Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°4 : Géométrie dans l'espace

Exercice 1 : (***) Soient dans l'espace le cube $ABCDEFGH$

1) Montrer que : $(AE)\perp(BD)$

2) Montrer que : $(BD)\perp(AEC)$

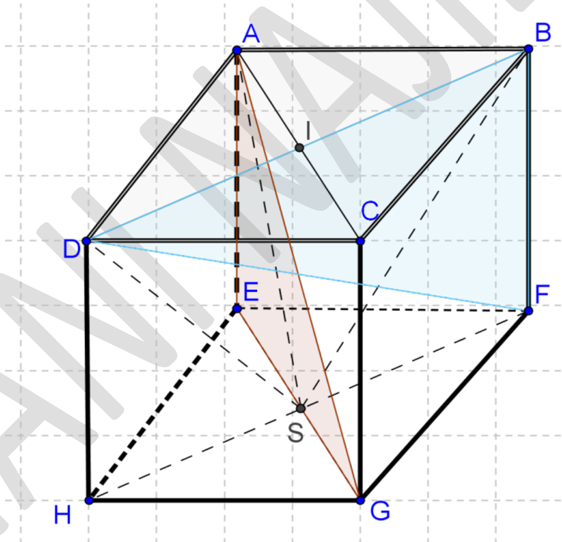
3) Soit S le centre du carré $EFGH$ avec : $AB=3cm$

Calculer le volume du cube $ABCDEFGH$ et de la pyramide $SABCD$

4) Montrer que : $(BDF)\perp(AEG)$

Solution : 1) O a : $(AE)\perp(AB)$ car $ABFE$ carré

et $(AE)\perp(AD)$ car $ADHE$ carré



Et on a :

(AB) et (AD) se coupent dans le plan (ABD)

Donc : $(AE)\perp(ABD)$

Et puisque : $(BD)\subset(ABD)$ alors $(AE)\perp(BD)$

2) on a : $(AE)\perp(BD)$ et $(AC)\perp(BD)$

(car $ABCD$ carré)

Et on a : (AE) et (AC) se coupent dans le plan (ACE)

Donc : $(BD)\perp(AEC)$

3) a) Le volume du cube $ABCDEFGH$ est :

$AB^3=3^3=27cm^3$

b) Le volume de la pyramide $SABCD$:

Soit I le centre du carré $ABCD$

Donc (SI) est une hauteur de la pyramide $SABCD$

Donc le volume du pyramide $SABCD$ est : $V_{SABCD}=\frac{1}{3}\times A_{SABCD}\times SI$

Or on a : $SI=AE$ donc : $SI=3cm$

On a : $A_{SABCD}=AB^2=9cm^2$ donc : $V_{SABCD}=\frac{1}{3}\times 9\times 3cm^3=9cm^3$

4) Montrons que : $(BDF)\perp(AEG)$?

On a : $(AE)\parallel(CG)$ donc : les points $A;E;C;G$ sont coplanaires

Et par suite : $(AEC)=(AEG)$ et on a : $(BD)\subset(BDF)$ et $(BD)\perp(AEG)$

Donc : $(BDF)\perp(AEG)$

Exercice 2 : (***) Soient dans l'espace les parallélogrammes $ABCD$ et $ABEF$

Non situés dans le même plan

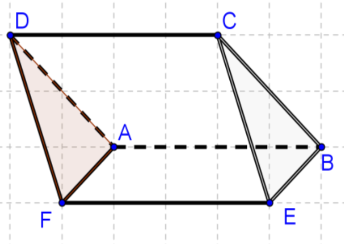
1) Montrer que : $(BCE)\parallel(ADF)$

2)a) Montrer que : les points $E;F;C;D$ sont coplanaires

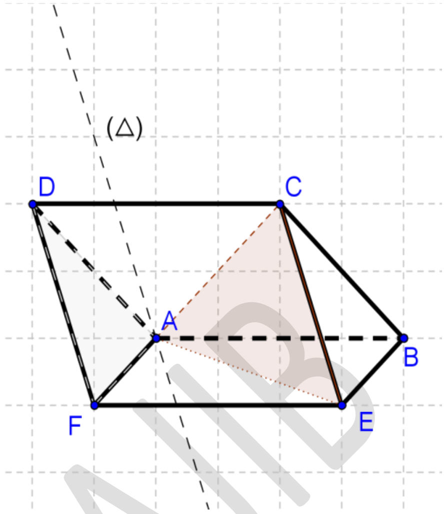
b) Montrer que : $(EC)\parallel(DF)$

c) En déduire : la nature du quadrilatère $CDFE$

3) Déterminer l'intersection des plans (ACE) et (ADF)



Solution : 1) $ABCD$ est un parallélogramme donc : $(AD) \parallel (BC)$



Et on a : $ABEF$ est un parallélogramme donc : $(AF) \parallel (BE)$

ET on a : $(AD) \cap (AF) = \{A\}$ et $(AD) \subset (ADF)$ et $(AF) \subset (ADF)$

Et on a : $(BC) \cap (BE) = \{B\}$ et $(BC) \subset (BCE)$ et $(BE) \subset (BCE)$

Donc : $(BCE) \parallel (ADF)$

2) a) On a : $ABCD$ est un parallélogramme donc : $(DC) \parallel (AB)$

ET On a : $ABEF$ est un parallélogramme donc : $(EF) \parallel (AB)$

Par suite : $(EF) \parallel (DC)$

Donc: les points $E ; F ; C ; D$ sont coplanaires

b) On a : $(ADF) \parallel (BCE)$ et $(EFDC) \cap (ADF) = (DF)$ et

$(EFDC) \cap (BCE) = (EC)$

Donc : $(EC) \parallel (DF)$

c) On a : $(DC) \parallel (EF)$ et $(EC) \parallel (DF)$

Donc : quadrilatère $CDEF$ est un parallélogramme

3) On a : $C \in (ACE)$ et $C \notin (ADF)$ donc : $(ACE) \neq (ADF)$

On a : $A \in (ACE) \cap (ADF)$

On pose : $(ACE) \cap (ADF) = (\Delta)$

On a : $(FD) \subset (ADF)$ et $(CE) \subset (ACE)$ et $(FD) \parallel (CE)$

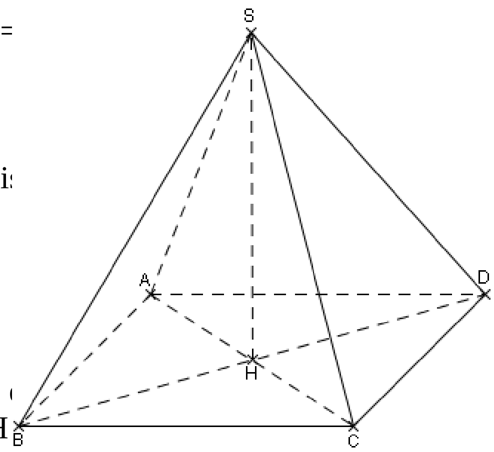
Donc : (Δ) est la droite qui passe par A et parallèle a (CE) et (FD)

Donc : L'intersection des plans (ACE) et (ADF) est la droite qui passe par A

Et parallèle a (CE) et (FD)

Exercice 3 : (**) Sur la pyramide SABCD à base rectangulaire ci-dessous, H est le centre du rectangle ABCD et (SH) est perpendiculaire à la base ABCD.

De plus, on a : SA = SB = SC = SD = 8,5 cm, CD = 12 cm et BC =



1) Vérifier que HD = 7,5 cm.

2) Calculer SH.

3) Calculer le volume de la pyramide SABCD.

Solution : 1) Le triangle BCD est rectangle en C donc on peut utili

On trouve : $BD = \sqrt{225} = 15cm$

H est le centre du rectangle ABCD donc il est le milieu

De la diagonale [BD] donc : $HD = \frac{1}{2} BD = 7.5cm$

4) (SH) est perpendiculaire à la base ABCD donc le triangle SHD

D'après le théorème de Pythagore on trouve que : La longueur SH

5) Volume de la pyramide SABCD :

$$V = \frac{BC \times CD \times SH}{3} = \frac{6 \times 12 \times 4}{3} = 144cm^3$$

Le volume de la pyramide est de 144 cm^3.

Exercice 4 : (**) On considère une bougie conique

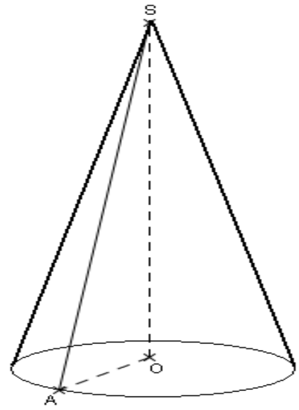
Représentée ci-contre (la forme d'un Cône droit)

Le rayon OA de sa base est 2,5 cm.

La longueur du segment [SA] est 6,5 cm.

1) Donner la nature du triangle SAO

2) Montrer que la hauteur SO de la bougie est 6 cm.
3) Calculer le volume de cire nécessaire à la fabrication de cette bougie ; on donnera la valeur arrondie au dixième de cm^3 ?
4) Calculer l'angle $\widehat{ASO}$; on donnera la valeur arrondie au degré.



Solution :1) Le triangle SAO est rectangle en O ; on peut donc utiliser le théorème de Pythagore et On trouve : $OS = \sqrt{36} = 6cm$

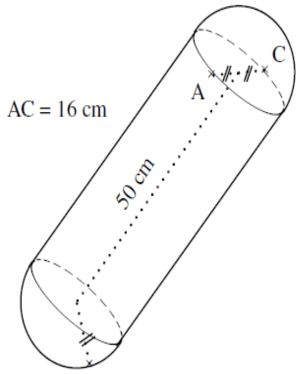
3) Calcul du volume : si B L'aire de la base et $V = \frac{1}{3} B \times h = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3}$

$V = \frac{\pi \times AO^2 \times OS}{3} = \frac{\pi \times 2.5^2 \times 6}{3} = 12.5\pi cm^3$ Valeur exacte

Le volume de la bougie est $V \simeq 39.3cm^3$ Valeur approchée

4) Le triangle SAO est rectangle en O ; on peut donc utiliser les formules trigonométriques pour déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ASO}$: $Cos\left(ASO\right) = \frac{OS}{AS} = \frac{6}{6.5} = \frac{12}{13}$ et d'après la calculatrice, $\widehat{ASO} \approx 23°$.

Exercice 5 : (***) Pour amortir les chocs contre les autres embarcations ou le quai, les péniches sont équipées de
« Boudins » de protection. Calculer le volume exact en cm^3 du "boudin" de protection ci-dessous, puis arrondir au centième : Rappel : *Volume d'un cylindre de révolution :* $V = \pi R^2 h$
où h désigne la hauteur du cylindre et R le rayon de la base.



Solution : Le boudin de protection est composé d'un cylindre et de deux demi-boules qui équivalent à une boule.
Le diamètre de la boule mesure 16 cm (longueur AC) donc le rayon est de 8 cm.

Calcul du volume de la boule : $V_{boule} = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} 8^3 = \frac{2048}{3}\pi$

Calcul du volume du cylindre : $V_{cylindre} = \pi \times 8^2 \times 50 = 3200\pi$

Volume total du boudin de protection :

$V = V_{boule} + V_{cylindre} = \frac{2048}{3}\pi + 3200\pi = \frac{11648}{3}\pi cm^3$ Valeur exacte

$V \simeq 12197.76cm^3$ Valeur arrondie au centième

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien