'inter valle : $\left]-\pi\,;-\frac{11\pi}{12}\right[$: on a : $-\pi<x<-\frac{11\pi}{12}$ donc : $-2\pi<2x<-\frac{11\pi}{6}$

Donc : $-2\pi+\frac{\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<-\frac{11\pi}{6}+\frac{\pi}{3}$ c'est-à-dire : $-\frac{7\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<-\frac{3\pi}{2}$

Donc : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)>0$

- Sur l'inter valle : $\left]-\frac{11\pi}{12};-\frac{5\pi}{12}\right[$: on a : $-\frac{11\pi}{12}<x<-\frac{5\pi}{12}$ donc : $-\frac{11\pi}{6}<2x<-\frac{5\pi}{6}$

Donc : $-\frac{11\pi}{6}+\frac{\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}$ c'est-à-dire : $-\frac{3\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{3}<-\frac{\pi}{2}$

Donc : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)<0$

- Sur l'inter valle : $\left]-\frac{5\pi}{12};\frac{\pi}{12}\right[$: on a : $-\frac{5\pi}{12}<x<\frac{\pi}{12}$ donc : $-\frac{5\pi}{6}<2x<\frac{\pi}{6}$

Donc : $-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}$ c'est-à-dire : $-\frac{\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$

Donc : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)>0$

- Sur l'inter valle : $\left]\frac{\pi}{12};\frac{7\pi}{12}\right[$: on a : $\frac{\pi}{12}<x<\frac{7\pi}{12}$ donc : $\frac{\pi}{6}<2x<\frac{7\pi}{6}$

Donc : $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<\frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{3}$ c'est-à-dire : $\frac{\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{3}<\frac{3\pi}{2}$

Donc : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)<0$

- Sur l'inter valle : $\left]\frac{7\pi}{12};\pi\right[$: on a : $\frac{7\pi}{12}<x<\pi$ donc : $\frac{7\pi}{6}<2x<2\pi$

Donc : $\frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<2\pi+\frac{\pi}{3}$ c'est-à-dire : $\frac{3\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{3}<\frac{7\pi}{3}$

Donc : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)>0$

On peut alors résumer ces résultats dans un tableau de signe :

x	$-\pi$		$-\frac{11\pi}{12}$		$-\frac{5\pi}{12}$		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{7\pi}{12}$		π
$f(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien