Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°4 : TRIGONOMÉTRIE1

Exercice1 : (*) 1) Donner la mesure en radians de l'angle de mesure 150°.

2) Donner la mesure en degrés de l'angle de mesure $\frac{5\pi}{2}$ rad.

Solution :1) $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\beta}{180}$ signifie que : $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{150}{180}$

$\alpha=150\times\frac{\pi}{180}=\frac{5\pi}{6}$ rad.

2) $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\beta}{180}$ c'est-à-dire : $\alpha\times180=\beta\times\pi$

$\beta=\frac{\alpha\times180}{\pi}=\frac{5\pi}{2}\times\frac{180}{\pi}=450°$

Exercice2 : (*) 1) Déterminer l'abscisse curviligne principale de chacune des abscisses suivantes :

1) 2025π 2) $\frac{19\pi}{6}$ 3) $-\frac{2023\pi}{3}$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points :

$A(0)$; $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$; $C(2025\pi)$; $D\left(\frac{19\pi}{6}\right)$; $E\left(-\frac{2023\pi}{3}\right)$

Solution :

1) $x=2025\pi$ et soit α l'abscisse curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $\alpha-x=2k\pi$ c'est-à-dire : $\alpha=2025\pi+2k\pi$ et $\alpha\in]-\pi;\pi]$

C'est-à-dire : $-\pi<2025\pi+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivalent à : $-\pi-2025\pi<2k\pi\leq\pi-2025\pi$

Équivalent à : $-2026\pi<2k\pi\leq-2024\pi$

Équivalent à : $-2026<2k\leq-2024$

Équivalent à : $-1013<k\leq-1012$ et $k\in\mathbb{Z}$

Alors $k=-1012$ et donc $\alpha=2025\pi+2k\pi=2025\pi+2(-1012)\pi=2025\pi-2024\pi=\pi$

Donc l'abscisses curviligne principale associée a $x=2025\pi$ est $\alpha=\pi$

2) $x=\frac{19\pi}{6}$

Méthode1 : Soit α l'abscisse curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $\alpha-x=2k\pi$ c'est-à-dire : $\alpha=\frac{19\pi}{6}+2k\pi$ et $\alpha\in]-\pi;\pi]$

C'est-à-dire : $-\pi<\frac{19\pi}{6}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$ équivalent à : $-\pi-\frac{19\pi}{6}<2k\pi\leq\pi-\frac{19\pi}{6}$

Équivalent à : $-\frac{25\pi}{6}<2k\pi\leq-\frac{13\pi}{6}$

Équivalent à : $-\frac{25}{6}<2k\leq-\frac{13}{6}$ et $k\in\mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $-\frac{25}{12}<k\leq-\frac{13}{12}$

$-2.08<k\leq-1.08$ et $k\in\mathbb{Z}$

Alors $k=-2$ et donc $\alpha=\frac{110\pi}{3}+2k\pi=\frac{19\pi}{6}+2(-2)\pi=\frac{19\pi-24\pi}{6}=\frac{-5\pi}{6}$

Donc l'abscisse curviligne principale associée à : $x=\frac{19\pi}{6}$ est $\alpha=-\frac{5\pi}{6}$

Méthode2 : On a $\frac{19\pi}{6}=\frac{24\pi-5\pi}{6}=4\pi-\frac{5\pi}{6}=-\frac{5\pi}{6}+2\times 2\pi$ et $-\frac{5\pi}{6}\in]-\pi\,;\pi]$ donc l'abscisse curviligne principale associée a $x=\frac{19\pi}{6}$ est $\alpha=-\frac{5\pi}{6}$

3) $-\frac{2023\pi}{3}$: *Méthode1 :*

Soit α l'abscisse curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $\alpha-x=2k\pi$ c a d $\alpha=-\frac{2023\pi}{3}+2k\pi$ et $\alpha\in]-\pi\,;\pi]$

C'est-à-dire : $-\pi<-\frac{2023\pi}{3}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $-\pi+\frac{2023\pi}{3}<2k\pi\leq\pi+\frac{2023\pi}{3}$

Équivalent à : $\frac{2020\pi}{3}<2k\pi\leq\frac{2026\pi}{3}$ Équivalent à : $\frac{2020}{3}<2k\leq\frac{2026}{3}$

Équivalent à : $\frac{1010}{3}<k\leq\frac{1013}{3}$ et $k\in\mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $336.66<k\leq 337.66$ et $k\in\mathbb{Z}$

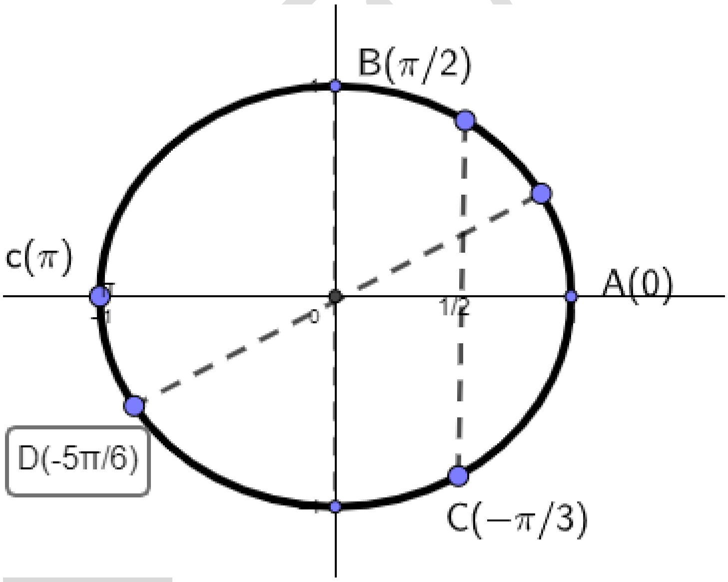
Alors $k=337$ et donc $\alpha=-\frac{131\pi}{3}+2k\pi=-\frac{2023\pi}{3}+2(337)\pi=\frac{-2023+2022\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$

Donc : l'abscisse curviligne principale associée à $-\frac{2023\pi}{3}$ est : $\alpha=-\frac{\pi}{3}$

Méthode2 : On a $\frac{-2023\pi}{3}=\frac{-2022\pi-\pi}{3}=674\pi-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2\times 337\pi$ et $-\frac{\pi}{3}\in]-\pi\,;\pi]$

Donc : l'abscisse curviligne principale associée a $-\frac{2023\pi}{3}$ est : $\alpha=-\frac{\pi}{3}$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points :



Exercice3 : (**) Placer sur un cercle trigonométrique d'origine I Les points d'abscisses curvilignes : $k\frac{\pi}{2}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Solution :1) Pour placer facilement ces points M_k sur le cercle on cherche les abscisses curvilignes principales de ces points $M_k\left(k\frac{\pi}{2}\right)$

$k\frac{\pi}{2} \in \left]-\pi\,;\,\pi\right]$ Équivalent à : $-\pi < k\frac{\pi}{2} \le \pi$

Équivalent à : $-1 < \frac{k}{2} \le 1$

Équivalent à : $-2 < k \le 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Par suite : $k=-1$ ou $k=0$ ou $k=1$ ou $k=2$

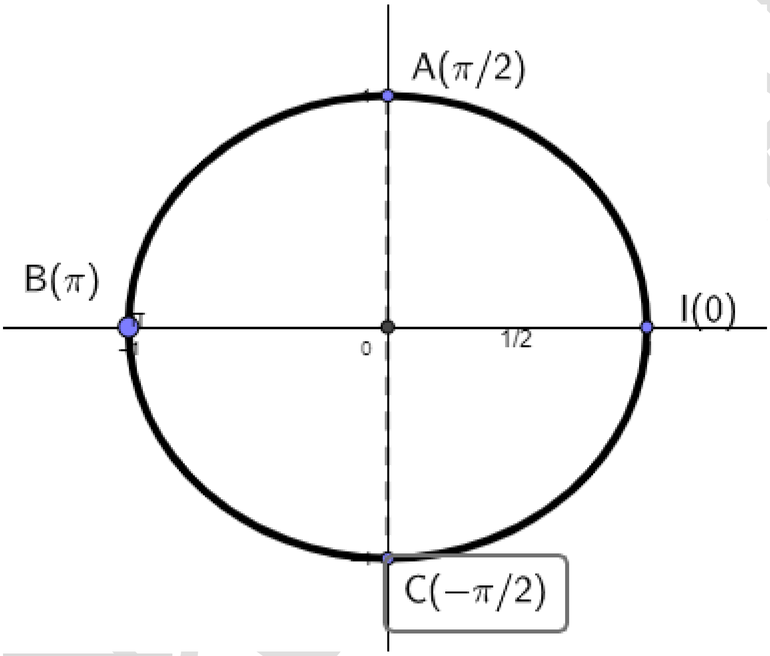
Donc : le nombre de points est 4 :

Si $k=0$ alors : $I\left(\frac{0\times\pi}{2}\right)$ c'est-à-dire : $I(0)$

Si $k=1$ alors : $A\left(\frac{1\times\pi}{2}\right)$ c'est-à-dire : $A\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Si $k=2$ alors : $B\left(\frac{2\times\pi}{2}\right)$ c'est-à-dire : $B(\pi)$

Si $k=-1$ alors : $C\left(-1\frac{\pi}{2}\right)$ c'est-à-dire : $C\left(-\frac{\pi}{2}\right)$



Exercice4 : (**) ABC est un triangle dans le plan tel que $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = \alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Calculer en fonction de α les mesures des angles suivants :

$\left(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AB}\right)$; $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{AC}\right)$; $\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{BA}\right)$; $\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{AB}\right)$

Solution : $\left(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AB}\right) = -\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) + 2k\pi$ Donc : $\left(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AB}\right) = -\alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

On a : d'après la relation de Chasles : $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{AC}\right) = \left(-\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$ et par suite :

$\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{AC}\right) = \pi + \alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

On a d'après la relation de Chasles : $\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{BA}\right)=\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{BA}\right)$

Donc : $\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{BA}\right)=\pi-\alpha+2k\pi+\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ par suite : $\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{BA}\right)=2\pi-\alpha+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

C'est-à-dire : $\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{BA}\right)=-\alpha+2k'\pi$ avec $k'\in\mathbb{Z}$

On a : d'après la relation de Chasles : $\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AB}\right)$

Par suite : $\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{AB}\right)=\pi-\alpha+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Exercice5 : (**) 1) Sachant que : $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{3}$ et $\frac{\pi}{2}<x<\pi$; calculer : $\cos x$ et $\tan x$

2) Sachant que : $-\pi<x<-\frac{\pi}{2}$ et $\tan x=2\sqrt{3}$; calculer : $\cos x$ et $\sin x$

3) Sachant que : $\cos x>\sin x>0$ et ; calculer : $\cos x+\sin x$ et $\cos x-\sin x$

Et en déduire $\cos x$ et $\sin x$

Solution :

• On a $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{3}$ et on a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Donc : $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ c'est à dire : $\cos^2 x=1-\frac{2}{9}$

Donc : $\cos^2 x=\frac{7}{9}$ par suite : $\cos x=\sqrt{\frac{7}{9}}$ ou $\cos x=-\sqrt{\frac{7}{9}}$

Or $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ donc : $\cos x<0$ donc : $\cos x=-\frac{\sqrt{7}}{3}$ et par suite : $\tan x=\frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{-\frac{\sqrt{7}}{3}}=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{14}}{7}$

2) On a : $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ et $\tan x=2\sqrt{3}$

Donc : $\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}$ donc : $\cos^2 x=\frac{1}{1+12}$

Donc : $\cos^2 x=\frac{1}{13}$ donc : $\cos x=\frac{\sqrt{13}}{13}$ ou $\cos x=-\frac{\sqrt{13}}{13}$

Or : $-\pi<x<-\frac{\pi}{2}$ donc $\cos x<0$ par suite : $\cos x=-\frac{\sqrt{13}}{13}$

On a : $\tan x\cdot\cos x=\sin x$ donc : $\sin x=2\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{13}}{13}\right)$ et par suite : $\sin x=-\frac{2\sqrt{39}}{13}$

3) On a : $\cos x>\sin x>0$ et $\cos x\cdot\sin x=\frac{\sqrt{2}}{3}$

Et on a : $(\cos x+\sin x)^2=\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x$

Signifie que : $(\cos x+\sin x)^2=1+\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{3+2\sqrt{2}}{3}=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}$

Signifie que : $\cos x+\sin x=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}$ (1) car $\cos x+\sin x>0$

Et on a : $(\cos x-\sin x)^2=\cos^2 x-2\cos x\sin x+\sin^2 x$

Donc : $(\cos x-\sin x)^2=1-\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{3-2\sqrt{2}}{3}=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}$

Donc : $\cos x-\sin x=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}$ (2) car $\cos x-\sin x>0$

$(1)+(2)$ Donne : $\cos x=\frac{\sqrt{6}}{3}$ et $(1)-(2)$ Donne : $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Exercice6 : (**) 1) Montrer que quelque soient les réels x et y on a :
$\cos^2 x\cos^2 y-\sin^2 x\sin^2 y=\cos^2 x-\sin^2 y$

2) sachant que : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

Calculer : $\cos^2\frac{\pi}{10}\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{10}\sin^2\frac{\pi}{8}$

Solution : 1) $\cos^2 x\cos^2 y-\sin^2 x\sin^2 y$
$=\cos^2 x\left(1-\sin^2 y\right)-\left(1-\cos^2 x\right)\sin^2 y$
$=\cos^2 x-\cos^2 x\sin^2 y-\sin^2 y+\sin^2 y\cos^2 x$
$=\cos^2 x-\sin^2 y$

Donc : $\cos^2 x\cos^2 y-\sin^2 x\sin^2 y=\cos^2 x-\sin^2 y\ (1)$

2) On a : $\cos^2\frac{\pi}{10}\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{10}\sin^2\frac{\pi}{8}=\cos^2\frac{\pi}{10}-\sin^2\frac{\pi}{8}$ d'après l'égalité (1)

Et puisque : $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}$ et $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

Alors : $\cos^2\frac{\pi}{10}\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{10}\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}-\frac{2-\sqrt{2}}{4}=\frac{10+2\sqrt{5}-8+4\sqrt{2}}{16}$

Donc : $\cos^2\frac{\pi}{10}\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{10}\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{8}$

Exercice7 : (**) Simplifier les expressions suivantes : $A=\sin(\pi+x)-\cos(\pi-x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

$B=\sin(6\pi+x)-\cos(3\pi-x)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$

$C=\sin(x-7\pi)-\cos\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)+\sin(x+11\pi)+\cos\left(\frac{-3\pi}{2}-x\right)$

Solution : $A=\sin(\pi+x)-\cos(\pi-x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x+\cos x-\cos x+\sin x=0$

$B=\sin(6\pi+x)-\cos(3\pi-x)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$

$B=\sin(2\times 3\pi+x)-\cos(2\pi+\pi-x)+\sin\left(-\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)-\cos\left(\frac{4\pi-\pi}{2}+x\right)$

$B=\sin(x)+\cos(x)-\cos(x)-\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin(x)-\cos\left(-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$

$B=\sin(x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)-\sin(x)=0$

$C=\sin(x-7\pi)-\cos\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)+\sin(x+11\pi)+\cos\left(\frac{-3\pi}{2}-x\right)$

$C=\sin(x-\pi-6\pi)-\cos\left(\frac{4\pi+\pi}{2}+x\right)+\sin(x+1\pi+10\pi)+\cos\left(\frac{-4\pi+\pi}{2}-x\right)$

$C=\sin(x-\pi)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin(x+\pi)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$C=\sin(-(\pi-x))-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin(x+\pi)+\sin x$

$C=-\sin(\pi-x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin(x+\pi)+\sin x$

$C=-\sin(x)+\sin(x)-\sin(x)+\sin(x)=0$

Exercice8 : (**) Simplifier et calculer les expressions suivantes :

$A=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin(\pi)$

$B=\sin\left(\frac{11\pi}{30}\right)-\sin\left(\frac{19\pi}{30}\right)+\sin\left(\frac{11\pi}{60}\right)-\cos\left(\frac{19\pi}{60}\right)+\cos\left(\frac{11\pi}{60}\right)-\sin\left(\frac{19\pi}{60}\right)$

$C=\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{9\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{11\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{13\pi}{14}\right)$

Solution : $A=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin(\pi)$

$A=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\sin(\pi)$

$A=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+0=2+\sqrt{3}$

Calcul de B : $B=\sin\left(\frac{11\pi}{30}\right)-\sin\left(\frac{19\pi}{30}\right)+\sin\left(\frac{11\pi}{60}\right)-\cos\left(\frac{19\pi}{60}\right)+\cos\left(\frac{11\pi}{60}\right)-\sin\left(\frac{19\pi}{60}\right)$

On a $\sin\left(\frac{19\pi}{60}\right)=\sin\left(\pi-\frac{11\pi}{30}\right)$ et $\cos\left(\frac{19\pi}{60}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{11\pi}{60}\right)$ et $\sin\left(\frac{19\pi}{60}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{11\pi}{60}\right)$

Donc : $\sin\left(\frac{19\pi}{60}\right)=\sin\left(\frac{11\pi}{30}\right)$ et $\cos\left(\frac{19\pi}{60}\right)=\sin\left(\frac{11\pi}{60}\right)$ et $\sin\left(\frac{19\pi}{60}\right)=\cos\left(\frac{11\pi}{60}\right)$

Donc : $B=\sin\left(\frac{11\pi}{30}\right)-\sin\left(\frac{19\pi}{30}\right)+\sin\left(\frac{11\pi}{60}\right)-\cos\left(\frac{19\pi}{60}\right)+\cos\left(\frac{11\pi}{60}\right)-\sin\left(\frac{19\pi}{60}\right)=0$

$C=\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{9\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{11\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{13\pi}{14}\right)$

On a : $\cos\left(\frac{13\pi}{14}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{14}\right)$ et $\cos\left(\frac{11\pi}{14}\right)=\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{14}\right)$ et $\cos\left(\frac{9\pi}{14}\right)=\cos\left(\pi-\frac{5\pi}{14}\right)$

Donc : $\cos\left(\frac{13\pi}{14}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)$ et $\cos\left(\frac{11\pi}{14}\right)=-\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)$ et $\cos\left(\frac{9\pi}{14}\right)=-\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)$

Donc : $C=\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{14}\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)$

Donc : $C=\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{14}\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)$

Donc : $C=\cos\left(\frac{7\pi}{14}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

Exercice9 : (***) Sachant que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$

1) Montrer que : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

2) Calculer la valeur de : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

3) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

Solution :1) On a : $1+\tan^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{8}}$ donc : $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{1+\tan^2\frac{\pi}{8}}=\frac{1}{1+\left(\sqrt{2}-1\right)^2}$

C'est-à-dire : $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{1+2-2\sqrt{2}+1}=\frac{1}{4-2\sqrt{2}}=\frac{4+2\sqrt{2}}{\left(4-2\sqrt{2}\right)\left(4+2\sqrt{2}\right)}=\frac{4+2\sqrt{2}}{4^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}$

Alors : $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{4+2\sqrt{2}}{8}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

Donc : $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ou $\cos\frac{\pi}{8}=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Et puisque : $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$ alors $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)>0$ donc : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

2) Calculons la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$:

On a : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\times\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Donc : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\times\left(\sqrt{2}-1\right)=\frac{\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2}-1}\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}}{2}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

3) Déduction des valeurs exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$:

$$\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{8\pi-\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{8\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{4\pi-\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Exercice10 : (**) Soit x un réel ; On pose : $B=8\left(\cos^6 x+\sin^6 x\right)-12\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)$

1) Montrer que : si $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$ alors : $x^3+y^3=\left(x+y\right)^3-3xy\left(x+y\right)$ et que : $x^2+y^2=\left(x+y\right)^2-2xy$

2) En déduire que : $B=-4$

Solution :1) $\left(x+y\right)^3-3xy\left(x+y\right)=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3-3x^2y-3xy^2$

Donc : $\left(x+y\right)^3-3xy\left(x+y\right)=x^3+y^3$

Et on a : $\left(x+y\right)^2-2xy=x^2+2xy+y^2-2xy=x^2+y^2$

2) Déduction : $B=8\left(\cos^6 x+\sin^6 x\right)-12\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)$

$$B=8\left(\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^3-3\cos^2 x\times\sin^2 x\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\right)-12\left(\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2-2\cos^2 x\sin^2 x\right)$$

$B=8\left(1-3\cos^2 x\times\sin^2 x\right)-12\left(1-2\cos^2 x\sin^2 x\right)$

$B=8-24\cos^2 x\times\sin^2 x-12+24\cos^2 x\sin^2 x=-4$

Exercice11 : (***) Soit x un réel tel que $\cos x\neq 0$

Montrer les égalités suivantes :1) $\tan^2 x-\sin^2 x=\tan^2 x\times\sin^2 x$ 2) $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+\tan^2 x}$

3) $\sin^2 x=\dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ 4) $\dfrac{\sin^2 x-\sin^4 x}{\cos^2 x-\cos^4 x}=1$ 5) $\dfrac{\cos^3 x-\sin^3 x}{\cos x-\sin x}+\dfrac{\cos^3 x+\sin^3 x}{\cos x+\sin x}=2$

6) $(1+\sin x+\cos x)^2=2(1+\sin x)(1+\cos x)$

Solution :1) On a : $\sin x=\tan x\times\cos x$

Donc : $\tan^2 x-\sin^2 x=\tan^2 x-\cos^2 x\tan^2 x$

$\tan^2 x-\sin^2 x=\tan^2 x\left(1-\cos^2 x\right)$ or $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ donc : $1-\cos^2 x=\sin^2 x$

Par suite : $\tan^2 x-\sin^2 x=\tan^2 x\times\sin^2 x$

2) $1+\tan^2 x=1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

Donc : $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ par suite : $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+\tan^2 x}$

3) On a : $\sin x=\tan x\times\cos x$ donc : $\sin^2 x=\tan^2 x\times\cos^2 x=\tan^2 x\times\dfrac{1}{1+\tan^2 x}$

Donc : $\sin^2 x=\tan^2 x\times\cos^2 x=\dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$.

4) $\dfrac{\sin^2 x-\sin^4 x}{\cos^2 x-\cos^4 x}=\dfrac{\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)}{\cos^2 x\left(1-\cos^2 x\right)}=\dfrac{\sin^2 x\times\left(1-\sin^2 x\right)}{\cos^2 x\left(1-\cos^2 x\right)}$

Or on a : $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ donc : $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ et $\sin^2 x=1-\cos^2 x$

Donc : $\dfrac{\sin^2 x-\sin^4 x}{\cos^2 x-\cos^4 x}=\dfrac{\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)}{\cos^2 x\left(1-\cos^2 x\right)}=\dfrac{\sin^2 x\times\cos^2 x}{\cos^2 x\times\sin^2 x}=1$

5) $\dfrac{\cos^3 x-\sin^3 x}{\cos x-\sin x}+\dfrac{\cos^3 x+\sin^3 x}{\cos x+\sin x}=\dfrac{(\cos x-\sin x)\left(\cos^2 x+\cos x\sin x+\sin^2 x\right)}{\cos x-\sin x}+\dfrac{(\cos x+\sin x)\left(\cos^2 x-\cos x\sin x+\sin^2 x\right)}{\cos x+\sin x}$

Car : $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$ et $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$

Donc : $\dfrac{\cos^3 x-\sin^3 x}{\cos x-\sin x}+\dfrac{\cos^3 x+\sin^3 x}{\cos x+\sin x}=\cos^2 x+\cos x\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x-\cos x\sin x+\sin^2 x$

$=2\sin^2 x+2\cos^2 x=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=2\times1=2$

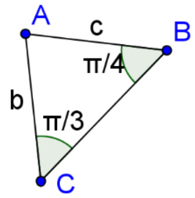
6) Montrons que : $(1+\sin x+\cos x)^2=2(1+\sin x)(1+\cos x)$

$$
\begin{aligned}
(1+\sin x+\cos x)^2 &=1+\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x+2\cos x+2\cos x\sin x\\
&=1+1+2\sin x+2\cos x+2\cos x\sin x\\
&=2(1+\sin x+\cos x+\cos x\sin x)\\
&=2\left((1+\sin x)+\cos x(1+\sin x)\right)\\
&=2(1+\sin x)(1+\cos x)
\end{aligned}
$$

Exercice12 : (**) Soit ABC un triangle tel que : $ACB=\frac{\pi}{3}$ et $ABC=\frac{\pi}{4}$ et $BC=2\left(\sqrt{3}+1\right)cm$

Montrer que la surface du triangle ABC est $S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\sin\frac{7\pi}{12}}cm^2$

Solution : D'après la loi des sinus dans le triangle ABC on a :



$$\frac{b}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sin\left(\pi-\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right)}=\frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sin\frac{7\pi}{12}}$$

Donc : $b=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sin\frac{7\pi}{12}}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sin\frac{7\pi}{12}}$

La surface du triangle ABC est : $S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\times BC\sin C=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sin\frac{7\pi}{12}}\times\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)\sin\frac{\pi}{3}$

Donc : $S_{ABC}=\left(\sqrt{3}+1\right)^2\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{7\pi}{12}}=\left(\sqrt{3}+1\right)^2\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin\frac{7\pi}{12}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\sin\frac{7\pi}{12}}cm^2$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien