Correction Série N°4 : PRODUIT SCALAIRE

Exercice1 : (**) Soit ABC un triangle tel que : $BAC = \frac{\pi}{3}$; $AB = 6$ et $AC = 4$

Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$

Solution :

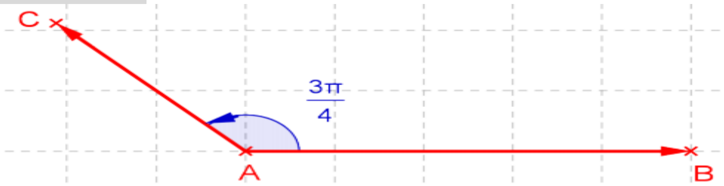
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos BAC = 6 \times 4 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 24 \times \frac{1}{2} = 12$$

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -12$$

Exercice2 : (**) Soit ABC un triangle tel que : $BAC = \frac{3\pi}{4}$; $AB = 5$ et $AC = 3$

Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$

Solution :



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos BAC = 5 \times 3 \times \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 15 \times \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -15 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$ Car : $\cos(\pi - x) = -\cos x$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -15 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{15\sqrt{2}}{2}$$

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{15\sqrt{2}}{2}$$

Exercice3 : (**) Soit ABC un triangle tel que AB = 9, AC = 4 et $BAC = 60^\circ$

Calculer BC et déterminer une mesure approchée des angles ABC et BCA

Solution :

a) On utilise la formule d'Al Kashi : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos(BAC)$

Donc : $BC^2 = 81 + 16 - 2 \times 9 \times 4 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 81 + 16 - 2 \times 9 \times 4 \times \frac{1}{2} = 61$

Donc : $BC = \sqrt{61}$

b) Si β est la mesure de l'angle : ABC

Alors : $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \times BC \cos(\beta)$

Donc : $\cos(\beta) = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2BA \times BC}$

Donc : $\cos(\beta) = \frac{126}{18\sqrt{61}} = \frac{7}{\sqrt{61}} = \frac{7\sqrt{61}}{61}$

Avec la calculatrice, ABC a pour mesure environ 26,3° et, la somme des mesures des angles étant égale à 180°, ACB a pour mesure environ 93,7°

Exercice4 : (**) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\left\|\vec{u}\right\| = 6$ et $\vec{u}.\vec{v} = -9$ et $\left(\vec{u};\vec{v}\right) = \frac{4\pi}{3}$

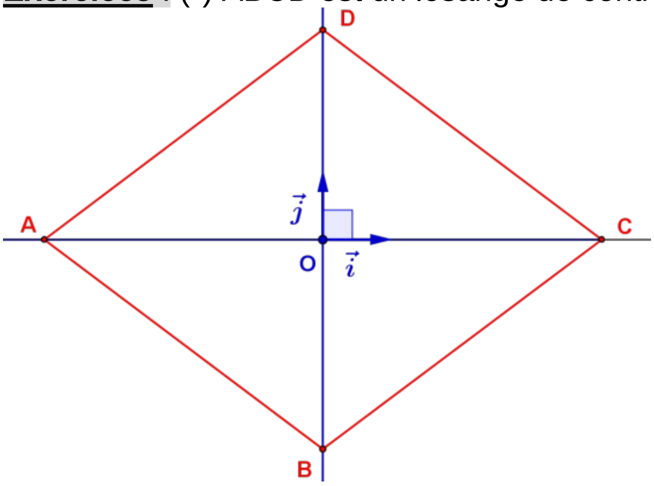
Déterminer : $\left\|\vec{v}\right\|$

Solution : On sait que : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u};\vec{v})$ donc : $\|\vec{v}\| = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})}$

Donc : $\|\vec{v}\| = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \cos\frac{4\pi}{3}}$ or $\cos\dfrac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$

Donc : $\|\vec{v}\| = \dfrac{-9}{-6 \times \frac{1}{2}} = 3$

Exercice5 : (*) ABCD est un losange de centre O tel que OA=4 et OD = 3.



Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$ 2) $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}$

3) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$ 4) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$

Solution : 1) Calculons : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$

O est le pied de la hauteur du triangle ADC issue de D

Donc : O étant le projeté orthogonal de D sur la droite (AC)

Donc : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AO}$

Donc : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = AC \times AO = 8 \times 4 = 32$ car : $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AO}$ sont colinéaires et de même sens

2)Calculons : $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}$

O est le pied de la hauteur du triangle OBC issue de C

Donc : O étant le projeté orthogonal de C sur la droite (BO)

Donc : $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BO}^2 = BO^2 = 3^2 = 9$

3)Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$

On a : ABCD est un losange donc : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2$

Dans le triangle rectangle OAB, j'utilise le théorème de Pythagore :

On a donc : $AB^2 = OA^2 + OB^2$ c'est-à-dire : $AB^2 = 4^2 + 3^2 = 25$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = AB^2 = 25$

4)Calculons : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$

O est le pied de la hauteur du triangle DBC issue de C

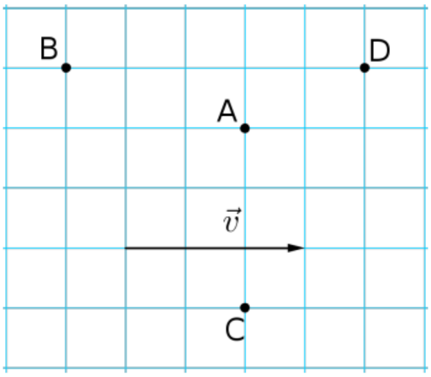
Donc : O étant le projeté orthogonal de C sur la droite (BO)

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BO} = BD \times BO$ car : $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BO}$ sont colinéaires et de même sens

Donc : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD} = 6 \times 3 = 18$

Exercice6 : (**)

On considère la figure ci-contre, dont le quadrillage est composé de carrés de côté 1.



Calculer les produits scalaires suivants :

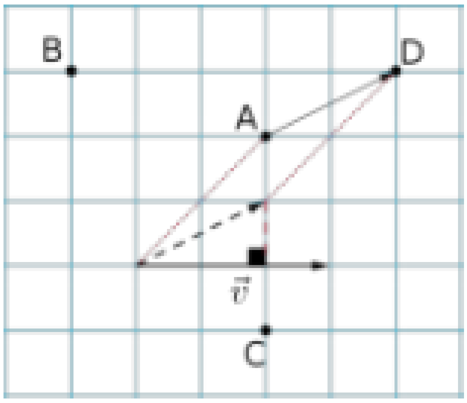
1) $\overrightarrow{AD}.\vec{v}$ 2) $\overrightarrow{CA}.\vec{v}$ 3) $\overrightarrow{AB}.\vec{v}$ 4) $\overrightarrow{DB}.\vec{v}$ 5) $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CA}$ 6) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$

Solution :1) Calculons : $\overrightarrow{AD}.\vec{v}$

Pour calculer ce produit scalaire nous allons faire une translation du vecteur $\overrightarrow{AD}$

Sur la droite d'action du vecteur $\vec{v}$ puis faire une projection

Orthogonale du point représentant du point D sur la droite d'action du vecteur $\vec{v}$ comme l'indique la représentation ci-dessous :



Ainsi on obtient deux vecteurs colinéaires de même sens, par suite on a :

$\overrightarrow{AD}.\vec{v} = 2\times 3 = 6$

2) Calculons : $\overrightarrow{CA}.\vec{v}$

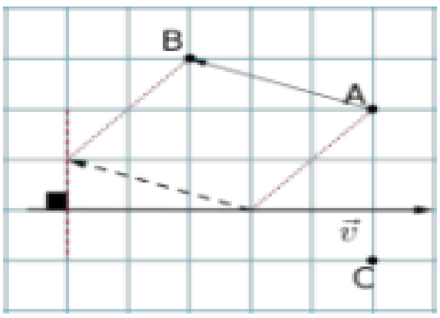
Les droites d'actions des vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\vec{v}$ ont perpendiculaires

Donc : $\overrightarrow{CA}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux alors leur produit scalaire est nul.

D'où : $\overrightarrow{CA}.\vec{v} = 0$

3) Calculons : $\overrightarrow{AB}.\vec{v}$

Pour calculer ce produit scalaire nous allons faire une translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur la droite d'action du vecteur $\vec{v}$ puis faire une projection orthogonale du point représentant du point B sur la droite d'action du vecteur $\vec{v}$ comme l'indique la représentation ci-dessous :



Ainsi on obtient deux vecteurs colinéaires de sens contraire, par suite on a : $\overrightarrow{AB}.\vec{v} = -3\times 3 = -9$

4) Calculons : $\overrightarrow{DB}.\vec{v}$

Les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire alors on :

$\overrightarrow{DB}.\vec{v} = -DB\times\left\|\vec{v}\right\| = -5\times 3 = -15$

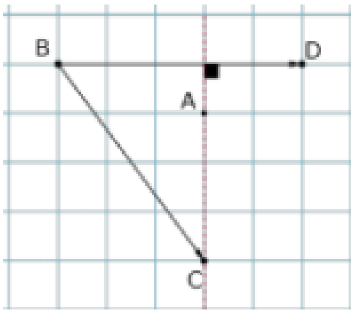
5) Calculons : $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CA}$

Les droites d'actions des vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont perpendiculaires donc les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CA}$ Sont orthogonaux alors leur produit scalaire est nul

D'où : $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CA} = 0$

6) Calculons : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$

Pour calculer ce produit scalaire nous allons faire une projection orthogonale du point représentant du point C sur la droite d'action du vecteur $\overrightarrow{BD}$ comme l'indique la représentation ci-dessous :



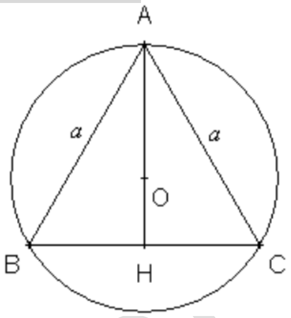
Ainsi on obtient deux vecteurs colinéaires de même sens, par suite on a : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD} = 3\times 5 = 15$

Exercice7 : (**) Soit un triangle équilatéral ABC de côté a et H est le projeté orthogonal de A sur (BC) et O le centre du cercle circonscrit à ABC.

Exprimer en fonction de a les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ d) $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$

Solution :



a) Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Puisque le triangle ABC est équilatéral, l'angle BAC mesure $\frac{\pi}{3}$ radians

Ainsi : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\cos BAC = a\times a\times\cos\frac{\pi}{3} = a^2\times\frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$

b) Calculons : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$

1ère méthode : On « réarrange » l'écriture des vecteurs avant de calculer le produit scalaire :

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = \left(-\overrightarrow{CA}\right).\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

Le produit scalaire $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ se calcule comme celui ci-dessus :

Ainsi : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \left\|\overrightarrow{CA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{CB}\right\|\times\cos ACB = a\times a\times\cos\frac{\pi}{3} = a^2\times\frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$

Donc : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = -\frac{a^2}{2}$

2ème méthode : On utilise la relation de Chasles, et la distributivité du produit scalaire, pour écrire :
$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AC^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AC^2+\frac{a^2}{2}=-a^2+\frac{a^2}{2}=-\frac{a^2}{2}$

c) Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

1ère méthode :H est le projeté orthogonal de B sur (AH)

Ainsi : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AH}^2=AH^2$

On utilise un résultat bien connu qui dit que la hauteur AH du triangle équilatéral mesure $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

Ainsi : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=AH^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2=\frac{3}{4}a^2$

2ème méthode :On calcule directement : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AH}\right\|\times\cos BAH$

Puisque le triangle ABC est équilatéral, la hauteur [AH] issue de A est également bissectrice de l'angle BAC de sorte que l'angle BAH mesure $\frac{\pi}{6}$ radians.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=a\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}a^2$ On retrouve le même résultat !

d) Calculons : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$

1ère méthode : Puisque le triangle ABC est équilatéral, la hauteur [AH] issue de A est également médiane issue de A. Le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC est aussi centre de gravité du triangle, de sorte que : $OA=\frac{2}{3}AH=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$ et de même pour la longueur OB.

Enfin, l'angle AOB mesure $\frac{2\pi}{3}$ radians

On calcule donc : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OB}\right\|\times\cos AOB=\frac{\sqrt{3}}{3}a\times\frac{\sqrt{3}}{3}a\times\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{3}a^2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{6}a^2$

2ème méthode :

H est le projeté orthogonal de B sur (OA), de sorte que : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OH}$ sont colinéaires de sens opposé, on aura :

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=-OA\times OH$

Puisque le triangle ABC est équilatéral, la hauteur [AH] issue de A est également médiane issue de A. Le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC est aussi centre de gravité du triangle, de sorte que : $OA=\frac{2}{3}AH=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$ et $OH=\frac{1}{3}AH=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{6}a$

On retrouve ainsi : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}=-\frac{\sqrt{3}}{3}a\times\frac{\sqrt{3}}{6}a=\boxed{-\frac{1}{6}a^2}$

Exercice8 : (**) Soit ABC un triangle tels que : $AB=\sqrt{7}$ et $AC=8$ et $BC=2$

En appliquant la propriété suivante :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs alors on a : $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2\right)$ et $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2\right)$

Calculer : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

Solution : Calculons : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

Pour : $\vec{u}=\overrightarrow{CA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{CB}$

Et comme on a : $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

Alors on a : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{CA}\|^2+\|\overrightarrow{CB}\|^2-\|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\|^2\right)$

Donc : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\left(CA^2+CB^2-BA^2\right)=\frac{1}{2}\left(8^2+2^2-\sqrt{7}^2\right)=30,5$

Exercice9 : (*) Soit ABM un triangle tel que : $AM=3cm$
Et $BM=4cm$ et $AB=4cm$

I le milieu du segment [AB]. Et J le milieu de $[AM]$

Et K le milieu du segment$[BM]$

Calculer : MI et AK et BJ

Solution : 1) calcul de MI

D'après le théorème de la médiane dans ABM on a :

$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$

Donc $3^2+4^2=2MI^2+\frac{1}{2}4^2$

Donc : $9+16=2MI^2+\frac{16}{2}$ donc : $MI^2=\frac{17}{2}$donc : $MI=\sqrt{\frac{17}{2}}$

Calcul de AK

D'après le théorème de la médiane dans ABM

Donc : $AB^2+AM^2=2AK^2+\frac{BM^2}{2}$

Donc : $2^2+3^2=2AK^2+\frac{1}{2}4^2$ donc : $AK^2=\frac{17}{2}$ donc : $AK=\sqrt{\frac{17}{2}}$

Calcul de BJ

D'après le théorème de la médiane dans ABM

Donc : $AB^2+BM^2=2BJ^2+\frac{AM^2}{2}$

Donc : $4^2+4^2=2BJ^2+\frac{1}{2}3^2$

Donc : $\frac{55}{2}=2BJ^2$ donc : $BJ^2=\frac{55}{4}$ donc : $BJ=\frac{\sqrt{55}}{2}$

Exercice10 : (**) Soit ABC un triangle tel que et $AB=2\sqrt{3}$ et $AC=1$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-3$

1) Déterminer une mesure de l'angle BAC

2) Soit I le milieu du segment $[BC]$

a) Calculer BC

b) En déduire la distance AI

Solution : 1) Déterminons une mesure de l'angle BAC

On a : $\cos BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}$

Donc : $\cos BAC=\frac{-3}{2\sqrt{3}\times 1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc : $\cos BAC=-\cos\frac{\pi}{6}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Donc : Une mesure de l'angle BAC est $\frac{5\pi}{6}$ rad ou 150°

2) I le milieu du segment $[BC]$

a) D'après le Théorème d'Al Kashi dans le triangle ABC on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Donc $BC^2 = 12+1+6 = 19$ par suite : $BC = \sqrt{19}$

b) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a :

$$AI^2 = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(12+1-\frac{19}{2}\right) = \frac{7}{4}$$ Par suite : $AI = \frac{\sqrt{7}}{2}$

Exercice11 : (**) Soit ABC un triangle. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et BC dans chacun des cas suivants :

1) AB=6 cm, AC=5 cm et $BAC = 60^\circ$

2) AB=7 cm, AC=4 cm et $BAC = 120^\circ$

Solution :1) On calcule directement le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(BAC) = 6\times5\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 6\times5\times\frac{1}{2} = 15$$

On calcule BC en utilisant la formule d'Al Kashi :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\times AC\cos(BAC) = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6^2 + 5^2 - 2\times15 = 31$$

Donc : $\boxed{BC = \sqrt{31}cm}$

2) On calcule directement le produit scalaire : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(BAC) = 7\times4\times\cos(120^\circ) = -28\times\cos(180^\circ - 60^\circ)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 28\times\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -28\times\cos\frac{\pi}{6} = -28\times\frac{1}{2} = -14$$

On calcule BC en utilisant la formule d'Al Kashi :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\times AC\cos(BAC) = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 7^2 + 4^2 - 2\times(-14) = 93$$

Donc : $\boxed{BC = \sqrt{93}cm}$

Exercice12 : (***) Soit ABC un triangle tel que $AB = 1$ Et $BC = AC = \sqrt{2}$

I Le milieu du segment $[AB]$ et D un point tel que : $\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

1) Calculer CI

2) Calculer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$

4) En déduire que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}$ et en déduire $\cos BAC$

5) Calculer : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ et en déduire la nature du triangle BAD

6) Soit le point M tel que : $-3\overrightarrow{MA} + 7\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

a) Calculer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et calculer $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$

b) Montrer que $(MD)\perp(AC)$

Solution :1) a) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a :

$$BC^2 + AC^2 = 2CI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

Donc : $4 = 2CI^2 + \frac{1}{2}$ donc : $\frac{7}{4} = CI^2$ donc : $CI = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

2) $\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ ssi $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ donc : $-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}$

On a : I le milieu du segment $[AB]$ et ABC isocèle en C

Donc : $(IC)\perp(AB)$ cad $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{IC}$ donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}=0$

Par suite : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$

4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}=\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AI}\|\cos 0=AB\cdot AI\cdot 1=AB\cdot\frac{AB}{}\cdot\cos 0$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Calcul de $\cos BAC$:On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}$ donc : $AB\times AC\times\cos\hat{A}=\frac{1}{2}$

Signifie que : $1\times\sqrt{2}\times\cos\hat{A}=\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $\cos\hat{A}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ donc : $\cos\hat{A}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

5) On a : $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

Signifie que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}^2=2\times\frac{1}{2}-AB^2=1-1=0$

Donc : $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ par suite BAD est un triangle rectangle en A

6)a) $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ ssi $-3\overrightarrow{MA}+7\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

Signifie que : $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Signifie que : $3\overrightarrow{AM}-7\overrightarrow{AM}+7\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ c'est-à-dire : $-4\overrightarrow{AM}=-7\overrightarrow{AC}$ ssi $\overrightarrow{AM}=\frac{7}{4}\overrightarrow{AC}$

Calcul de : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$???

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times2-\frac{1}{2}=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

B) $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{7}{2}=-\frac{7}{4}\cdot2+\frac{7}{2}=-\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=0$

Signifie que : $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ donc : $\overrightarrow{MD}\perp\overrightarrow{AC}$

Par suite : $(MD)\perp(AC)$

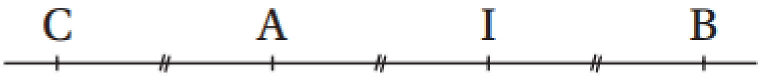
Exercice13: (**) A et B sont deux points tels que AB = 6. I est le milieu du segment [AB].
On appelle $(\mathcal{E})$. L'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=27$
a) Soit C le symétrique de I par rapport à A. Montrer que C appartient à $(\mathcal{E})$.
b) Montrer que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MI^2-9$
c) Déterminer l'ensemble $(\mathcal{E})$.

Solution : a) Les vecteurs : $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires de même sens

Donc : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA\times CB$ et $CA=3$ et $CB=9$

Donc : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=3\times9+27$

Par suite C appartient à $(\mathcal{E})$.



b) Montrons que :

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right)$ car : I est le milieu du segment [AB].

Donc : $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$

Par suite : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2 = MI^2 - 3^2 = MI^2 - 9$

c) Déterminons l'ensemble $(\mathcal{E})$.

M appartient à $(\mathcal{E})$ signifie que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 27$

Signifie que : $MI^2 - 9 = 27$

Signifie que : $MI^2 = 36$

Signifie que : $MI = 6$

$(\mathcal{E})$ est donc le cercle de centre I et de rayon 6 (passant par C).

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien