Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°4 : Les Transformations du plan

Exercice 1 : (**) : ABC Un triangle isocèle de sommet A

On construit à l'extérieur de ABC deux triangles ABF et ACE équilatérales

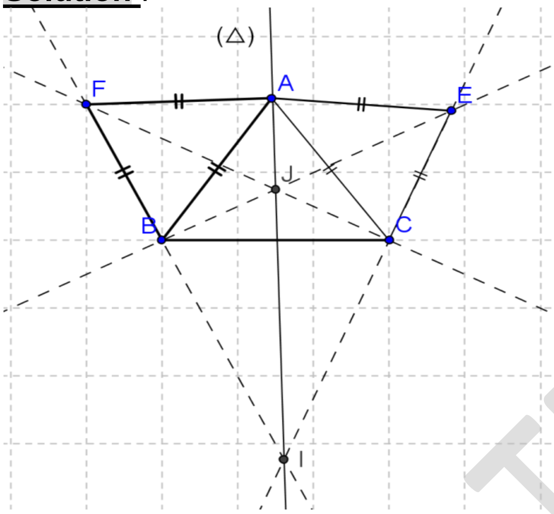
Les droites (BF) et (CE) se coupent en un point I

Et les droites (FC) et (BE) se coupent en un point J

Soit (Δ) l'axe de symétrie du triangle ABC

Montrer que les points : A , I et J sont alignés

Solution :



Montrons que les points : A , I et J sont alignés

Soit $S_{(\Delta)}$ la symétrie axiale d'axe (Δ)

Les deux triangles ABF et ACE sont symétriques par rapport à la droite (Δ)

On a : $S_{(\Delta)}(B)=C$ et $S_{(\Delta)}(E)=F$ donc : $S_{(\Delta)}(BE)=(CF)$

Et puisque : $(BE)\cap(CF)=\{J\}$ alors $J\in(\Delta)$

Et puisque les points : A , I et J appartiennent à la droite (Δ) alors les points A , I et J sont alignés

Exercice 2 : (***) A , B , C et D sont quatre points du plan tels que : $\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{AB}$

S_O est une symétrie centrale de centre O

S_O Transforme respectivement les points : A , B , C et D en A' , B' ; C' et D'

Montrer que : $\overrightarrow{C'D'}=4\overrightarrow{A'B'}$

Solution : $S_O(A)=A'$ et $S_O(B)=B'$ impliquent : $\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{A'O}$ et $-\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OB}$

Donc : $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{A'O}-\overrightarrow{OB'}=-\left(\overrightarrow{A'O}+\overrightarrow{OB'}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{A'B'}$ (1)

De même : $S_O(C)=C'$ et $S_O(D)=D'$ impliquent : $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{C'D'}$ (2)

Or : $\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{AB}$ donc : $-\overrightarrow{C'D'}=4\left(-\overrightarrow{A'B'}\right)$ d'après (1) et (2) Par conséquent : $\overrightarrow{C'D'}=4\overrightarrow{A'B'}$

De façon général on dit que la symétrie centrale conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Exercice 3 : (***) Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que : B est l'image du point A par la translation de vecteur $\vec{v}$ et D est l'image du point C par la translation de vecteur $2\vec{v}$

1) Montrer que : $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

2) Soit O le milieu du segment $[CD]$

Montrer que : $ABOC$ est un parallélogramme

Solution :1) On a : $t_{\vec{v}}(A)=B$ signifie que : $\overrightarrow{AB}=\vec{v}$

Et on a : $t_{2\vec{v}}(C)=D$ signifie que : $\overrightarrow{CD}=2\vec{v}$

Donc : $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}$ qui signifie que : $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

2) Montrons que : $ABOC$ est un parallélogramme

On a: O le milieu du segment $[CD]$ donc : $\overrightarrow{CO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ et puisque : $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

Alors : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CO}$ par suite : $ABOC$ est un parallélogramme

Exercice 4 : (**) Écrire les expressions vectorielles suivantes en utilisant une homothétie :

1) $4\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ Avec I un point donné

2) $\frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega B}=-3\overrightarrow{BA}$ Avec Ω un point donné

3) $-2\overrightarrow{IA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ Avec I un point donné

Solution $h(I,k)$**:**

1) $h(A)=B$ Equivaut à : $\overrightarrow{IB}=k\overrightarrow{IA}$

$4\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ Equivaut à : $4\overrightarrow{IA}-5\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)=\vec{0}$

Equivaut à : $4\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Equivaut à : $-\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Equivaut à : $\overrightarrow{IB}=-\frac{1}{5}\overrightarrow{IA}$ donc $h\left(I,-\frac{1}{5}\right)$ l'homothétie h de centre I et de rapport $k=-\frac{1}{5}$

2) $\frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega B}=-3\overrightarrow{BA}$ Equivaut à : $\overrightarrow{\Omega B}=-6\overrightarrow{BA}$ Equivaut à : $\overrightarrow{\Omega B}=6\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $\overrightarrow{\Omega B}=6\left(\overrightarrow{A\Omega}+\overrightarrow{\Omega B}\right)$

Equivaut à : $\overrightarrow{\Omega B}-6\overrightarrow{\Omega B}=-6\overrightarrow{\Omega A}$ Equivaut à : $-5\overrightarrow{\Omega B}=-6\overrightarrow{\Omega A}$ Equivaut à : $\overrightarrow{\Omega B}=\frac{6}{5}\overrightarrow{\Omega A}$

Donc $h\left(\Omega,\frac{6}{5}\right)$

3) $-5\overrightarrow{IA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ Equivaut à : $-5\overrightarrow{IA}+\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)=\vec{0}$

Equivaut à : $-10\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{AI}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Equivaut à : $-13\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Equivaut à : $3\overrightarrow{IB}=13\overrightarrow{IA}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{IB}=\frac{13}{3}\overrightarrow{IA}$

Donc : $h\left(I,\frac{13}{3}\right)$: l'homothétie h de centre I et de rapport $k=\frac{13}{3}$

Exercice 5 : (***) Soient deux points fixes différents A et B du plan.

Soit f une transformation du plan qui transforme chaque point M en M' tel que :

$\overrightarrow{MM'} - 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Montrer que f est une translation et Trouver son vecteur

Solution : Pour chaque point M du plan nous avons :

$f(M) = M'$ Équivaut à : $\overrightarrow{MM'} - 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'} - 3\overrightarrow{MA} + 2\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right) = \vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'} - 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'} = -2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Équivaut à : $t_{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}(M) = M'$ Cela veut dire que : f est une translation de vecteur $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Exercice 6 : (***) ABC un triangle ; soient les points E et F tels que :

$\overrightarrow{AE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

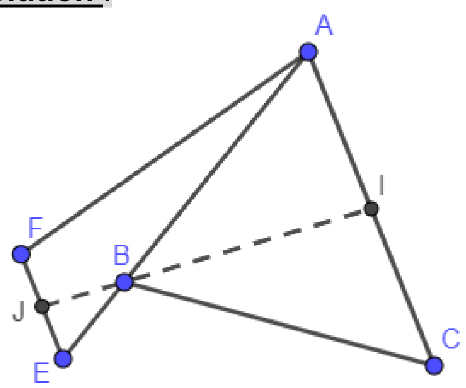
On considère l'homothétie h de centre B et de rapport $k = -\frac{1}{3}$

1) Montrer que $h(A) = E$ et $h(C) = F$

2) Soit I le milieu du segment $[AC]$ et J le milieu du segment $[EF]$

Montrer que : $\overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BI}$

Solution :



1) a) Montrons que $h(A) = E$ c'est-à-dire Montrons que : $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

On a : $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{BE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{BE} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}$

Donc : $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

Par suite : $h(A) = E$

b) Montrons que $h(C) = F$ c'est-à-dire Montrons que : $\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BI}$

On a : $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ donc : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{BF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{BF}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{BF}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{BF}=-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{BF}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

Par suite : $h(C)=F$

2) Soit I le milieu du segment $[AC]$ et J le milieu du segment $[EF]$

Montrons que : $\overrightarrow{BJ}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BI}$ c'est-à-dire Montrons que : $h(I)=J$

On a : $\begin{cases} h(A)=E \\ h(C)=F \end{cases}$ et I le milieu du segment $[AC]$

Et puisque l'homothétie conserve les milieux alors : $h(I)$ est le milieu du segment $[EF]$

Et comme : J le milieu du segment $[EF]$

Alors : $h(I)=J$

Donc : : $\overrightarrow{BJ}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BI}$

Exercice 7: (***) $ABCD$ un parallélogramme et I le point tel que : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

On considère l'homothétie h de centre I et de rapport k tel que : $h(A)=B$

1) Montrer que le rapport k de l'homothétie est $k=-3$

2) Soit E le point d'intersection des droites (AD) et (IC).

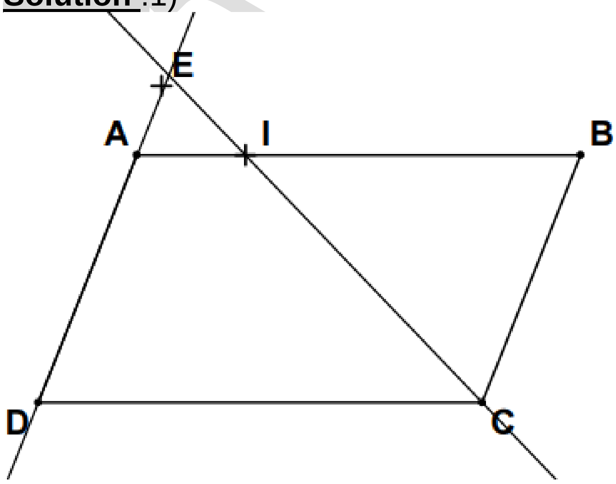
a) Montrer que $h(E)=C$

b) Déduire que : $BC=3AE$

3) On pose : $h(D)=D'$

Montrer que les points B ; C et D' sont alignés.

Solution :1)



1) Montrons que le rapport k de l'homothétie est $k=-3$

On a : $h(A)=B$ signifie que : $\overrightarrow{IB}=k\overrightarrow{IA}$ ①

D'autre part, on a : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ signifie que : $4\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}$

Signifie que : $4\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}$

Signifie que : $4\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$

Signifie que : $3\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$

Signifie que : $\overrightarrow{IB}=-3\overrightarrow{IA}$ ②

De : ① et ② on déduit que : $k=-3$

2) Soit E le point d'intersection des droites (AD) et (IC)

a) Montrons que : $h(E)=C$

On a : $(AD)\cap(IC)=\{E\}$

Donc, il suffit de trouver l'image des droites (AD) et (IC) par l'homothétie h :

On sait que : $I\in(IC)$ donc : $h((IC))=(IC)$

D'autre part, on a : $h(A)=B$, donc l'image de (AD) est la droite qui passe par le point D et parallèle à la droite (AD)

Donc : $h((AD))=(BC)$

On obtient : $(BC)\cap(IC)=\{C\}$: ce qui signifie que : $h(E)=C$

b) Déduisons que : $BC=3AE$

On a $\begin{cases} h(A)=B \\ h(E)=C \end{cases}$ donc d'après la propriété caractéristique de l'homothétie on a : $\overrightarrow{BC}=-3\overrightarrow{AE}$

Par passage à la norme on obtient : $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|-3\overrightarrow{AE}\right\|$

Donc : $BC=|-3|\left\|\overrightarrow{AE}\right\|$

Donc : $BC=2AE$

3) On pose : $h(D)=D'$

Montrons que les points $B\ ;\ C\ \ et\ \ D'$ sont alignés.

On a $\begin{cases} h(A)=B \\ h(E)=C \\ h(D)=D' \end{cases}$ et es points $A\ ;\ E\ \ et\ \ D$ sont aligné car $E\in(AD)$

Et puisque l'homothétie conserve l'alignement alors les points :

Alors : les points $B\ ;\ C\ \ et\ \ D'$ sont aussi alignés.

<u>Exercice 8 :</u> (*) On considère deux points A et B tels que : $AB=3cm$

Et nous considérons la translation $t_{\vec{u}}$ qui transforme respectivement les points : A , B, C et D en A' , B' ; C' et D' et sachant que : $\overrightarrow{CD}=-2\overrightarrow{AB}$

Calculer : $C'D'$

<u>Solution :</u> On a : $\overrightarrow{CD}=-2\overrightarrow{AB}$ et la translation $t_{\vec{u}}$ transforme respectivement les points : A , B, C et D en A' , B' ; C' et D' et puisque : la translation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs Alors : $\overrightarrow{C'D'}=-2\overrightarrow{A'B'}$

Donc : $C'D'=2A'B'$

D'autre part puisque : $t_{\overrightarrow{AB}}(A)=A'$ et $t_{\overrightarrow{AB}}(B)=B'$ alors d'après la propriété caractéristique de la translation on a : $A'B'=AB=3cm$ Par suite : $C'D'=2\times 3cm=6cm$

Exercice 9 : (****) ABC un triangle et I et J sont les milieux des segments $[AC]$ et $[AB]$ respectivement et E un point tel que : $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ et P est le point d'intersection des Droites : (EI) et (AB)

On considère l'homothétie h qui transforme le point E en P

1) a) Monter que : $\frac{EI}{EP}=\frac{EJ}{EB}=\frac{1}{3}$.

b) Monter que : le rapport de l'homothétie h est $k=-2$

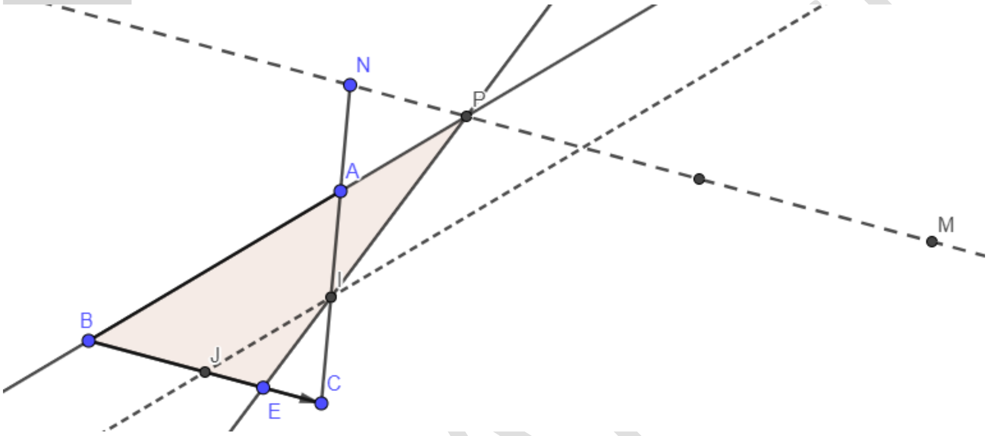
2) On considère le point M tel que : $\overrightarrow{PM}=-2\overrightarrow{EB}$

a) Monter que : l'image du point B par l'homothétie h est le point M

b) Soit N l'image du point C par l'homothétie h

Monter que : $\overrightarrow{MP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$

Solution : 1) a) Montrons que : $\frac{EI}{EP}=\frac{EJ}{EB}=\frac{1}{3}$.



Dans le triangle ABC on a : I et J sont les milieux des segments $[AC]$ et $[AB]$ respectivement

Donc : $(IJ)\parallel(AB)$ et par suite : $(IJ)\parallel(BP)$

D'après le théorème de Thalès dans le triangle BPE on a : $\frac{EI}{EP}=\frac{EJ}{EB}$

On a : $\overrightarrow{EJ}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BJ}=-\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BJ}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ Et on a : $\overrightarrow{EB}=-\overrightarrow{BE}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{EB}=-3\overrightarrow{EJ}$

Par suite : $EB=3EJ$ c'est-à-dire : $\frac{EJ}{EB}=\frac{1}{3}$

Par suite : $\frac{EI}{EP}=\frac{EJ}{EB}=\frac{1}{3}$

b) Montrons que : le rapport de l'homothétie h est $k=-2$

Soit k le rapport de l'homothétie h

On a : $h(E)=P$ signifie que : $\overrightarrow{IP}=k\overrightarrow{IP}$

Mais on a : $\frac{EI}{EP}=\frac{1}{3}$ donc : $EP=3EI$ et puisque $\overrightarrow{EP}$ et $\overrightarrow{EI}$ sont colinéaires et de même sens

Alors : $\overrightarrow{EP}=3\overrightarrow{EI}$

Donc : $\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{IP}=3\overrightarrow{EI}$
Donc : $\overrightarrow{IP}=3\overrightarrow{EI}-\overrightarrow{EI}$
Donc : $\overrightarrow{IP}=2\overrightarrow{EI}$
Donc : $\overrightarrow{IP}=-2\overrightarrow{IE}$ et par suite : $k=-2$
2)a) Montrons que : $h(B)=M$

On a : $\overrightarrow{PM}=-2\overrightarrow{EB}$ signifie que : $\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IP}=-2\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IE}\right)$

Signifie que : $\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IP}=-2\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IE}$
Signifie que : $\overrightarrow{IM}=-2\overrightarrow{IB}$ car $\overrightarrow{IP}=-2\overrightarrow{IE}$
Par suite : $h(B)=M$

2)b) Montrons que : $\overrightarrow{MP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$

On a : $\begin{cases} h(C)=N \\ h(B)=M \end{cases}$ d'après la propriété caractéristique de l'homothétie

Alors : $\overrightarrow{MN}=-2\overrightarrow{BC}$ et puisque : $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{BC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{EB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PM}$

Alors : $\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PM}$

Donc : $\overrightarrow{MN}=-2\frac{2}{3}\overrightarrow{PM}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{MP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$

Exercice 10 : **(******) Soit (C) un cercle de centre I est de rayon $r=2$ et A et B des points fixes du plan. Et soit M un point variable sur le cercle (C) et soit N un point tel que : $AMNB$ est un parallélogramme
Déterminer l'ensemble (E) des points N lorsque M varie dans le cercle (C)

Solution : Déterminons l'ensemble (E) : On a : $AMNB$ est un parallélogramme

Cela signifie que : $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}$
Alors N est l'image de M par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$

Lorsque M varie dans le cercle (C) alors N varie dans l'image du cercle (C) par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$
Par suite : l'ensemble (E) est le cercle de centre $t_{\overrightarrow{AB}}(I)$ est de rayon $r=2$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien