Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°4 : FONCTIONS - *Généralités*

Exercice 1 : (*) (**) (***) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{x^4-2025}{6x^2-x-1}$ 2) $f(x)=\dfrac{2x-21}{2x-3\sqrt{x}-2}$ 3) $f(x)=\sqrt{(x+2)(3x-1)(2x+5)}$

4) $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x-1}-1}{3x^2+6x+5}$ 5) $f(x)=\sqrt{|x+1|-1}$ 6) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

7) $f(x)=(x-2)\sqrt{x^4-7x^2+12}$ 8) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+6}{x^2-4x-96}}$

9) $f(x)=\sqrt{6x^3+25x^2+21x-10}$ 10) $f(x)=\sqrt{\dfrac{5(7x+5-6x^2)}{-3(1-x)^2}}$

11) $f(x)=\dfrac{2\sin^2 x}{\sin(2x)-\cos(3x)}$

Solution : 1) $f(x)=\dfrac{x^4-2025}{6x^2-x-1}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/6x^2-x-1\neq 0\right\}$

$6x^2-x-1$: On a : $\Delta=1+24=25$: $x_1=\dfrac{1+5}{12}=\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{1-5}{12}=-\dfrac{1}{3}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right\}$

2) $f(x)=\dfrac{2x-21}{2x-3\sqrt{x}-2}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2x-3\sqrt{x}-2\neq 0 \quad et \quad x\geq 0\right\}$

$2x-3\sqrt{x}-2=0$ Equivalent à : $2\left(\sqrt{x}\right)^2-3\sqrt{x}-2=0$ car $\sqrt{x}^2=x$

Faisons un changement de variable en posant : $X=\sqrt{x}$

Nous obtenons l'équation : $2X^2-3X-2=0$: a = 2, b = -3 et c = - 2

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$X_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times 2}=-\dfrac{1}{2}$ et $X_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times 2}=2$

Equivalent à : $\sqrt{x}=-\dfrac{1}{2}$ ou $\sqrt{x}=2$ Mais l'équation : $\sqrt{x}=-\dfrac{1}{2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$\sqrt{x}=2$ Signifie : $\left(\sqrt{x}\right)^2=2^2$ c'est-à-dire : $x=4$

Donc : $D_f=[0;+\infty[-\{4\}=[0;4[\cup]4;+\infty[$

3) $f(x)=\sqrt{(x+2)(3x-1)(2x+5)}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/(x+2)(3x-1)(2x+5)\geq 0\right\}$

$x+2=0$ Équivaut à : $x=-2$ et $3x-1=0$ qui signifie que : $x=\frac{1}{3}$ et $2x+5=0$ qui signifie que : $x=-\frac{5}{2}$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$x+2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$3x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$2x+5$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$F(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_f=\left[-\frac{5}{2},-2\right]\cup\left[\frac{1}{3},+\infty\right[$

4) $f(x)=\frac{2\sqrt{x-1}-1}{3x^2+6x+5}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/3x^2+6x+5\neq 0\ \ et\ \ x-1\geq 0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/3x^2+6x+5\neq 0\ \ et\ \ x\geq 1\right\}$

$3x^2+6x+5=0$: $\Delta=b^2-4ac=(6)^2-4\times 3\times 5=36-60=-24<0$ (Pas de solutions)

Donc : $3x^2+6x+5\neq 0$

Donc : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\ x\geq 1\right\}$

Donc : $D_f=[1;+\infty[$

5) $f(x)=\sqrt{|x+1|-1}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/|x+1|-1\geq 0\right\}$

$|x+1|-1\geq 0$ Signifie que : $|x+1|\geq 1$ Signifie que : $x+1\geq 1$ ou $x+1\leq -1$

Signifie que : $x\geq 0$ ou $x\leq -2$

Donc : $D_f=]-\infty;-2]\cup[0;+\infty[$

6) $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{x+1}{x}\geq 0\ \ et\ \ x\neq 0\right\}$ Dressons un tableau de signe de : $\frac{x+1}{x}$

$x+1=0$ Signifie que : $x=-1$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{x+1}{x}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

D'où : $D_f=]-\infty;-1]\cup]0;+\infty[$

7) $f(x)=(x-2)\sqrt{x^4-7x^2+12}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^4-7x^2+12\geq 0\right\}$

a) D'abord on va résoudre l'équation $x^4-7x^2+12=0$

Méthode : C'est une équation bicarrée, c'est à dire que l'inconnue est à la puissance 4, 2 et 0.

Je pose donc $X = x^2$ et je me ramène à une équation du second degré dont l'inconnue est X.
Je ne dois pas oublier à la fin de donner les solutions de l´équation de départ.

$x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ Équivaut à : $\left(x^2\right)^2 - 7x^2 + 12 = 0$

Je pose : $X = x^2$ l'équation devienne : $X^2 - 7X + 12 = 0$

Le discriminant de : $X^2 - 7X + 12 = 0$ est : $\Delta = (-7)^2 - 4\times1\times12 = 49 - 48 = 1 > 0$ et ses solutions sont :

$X_1 = \frac{7-\sqrt{1}}{2\times1} = \frac{6}{2} = 3$ et $X_2 = \frac{7+\sqrt{1}}{2\times1} = \frac{8}{2} = 4$ C'est-à-dire : $x^2 = 3$ ou $x^2 = 4$

C'est-à-dire : $x = \pm\sqrt{3}$ ou $x = \mp 2$

b) Résolution de l'inéquation : $x^4 - 7x^2 + 12 \geq 0$

On a une factorisation de $x^4 - 7x^2 + 12$ en un produit de monômes du premier degré :

$x^4 - 7x^2 + 12 = 1(x+2)\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)(x-2)$

$x+2=0$ Équivaut à : $x=-2$ et $x+\sqrt{3}=0$ signifie que : $x=-\sqrt{3}$

$x-\sqrt{3}=0$ Signifie que : $x=\sqrt{3}$ et $x-2=0$ Équivaut à : $x=2$

On peut donc dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x+\sqrt{3}$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-\sqrt{3}$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$I(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$x^4 - 7x^2 + 12 \geq 0$ Équivaut à : $x \in \left]-\infty, -2\right] \cup \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right] \cup \left[2; +\infty\right[$

Ainsi : $D_f = \left]-\infty, -2\right] \cup \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right] \cup \left[2; +\infty\right[$

8) $f(x) = \sqrt{\frac{2x+6}{x^2-4x-96}}$

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{2x+6}{x^2-4x-96} \geq 0 \text{ et } x^2 - 4x - 96 \neq 0 \right\}$

On commence par déterminer les racines du trinôme $-x^2 + 4x + 96$:

Le discriminant de $-x^2 + 4x + 96$ est $\Delta = 4^2 - 4 \text{ x } 96\text{x } (-1) = 400$ et ses racines sont :

$x_1 = \frac{-4+\sqrt{400}}{2\times(-1)} = \frac{-4+20}{-2} = \frac{16}{-2} = -8$ et $x_2 = \frac{-4-\sqrt{400}}{2\times(-1)} = \frac{-4-20}{-2\times1} = \frac{-24}{-2} = 12$

Donc le tableau des signes est :

x	$-\infty$		-8		-3		12		$+\infty$
$2x+6$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x^2+4x+96$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$\frac{2x+6}{-x^2+4x+96}$		$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $D_f = \left]-\infty; -8\right[\cup \left[-3; 12\right[$.

PROF: ATMANI NAJIB

9) $f(x)=\sqrt{6x^3+25x^2+21x-10}$

(On peut remarquer que : -2 est une racine évidente du polynôme : $6x^3+25x^2+21x-10$)

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/6x^3+25x^2+21x-10\geq 0\right\}$

On pose : $F(x)=6x^3+25x^2+21x-10$

On remarque que $F(-2)=0$

Ainsi, il existe un polynôme $Q(x)$ de degré 2 telle que $F(x)=(x-(-2))Q(x)$ et on peut donc écrire qu'il

Existe trois réels a, b et c tels que $F(x)=(x+2)(ax^2+bx+c)$.

Or, $(x+2)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b+2a)x^2+(c+2b)x+2c$.

Comme deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients, par identification,

On trouve : $\begin{cases}a=6\\b+2a=25\\c+2b=21\\2c=-10\end{cases}$ Equivaut à : $\begin{cases}a=6\\b=13\\c=-5\end{cases}$

$F(x)=(x+2)(6x^2+13x-5)$.

Le discriminant de : $6x^2+13x-5$ est : $\Delta=13^2-4\times6\times(-5)=289=17^2$ et ses racines sont :

$x_1=\frac{-13-\sqrt{289}}{2\times6}=\frac{-13-17}{12}=-\frac{5}{2}$ et $x_2=\frac{-13+\sqrt{289}}{2\times6}=\frac{-13+17}{12}=\frac{1}{3}$

$6x^2+13x-5=6\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)=2\times3\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)=(3x-1)(2x+5)$

Donc : $F(x)=(x+2)(3x-1)(2x+5)$

$x+2=0$ Équivaut à : $x=-2$ et $3x-1=0$ qui signifie que : $x=\frac{1}{3}$ et $2x+5=0$ qui signifie que : $x=-\frac{5}{2}$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$		-2		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$x+2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$3x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$2x+5$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$F(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc : $D_f=\left[-\frac{5}{2},-2\right]\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$

10) $f(x)=\sqrt{\frac{5(7x+5-6x^2)}{-3(1-x)^2}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{5(7x+5-6x^2)}{-3(1-x)^2}\geq 0\right\}$..

Pour déterminer le signe du trinôme : $7x+5-6x^2$

Calculons son discriminant : $a=-6$; $b=7$; $c=5$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=7^2-4\times(-6)\times5=49+120=169>0$

Comme $\Delta>0$, le trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1 = \frac{-7-\sqrt{169}}{2a} = \frac{-7-13}{2\times(-6)} = \frac{5}{3}$ et $x_2 = \frac{-7+\sqrt{169}}{2a} = \frac{-7+13}{2\times(-6)} = -\frac{1}{2}$

$-3(1-x)^2 \leq 0$ Car un carré est toujours positif ou nul.

$-3(1-x)^2 = 0$ Signifie que : $1-x=0$ Signifie que : $x=1$

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$7x+5-6x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$-3(1-x)^2$		$-$		$-$	0	$-$		$-$	
$\frac{5(7x+5-6x^2)}{-3(1-x)^2}$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	

Par suite : $D_f = \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{3};+\infty\right[$

11) $f(x) = \frac{2\sin^2 x}{\sin(2x)-\cos(3x)}$ $D_f = \{x \in \mathbb{R} / \sin(2x)-\cos(3x) \neq 0\}$

On a : $\sin(2x)-\cos(3x)=0$ Équivaut à : $\sin(2x)=\cos(3x)$

Équivaut à : $\sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$

Équivaut à : $2x = \frac{\pi}{2}-3x+2k\pi$ ou $2x = \pi-\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $5x = \frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $-x = \frac{\pi}{2}+2k\pi$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}$ ou $x = -\frac{\pi}{2}+2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left(\left\{\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$

Exercice 2 : (*) (**) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

1) Déterminer D_f 2) Démontrer que : $f(x) \leq 1$ sur $\mathbb{R}$ 3) Démontrer que : $0 < f(x)$

Solution :1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2+1 \neq 0\}$

$x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$: pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : $D_f = \mathbb{R}$

2) On a $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$ donc $x^2+1 \geq 0+1$

Donc $x^2+1 \geq 1$ par suite : $\frac{1}{x^2+1} \leq 1$ Donc : $f(x) \leq 1$

2) On a $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$ donc $x^2+1 \geq 0+1$

Donc $x^2+1 \geq 1$ par suite : $x^2+1 \succ 0$

Donc : $0 < f(x)$

Conclusion : $0 < f(x) \leq 1$

Exercice 3 : (**) Soit la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{2x+2}\times\sqrt{3-x}$

1)a) Déterminer D_f

b) Calculer : $f(0)$; $f(-1)$

c) Déterminer les antécédents de 0 et $\sqrt{6}$ par f (s'ils existent)

4) On considère la fonction g définie par : $g(x)=\sqrt{-2x^2+4x+6}$ Montrer que : $f=g$

Solution : 1) a) $D_f=\{x\in\mathbb{R} / 2x+2\geq 0 \;\; et \;\; 3-x\geq 0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / x\geq -1 \; et \;\; x\leq 3\}$ Donc $D_f=[-1,3]$

b) Calcul des images :

$f(0)=\sqrt{2\times 0+2}\times\sqrt{3-0}=\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$

et $f(-1)=\sqrt{2\times(-1)+2}\times\sqrt{3-(-1)}=\sqrt{0}\times\sqrt{4}=0$

c)

• x est l'antécédents de 0 par f signifie que 0 est l'image de x par f .

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=0$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$

Équivaut à: $\sqrt{2x+2}\times\sqrt{3-x}=0$

Équivaut à : $\sqrt{2x+2}=0$ ou $\sqrt{3-x}=0$

Équivaut à : $2+2x=0$ ou $3-x=0$

Équivaut à : $x=-1$ ou $x=3$

Finalement les antécédents de 0 par f sont : -1 et 3.

• x est l'antécédents de $\sqrt{6}$ par f signifie que $\sqrt{6}$ est l'image de x par f .

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=\sqrt{6}$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=\sqrt{6}$

Équivaut à : $\sqrt{2x+2}\times\sqrt{3-x}=\sqrt{6}$

Équivaut à : $(2x+2)(3-x)=6$

Équivaut à : $6x-2x^2+6-2x=6$

Équivaut à : $-2x^2+4x=0$

Équivaut à : $-2x(x-2)=0$

Équivaut à : $-2x=0$ ou $x-2=0$

Équivaut à: $x=0$ ou $x=2$

Finalement les antécédents de $\sqrt{6}$ par f sont : 0 et 2

4) On considère la fonction g définie par : $g(x)=\sqrt{-2x^2+4x+6}$

$D_g=\{x\in\mathbb{R} / -2x^2+4x+6\geq 0\}$

Soit Δ son discriminant : $\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times(-2)\times 6=16+48=64>0$

$x_1=\frac{-4+\sqrt{64}}{2\times -2}=\frac{4}{-4}=-1$ et $x_2=\frac{-4-\sqrt{64}}{2\times -2}=\frac{-12}{-4}=3$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-2x^2+4x+6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $D_g=[-1,3]$

PROF: ATMANI NAJIB

On a donc : $D_f = D_g$.

$$f(x) = \sqrt{2x+2} \times \sqrt{3-x} = \sqrt{(2x+2)(3-x)} = \sqrt{-2x^2+6x+6-2x} = \sqrt{-2x^2+4x+6} = g(x)$$

Conclusion : $f = g$

Exercice4 : (***) Tracer la représentation graphique de la fonction f tel que : $f(x) = |x-2| + |x+2|$

Solution :

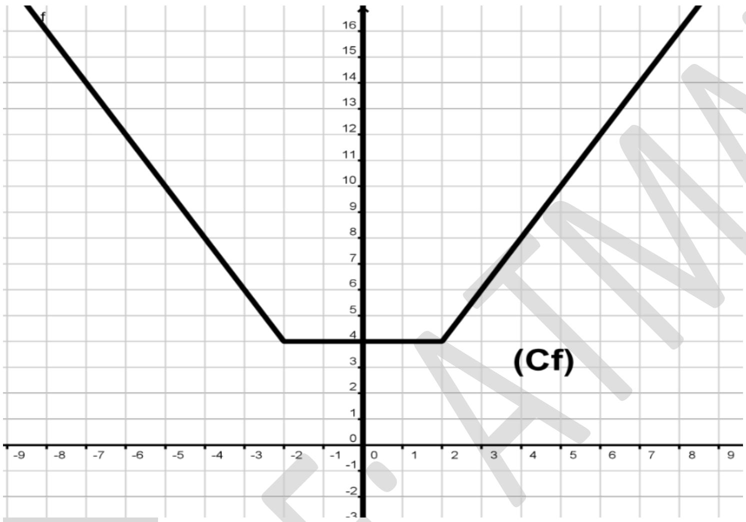
- On a $f(x) \in \mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$

$x+2=0$ Équivaut à : $x=-2$

$x-2=0$ Équivaut à : $x=2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\lvert x-2\rvert$		$-x+2$		$-x+2$		$x-2$	
$x+2$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$\lvert x+2\rvert$		$-x-2$		$x+2$	0	$x+2$	
$\lvert x-2\rvert+\lvert x+2\rvert$		$-2x$		4		$2x$	

Donc $f(x) = -2x$ si $x \in]-\infty, -2]$ et $f(x) = 4$ si $x \in [-2, 2]$ et $f(x) = 2x$ si $x \in [2, +\infty[$



Exercice5 : (**) Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par f(x) = x² – 2x – 5 et g(x) = -x – 3.
Étudier les positions de (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectives de f et g

Solutions : Soit h(x) = f(x) – g(x) = x² – 2x – 5 + x + 3 = x² – x – 2
h est une fonction du second degré. Calculons son discriminant afin de déterminer son signe.
Il suffit d'appliquer les formules bien connues avec a = 1, b = -1 et c = -2.
Δ = (-1)² – [4 × 1 × (-2)] = 9 = 3²

Δ étant strictement positif, le trinôme admet deux racines qui sont : $x_1 = \frac{1+3}{2\times 1} = 2$ et $x_2 = \frac{1-3}{2\times 1} = -1$

Le signe de la fonction est du signe de a, c'est-à-dire positif de part et d'autre des racines mais du signe contraire (donc négatif) entre ces racines.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par conséquent (C_f) est confondue avec (C_g) pour x = -1 et x = 2

(C_f) est située au-dessus de (C_g) sur $]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice 6 : (***) soit la fonction f définie par : $f(x)=-\frac{1}{2}(|2x+3|+|2x-3|)$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) a)Etudier la parité de la fonction f et en déduire le domaine d'étude de f
b) Donner une interprétation graphique
3) Simplifier l'écriture de f dans les intervalles $I=\left[0;\frac{3}{2}\right]$ et $J=\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$
4) Calculer : $f(0)$; $f\left(\frac{3}{2}\right)$; $f\left(-\frac{3}{2}\right)$; $f(-3)$ et $f(3)$
5) Dresser son tableau de variation sur D_f
6) Tracer la courbe (C_f) dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé

Solution :1) Un réel a toujours une image. Donc $D_f=\mathbb{R}$
2)a) **-** Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=-\frac{1}{2}(|-2x+3|+|-2x-3|)=-\frac{1}{2}(|-(2x-3)|+|-(2x+3)|)$

$f(-x)=-\frac{1}{2}(|2x-3|+|2x+3|)$ Car $|-x|=|x|$

Donc : $f(-x)=f(x)$ par suite : f est une fonction paire,

Donc : la droite des ordonnées est un axe de symétrie de (C_f)

Il suffit donc de l'étudier sur $D_f\cap\mathbb{R}^+$

Par suite le domaine d'étude de f est : $D_E=\mathbb{R}^+$

b) Interprétation graphique : l'axe des ordonnées est un axe symétrie de la courbe représentative

3) $f(x)=-\frac{1}{2}(|2x+3|+|2x-3|)$

Si $x\in I=\left[0;\frac{3}{2}\right]$ alors : $0\le x\le\frac{3}{2}$

Donc : $0\le 2x\le 3$ c'est-à-dire : $2x-3\le 0$ et on a : $2x+3\ge 0$

Par suite : $f(x)=-\frac{1}{2}(2x+3+(-(2x-3)))=-\frac{1}{2}(2x+3-2x+3)=-3$

Si $x\in J=\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ alors : $x\ge\frac{3}{2}$

Donc : $2x\ge 3$ c'est-à-dire : $2x-3\ge 0$ et on a : $2x+3\ge 0$

Par suite : $f(x)=-\frac{1}{2}(|2x+3|+|2x-3|)=-\frac{1}{2}(2x+3+|2x-3|)=-\frac{1}{2}(4x)=-2x$

Finalement on a : $\begin{cases} f(x)=-3 \text{ si } x\in I=\left[0;\frac{3}{2}\right] \\ f(x)=-2x \text{ si } x\in J=\left[\frac{3}{2};+\infty\right[\end{cases}$

4) $f(0)=-\frac{1}{2}(|2\times 0+3|+|2\times 0-3|)=-\frac{1}{2}(3+3)=-3$

$f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}\left(\left|2\times\frac{3}{2}+3\right|+\left|2\times\frac{3}{2}-3\right|\right)=-\frac{1}{2}(6+0)=-3$

$f\left(-\frac{3}{2}\right)=f\left(-\frac{3}{2}\right)=-3$ Car :f est une fonction paire : $f(-3)=f(3)=-6$

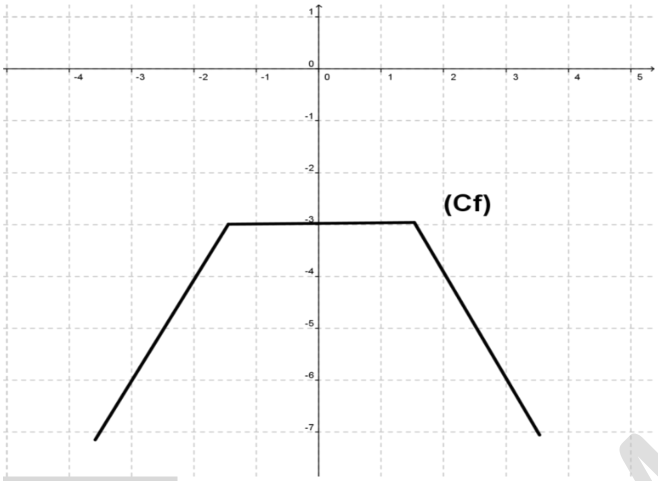
5) le tableau de variation sur $\mathbb{R}$

On a : f est constante sur l'intervalle : $I=\left[0;\frac{3}{2}\right]$ et décroissante dans $J=\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

Et puisque f est une fonction paire alors f est constante sur l'intervalle : $I'=\left[-\frac{3}{2};0\right]$ et f est croissante dans $J'=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$ d'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	-3	$\longrightarrow -3 \longrightarrow$	-3	$\searrow$

6) La courbe (C_f) :



Exercice 7 : (*) 1) Etudier la parité de la fonction définie par : $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

2) Etudier la monotonie de la fonction g définie par : $g(x)=\frac{-3}{x}+1$ sur $I=\left]0;+\infty\right[$

Solutions :1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2-4\neq 0\}$

$x^2-4=0$ Signifie $x^2=4$

Équivaut à: $x=\sqrt{4}=2$ ou $x=-\sqrt{4}=-2$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

☞ Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\{-2;2\}$ alors $x\neq 2$ et $x\neq -2$ alors $-x\neq -2$ et $-x\neq 2$

Donc : $-x\in\mathbb{R}-\{-2;2\}$

☞ $f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-4}=-\frac{x^3}{x^2-4}=-f(x)$

$f(-x)=-f(x)$ Donc f est une fonction impaire

2)Soit $x_1\in\left]0;+\infty\right[$ et $x_2\in\left]0;+\infty\right[$ tels que : $x_1\prec x_2$

Donc $\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}$

Donc : $\frac{-3}{x_1}<\frac{-3}{x_2}$ car $-3<0$

Donc : $\frac{-3}{x_1}+1<\frac{-3}{x_2}+1$ Alors $f(x_1)<f(x_2)$

D'où f est strictement croissante sur $I=\left]0;+\infty\right[$

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice 8 : (**) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = -4x^2 + 4x + 5$

1)a) Montrer que $f(x) = 6 - (2x-1)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

b) Montrer que $f(x) \le 6$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

2) Calculer : $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire les extrémums de f sur $\mathbb{R}$

Solutions : 1) a) On a $D_f = \mathbb{R}$

$6-(2x-1)^2 = 6-(4x^2-4x+1) = 6-4x^2+4x-1 = -4x^2+4x+5$ Donc : $f(x) = 6-(2x-1)^2$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $(2x-1)^2 \ge 0$ par suite $-(2x-1)^2 \le 0$ donc $6-(2x-1)^2 \le 6$

C'est-à-dire : pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) \le 6$

2) On a $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6-\left(2\times\frac{1}{2}-1\right)^2 = 6-(1-1)^2 = 6$

On a pour tous $x \in \mathbb{R}$: $6-(2x-1)^2 \le 6$ alors/ $f(x) \le f\left(\frac{1}{2}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc : $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6$ est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 9 : (**) Soit g une fonction numérique tel que : $g(x) = -x^2 + 3x + 4$

1) Déterminer les nombres réels α et β tels que : $g(x) = -(x+\alpha)^2 + \beta$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

2) Montrer que g admet une valeur maximale sur : $\mathbb{R}$ qu'il faut déterminer

Solutions : 1) a) On a $D_g = \mathbb{R}$

$$g(x) = -x^2+3x+4 = -(x^2-3x)+4 = -\left(x^2 - 2\times\frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)+4$$

$$g(x) = -\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} + 4 = -\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$$

Donc : $\alpha = -\frac{3}{2}$ et $\beta = \frac{25}{4}$

2) On a ; $g(x) = -\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 \ge 0$

Par suite $-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 \le 0$ donc : $-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \le \frac{25}{4}$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $g(x) \le \frac{25}{4}$ et on a : $g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{25}{4}$

Alors : $g(x) \le g\left(\frac{3}{2}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Par conséquent : $g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{25}{4}$ c'est la valeur maximale de g sur $\mathbb{R}$

Exercice 10 : (*) (**) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = x^2 + 6x - 2$

1) Préciser le domaine de définition de f

2) Soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que : $x_1 \ne x_2$ Montrer que : $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = x_1 + x_2 + 6$

PROF: ATMANI NAJIB

3) a) Montrer que f est strictement croissante sur : $I=[-3;+\infty[$

b) Montrer que f strictement décroissante sur : $J=]-\infty;-3]$

4) Dresser le tableau de variation de f

5) a) En déduire que : pour tout $x\in\mathbb{R}$ On a : $-11\leq f(x)$

b) En déduire que : pour tout $x\in[-2;2]$ On a : $-10\leq f(x)\leq 14$

c) En déduire que : pour tout $x\in[-6;-4]$ On a : $-10\leq f(x)\leq -2$

Solution : $f(x)=x^2+6x-2$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

2) Soient : $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2^2+6x_2-2)-(x_1^2+6x_1-2)}{x_2-x_1}=\frac{x_2^2+6x_2-2-x_1^2-6x_1+2}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{x_2^2-x_1^2+6(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)+6(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1+6)}{x_2-x_1}$$

Par suite : $T(x_1;x_2)=x_2+x_1+6$

3)a) Montrons que f est strictement croissante sur $[-3;+\infty[$

Soient : $x_1\in[-3;+\infty[$ et $x_2\in[-3;+\infty[$ alors : $x_1\geq -3$ et $x_2\geq -3$ avec $x_1\neq x_2$ implique $x_1+x_2>-6$

Par suite : $x_1+x_2+6>0$

Donc $T(x_1;x_2)>0$ d'où : f est strictement croissante sur $I=[-3;+\infty[$

3)b) Etude de la monotonie de f sur : $J=]-\infty;-3]$

Soient : $x_1\in]-\infty;-3]$ et $x_2\in]-\infty;-3]$ alors : $x_1\leq -3$ et $x_2\leq -3$ et $x_1\neq x_2$

Cela implique $x_1+x_2<-6$

Par suite : $x_1+x_2+6<0$

Donc $T(x_1;x_2)<0$

D'où : f est décroissante sur $J=]-\infty;-3]$

4) Tableau de variation : On a : $f(-3)=(-3)^2+6\times(-3)-2=9-18-2=-11$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-11	$\nearrow$

5) a) D'après le tableau de variation de f on a : $f(-3)=-11$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f(-3)\leq f(x)$

Par suite : $-11\leq f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

b) Soit : $x\in[-2;2]$ alors : $-2\leq x\leq 2$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement croissante sur $I=[-3;+\infty[$

Par suite : f est strictement croissante sur $[-2;2]$

PROF: ATMANI NAJIB

Alors : $f(-2) \le f(x) \le f(2)$ et comme : $f(-2)=(-2)^2+6\times(-2)-2=4-12-2=-10$ et $f(2)=2^2+6\times 2-2=4+12-2=14$

Par suite : $-10 \le f(x) \le 14$

b) Soit : $x \in [-6;-4]$ On a alors : $-6 \le x \le -4$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement décroissante sur $J =]-\infty;-3]$

Par suite : f est strictement décroissante sur $[-6;-4]$

Alors : $f(-4) \le f(x) \le f(-6)$ et comme :

$f(-4)=(-4)^2+6\times(-4)-2=16-24-2=-10$ Et $f(-6)=(-6)^2+6\times(-6)-2=36-36-2=-2$

Par suite : $-10 \le f(x) \le -2$

Exercice 11 : (*) (**) **Partie A** : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=2x^2+4x-2$ (C_f) Sa courbe représentative

1) Déterminer D_f

2) Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$ (déterminer a; α et β)

3) En déduire la nature de (C_f) et ses éléments caractéristiques

4) Dresser le Tableau de variations de f

5) Tracer la courbe représentative (C_f) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Partie B : Soit g une fonction numérique tel que : $g(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$ (C_g) Sa courbe représentative

1) Déterminer D_g

2) Ecrire $g(x)$ sous la forme : $g(x)=\beta+\dfrac{k}{x+\alpha}$ (déterminer α et β et k)

3) En déduire la nature de (C_g) et ses éléments caractéristiques

4) Dresser le Tableau de variations de f

5) Tracer la courbe représentative (C_g) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

6) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)<g(x)$

(On admet que (C_g) coupe (C_f) en 3 points d'abscisse : $-2,7$; $0,5$; $1,3$

Solution : Partie A : 1) On a : f est une fonction polynôme ; donc : $D_f=\mathbb{R}$

2) Méthode1 : $f(x)=2x^2+4x-2=2(x^2+2x)-2=2\left((x+1)^2-1\right)-2=2(x+1)^2-2-2=2(x+1)^2-4$

Donc : $f(x)=2x^2+4x-2=2(x+1)^2-4$ Donc $\alpha=1$ et $\beta=-4$ et $a=2$

Méthode2 : $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$ On a : $a=1$ et $b=2$ et $c=-2$

Donc $\alpha=\dfrac{b}{2a}=\dfrac{4}{2\times 2}=1$ et $\beta=f(-\alpha)=f(-1)=2(-1)^2+4\times(-1)-2=-4$

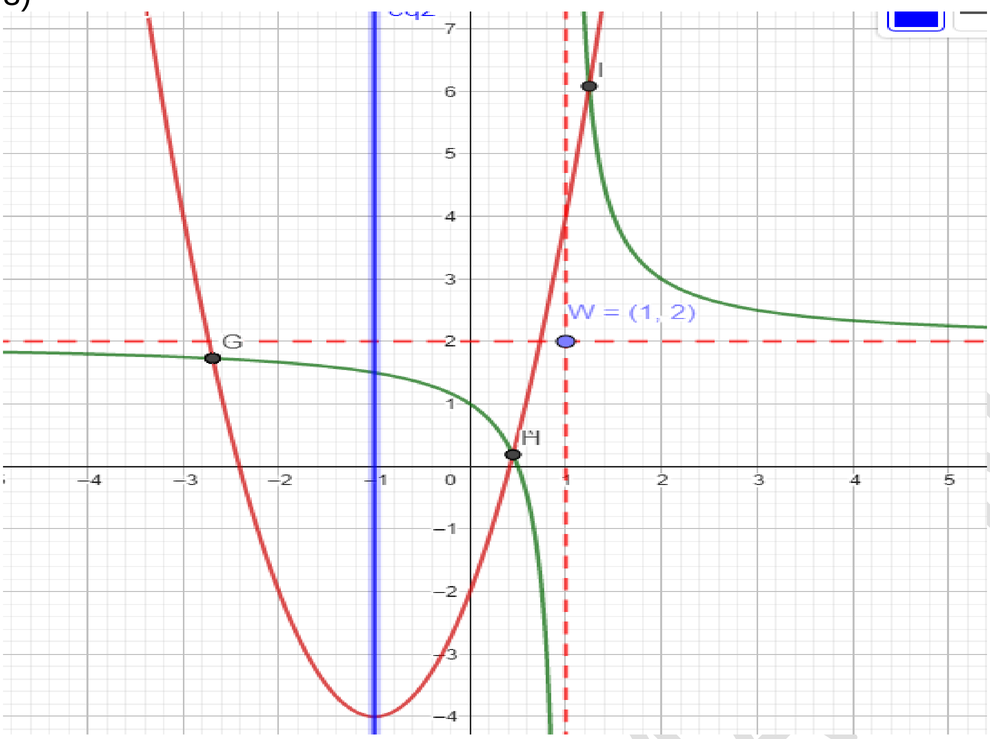
Donc : $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta=2(x+1)^2-4$

3) la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $A(-\alpha;\beta)$; $W(-1;-4)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\alpha$. $x=-1$

4)Tableau de variations de f : On a $a=2>0$ donc :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$

3)



Partie B :**1)** Soit g une fonction numérique : $g(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}/x-1\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 1\}$

Donc $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$

2) Si $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ on a : la division euclidienne de : $2x-1 \;\; par \;\; x-1$ donne : $2x-1=2(x-1)+1$

$g(x)=\dfrac{2(x-1)+1}{x-1}=2+\dfrac{1}{x-1}$ et $g(x)=\beta+\dfrac{k}{x+\alpha}$ Donc : $\alpha=-1$ et $\beta=2$ et $k=1>0$

3) Donc : (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(-\alpha;\beta)$; $\Omega(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=1$ et $y=2$

4) Le tableau de variations de :

$k=1>0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g	$\searrow$		$\searrow$

5) Voir partie1

6)

x	1	2	3	4
g(x)		3	5/2	7 /3

6) Résolution graphique de l'inéquation : $f(x)<g(x)$

(On admet que (C_g) coupe (C_f) en 3 points d'abscisse : $-2,7$; $0,5$; $1,3$

(C_g) est au-dessus de (C_f) si $x\in]-2,7;0,5[\cup]1;1,3[$

Donc : $S=]-2,7;0,5[\cup]1;1,3[$

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice 12 : (***) Soit f une fonction tel que : $f(x)=\frac{x}{x-1}$

(C_f) Sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer D_f

2) Calculer le taux d'accroissement de fonction de f entre x_1 et x_2 tel que $x_1 \neq x_2$

3) Dresser son tableau de variation de f

4) Montrer que : $f(x)=1+\frac{1}{x-1}$ Pour tout $x \in D_f$

5) Montrer que (C_f) est une hyperbole et déterminer son centre et ses asymptotes

6) Tracer la courbe (C_f)

7) Soit g une fonction tel que : $g(x)=\frac{x}{|x|-1}$

a) Déterminer D_g

b) Montrer que : g est impaire

c) Montrer que : $g(x)=f(x)$ Pour tout $x \in D_f \cap \mathbb{R}^+$

d) En déduire une méthode pour tracer la courbe (C_g) de fonction g et tracer (C_f) et (C_g) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

e) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $x-m|x|+m=0$ avec : $m \in \mathbb{R}$

Solutions : $f(x)=\frac{x}{x-1}$

1) On a $f(x) \in \mathbb{R}$ signifie que : $x-1 \neq 0$ c'est-à-dire : $x \neq 1$ donc $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

2) Soient $x_1 \in D_f$ et $x_2 \in D_f$ tel que : $x_1 \neq x_2$

On a : $T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{x_1-1}-\frac{x_2}{x_2-1}=\frac{x_1(x_2-1)-x_2(x_1-1)}{(x_1-1)(x_2-1)}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{x_1x_2-x_1-x_1x_2+x_2}{(x_1-x_2)(x_1-1)(x_2-1)}=\frac{-x_1+x_2}{(x_1-x_2)(x_1-1)(x_2-1)}=\frac{-(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)(x_1-1)(x_2-1)}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)}$$

3) Tableau de variation : a) sur $]1;+\infty[$ soient $x_1 \in]1;+\infty[$ et $x_2 \in]1;+\infty[$ $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 \succ 1$ et $x_2 \succ 1$ Donc $x_1-1 \succ 0$ et $x_2-1 \succ 0$ Donc $(x_1-1)(x_2-1) \succ 0$

Donc $T(x_1;x_2)=\frac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)} \leq 0$ sur $]1;+\infty[$

D'où f est décroissante sur $]1;+\infty[$

b) Sur $]-\infty;1[$ soient $x_1 \in]-\infty;1[$ et $x_2 \in]-\infty;1[$ $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 \prec 1$ et $x_2 \prec 1$ Donc $x_1-1 \prec 0$ et $x_2-1 \prec 0$ Donc $(x_1-1)(x_2-1) \succ 0$

Donc $T(x_1;x_2)=\frac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)} \leq 0$ sur $]-\infty;1[$ D'où f est strictement croissante sur $]-\infty;1[$

<u>Résumé</u> : tableau de variation :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

4) Montrons que : $f(x)=1+\dfrac{1}{x-1}$ Pour tout $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

Soit $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ on a : $1+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x-1+1}{x-1}=\dfrac{x}{x-1}$

Donc : $f(x)=1+\dfrac{1}{x-1}$ Pour tout $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

5)<u>Méthode1</u> $f(x)=1+\dfrac{1}{x-1}$; Puisque : $f(x)=\beta+\dfrac{k}{x+\alpha}$ Alors : $\alpha=-1$ et $\beta=1$ et $k=1>0$

Donc : (C_f) est une hyperbole de centre $W(-\alpha;\beta)$; $W(1;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=1$ et $y=1$

<u>Méthode2</u> :☹(changement de repére)

l'équation de (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ est : $y=f(x)$

Signifie : $y=1+\dfrac{1}{x-1}$ donc : $y-1=\dfrac{1}{x-1}$ On pose : $Y=y-1$ et $X=x-1$

L'équation de (C_f) devient : $Y=\dfrac{1}{X}$ dans le repère $(W;\vec{i};\vec{j})$ avec $W(1;1)$

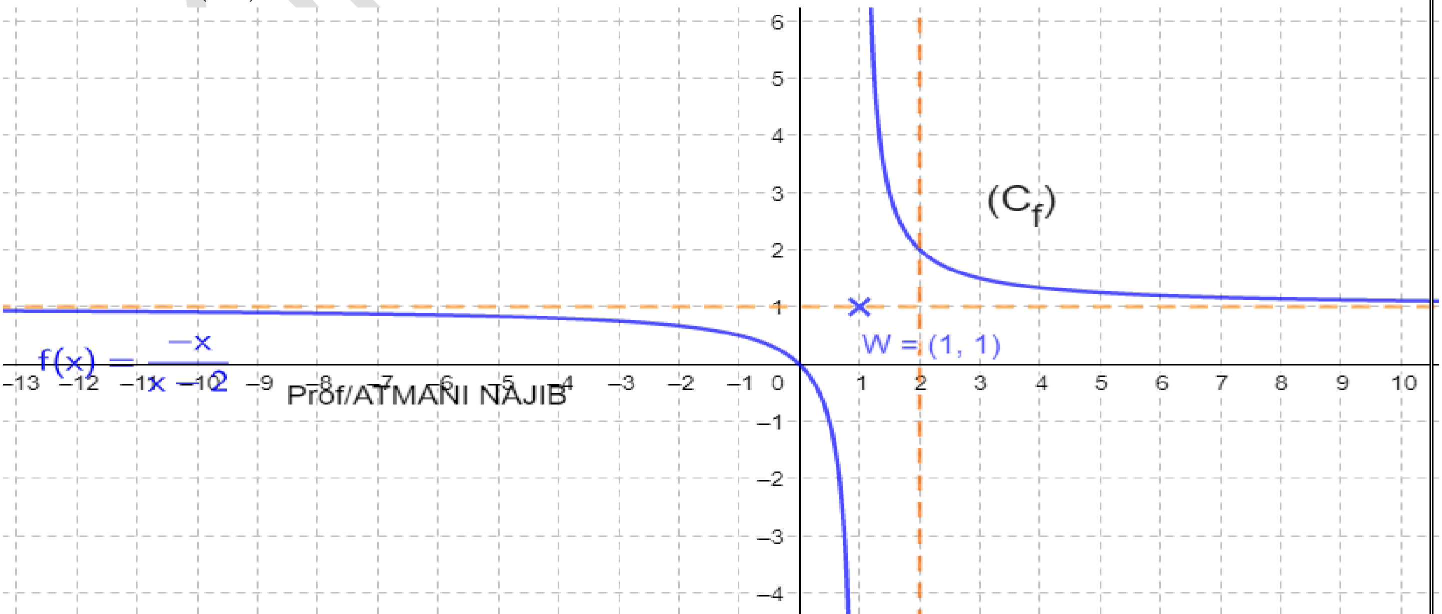
Donc (C_f) est une hyperbole de centre W et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=1$ et $y=1$

<u>Méthode3 :</u>☹(on utilisant un résumé de notre cours)

Si : $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors (C_f) est une hyperbole de centre $W\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\dfrac{d}{c}$ et $y=\dfrac{a}{c}$

Dans notre exercice on a : $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ donc (C_f) est une hyperbole de centre $W\left(\dfrac{1}{1};\dfrac{1}{1}\right)$ c'est à dire : $W(1;1)$ d'asymptotes les droites d'équations : $x=\dfrac{1}{1}=1$ et $y=\dfrac{1}{1}=1$

6) La courbe (C_f) :



PROF: ATMANI NAJIB

7) Soit g une fonction tel que : $g(x)=\dfrac{x}{|x|-1}$

On a $g(x)\in\mathbb{R}$ signifie $|x|-1\neq 0$

Signifie $|x|\neq 1$ c'est-à-dire : $x\neq 1$et $x\neq -1$

Par suite : $D_g=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

b) Montrons que g est impaire :

☞ $x\in D_g=\mathbb{R}-\{-1;1\}$ Signifie $x\neq 1$et $x\neq -1$

Signifie $-x\neq -1$et $-x\neq -(-1)$

Signifie $-x\neq -1$et $-x\neq 1$

Signifie $-x\in D_g=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

☞ $g(-x)=\dfrac{-x}{|-x|-1}=\dfrac{-x}{|x|-1}$ car $|-x|=|x|$

Donc : $g(-x)=-\dfrac{x}{|x|-1}=-g(x)$ par suite : g est impaire

c) Montrons que : $g(x)=f(x)$ Pour tout $x\in D_f\cap\mathbb{R}^+$

Soit : $x\in D_f\cap\mathbb{R}^+$ donc : $x\geq 0$

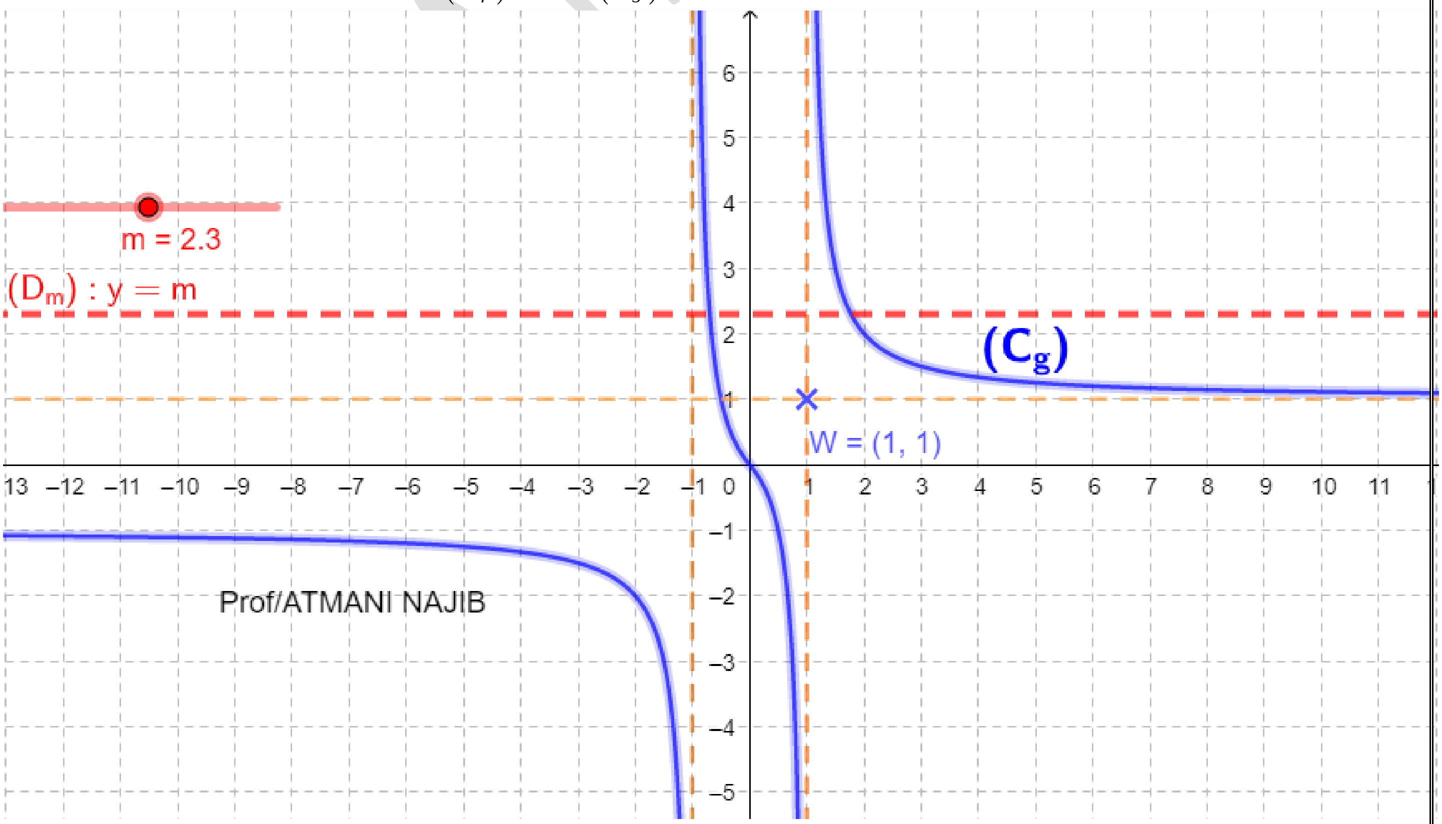
Donc : $|x|=x$ par suite : $g(x)=\dfrac{x}{|x|-1}=\dfrac{x}{x-1}=f(x)$

d) On a : $g(x)=f(x)$ Pour tout $x\in[0;1[\cup]1;+\infty[$

Donc : $(C_g)=(C_f)$ sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$

Et puisque g est impaire alors il suffit de tracer son symétrique par rapport au centre du repère $(o;\vec{i};\vec{j})$

d) La courbe représentative de (C_f) et de (C_g) :



e) Déterminons graphiquement le nombre de solutions de l'équation $x-m|x|+m=0$ avec $m\in\mathbb{R}$

$x-m|x|+m=0$ Signifie $x=m|x|-m$

Signifie $x=m(|x|-1)$

Signifie $m=\dfrac{x}{|x|-1}=g(x)$

Signifie $g(x)=m$

Donc : le nombre de solutions de l'équation est le nombre de points d'intersections de (C_g) et la droite : $y=m$

Si : $-1\le m\le 1$ il y'a une seule solution

Si : $m\succ 1$ ou $m\prec 1$ il y'a deux solutions

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI NAJIB