Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°4 : TRIGONOMÉTRIE2

Partie 2 : Equations et inéquations trigonométriques

Exercice 1 : (*) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $\cos x = -\frac{1}{2}$

2) En déduire les solutions dans $]-\pi,\pi]$ de l'équation : $\cos x = -\frac{1}{2}$

Solution : 1) $\cos x = -\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos x = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Donc : $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) Résolution dans $]-\pi,\pi]$ de l'équation

Méthode1 : (l'encadrement)

a) Encadrement de $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$: $-\pi < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \le \pi$

Donc : $-1 < \frac{2}{3} + 2k \le 1$ c'est-à-dire : $-1 - \frac{2}{3} < 2k \le 1 - \frac{2}{3}$

Donc : $-\frac{5}{3} < 2k \le \frac{1}{3}$ c'est-à-dire : $-\frac{5}{6} < k \le \frac{1}{6}$

Donc $-0{,}8... \le k \le 0{,}16...$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ on remplace on trouve : $x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2\times 0 \times \pi = \frac{2\pi}{3}$

b) Encadrement de $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$: $-\pi < -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \le \pi$

Donc : $-1 < -\frac{2}{3} + 2k \le 1$ c'est-à-dire : $-1 + \frac{2}{3} < 2k \le 1 + \frac{2}{3}$

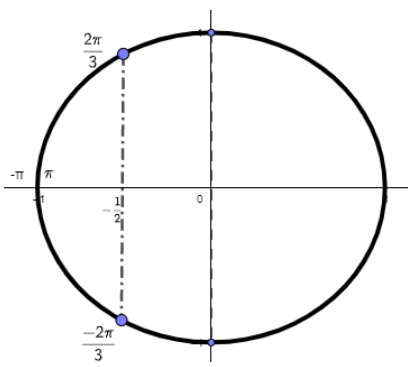
Donc : $-\frac{1}{3} < 2k \le \frac{5}{3}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{6} < k \le \frac{5}{6}$

Donc $-0{,}... \le k \le 0{,}...$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ on remplace on trouve : $x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2\times 0 \times \pi = -\frac{2\pi}{3}$

Donc $S_{]-\pi,\pi]} = \left\{-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}$

Méthode2 : (utilisation du cercle trigo)



Donc $S_{]-\pi,\pi]} = \left\{-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}$

Exercice 2 : (*) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) En déduire les solutions dans $]-\pi,\pi]$de l'équation : $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution :1) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\sin x = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ Équivaut à : $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Donc : $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) Résolution dans $]-\pi,\pi]$ de l'équation

Méthode1 : (l'encadrement)

a) Encadrement de $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$: $-\pi < -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$ Équivaut à : $-\pi + \frac{\pi}{4} < 2k\pi \leq \pi + \frac{\pi}{4}$

Équivaut à : $-\frac{3\pi}{4} < 2k\pi \leq \frac{5\pi}{4}$ Équivaut à : $-\frac{3}{4} \leq 2k \leq \frac{5}{4}$ Équivaut à : $-\frac{3}{8} \leq k \leq \frac{5}{8}$

C'est-à-dire : $-0,37... \leq k \leq 0,62...$ et $k \in \mathbb{Z}$ Donc $k = 0$

Pour $k = 0$ on remplace on trouve $x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2 \times 0 \times \pi = -\frac{\pi}{4}$

b) Encadrement de $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$: $-\pi < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$

Donc : $-1 < \frac{5}{4} + 2k \leq 1$ c'est-à-dire : $-1 - \frac{5}{4} < 2k \leq 1 - \frac{5}{4}$

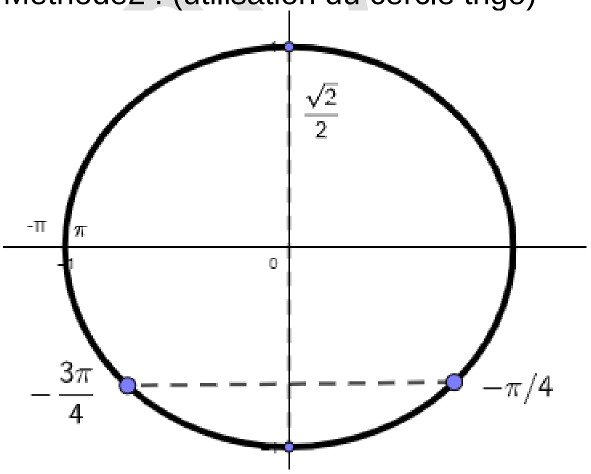
Donc : $-\frac{9}{4} < 2k \leq -\frac{1}{4}$ c'est-à-dire : $-\frac{9}{8} < k \leq -\frac{1}{8}$

Donc $-1,1... \leq k \leq -0,12...$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = -1$ on remplace on trouve : $x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2 \times (-1) \times \pi = \frac{5\pi}{4} - 2\pi = -\frac{3\pi}{4}$

Donc $S_{]-\pi,\pi]} = \left\{-\frac{\pi}{4} ; -\frac{3\pi}{4}\right\}$

Méthode2 : (utilisation du cercle trigo)



Donc $S_{]-\pi,\pi]} = \left\{-\frac{\pi}{4} ; -\frac{3\pi}{4}\right\}$

Exercice 3 : (*) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Solution : $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ Équivaut à : $\tan x = -\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $\tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc : les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercice 4 : (**) Résoudre dans $[0, 4\pi]$ l'équation suivantes : $2\cos 2x - 1 = 0$

Solution : $2\cos 2x - 1 = 0$ Équivaut à : $2\cos 2x = 1$

Équivaut à : $\cos 2x = \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$

Équivaut à : $2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$

Résolution dans $[0, 4\pi]$ de l'équation (l'encadrement)

a) Encadrement de : $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$: $0 \leq \frac{\pi}{6} + k\pi \leq 4\pi$ Équivaut à : $0 \leq \frac{1}{6} + k \leq 4$ car $\pi > 0$

Équivaut à : $-\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{23}{6}$ C'est-à-dire : $-0{,}166... \leq k \leq 3{,}833...$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ ou $k = 1$ ou $k = 2$ ou $k = 3$

Pour $k = 0$ on remplace on trouve $x_1 = \frac{\pi}{6} + 0 \times \pi = \frac{\pi}{6}$

Pour $k = 1$ on remplace on trouve $x_2 = \frac{\pi}{6} + 1 \times \pi = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$

Pour $k = 2$ on remplace on trouve $x_3 = \frac{\pi}{6} + 2 \times \pi = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$

Pour $k = 3$ on remplace on trouve $x_4 = \frac{\pi}{6} + 3 \times \pi = \frac{\pi}{6} + 3\pi = \frac{19\pi}{6}$

b) Encadrement de : $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$: $0 \leq -\frac{\pi}{6} + k\pi \leq 4\pi$ Équivaut à : $0 \leq -\frac{1}{6} + k \leq 4$ car $\pi > 0$

Équivaut à : $\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{25}{6}$ C'est-à-dire : $-0{,}166... \leq k \leq 3{,}833...$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $k = 1$ ou $k = 2$ ou $k = 3$ ou $k = 4$

Pour $k = 1$ on remplace on trouve $x_5 = -\frac{\pi}{6} + 1 \times \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$

Pour $k = 2$ on remplace on trouve $x_6 = -\frac{\pi}{6} + 2 \times \pi = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$

Pour $k = 3$ on remplace on trouve $x_7 = -\frac{\pi}{6} + 3 \times \pi = -\frac{\pi}{6} + 3\pi = \frac{17\pi}{6}$

Pour $k = 4$ on remplace on trouve $x_8 = -\frac{\pi}{6} + 4 \times \pi = -\frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{23\pi}{6}$

Donc $S_{[0,4\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}; \frac{19\pi}{6}; \frac{23\pi}{6}\right\}$

Exercice 5 : (*) (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **2)** $\sin(2x)=\cos(3x)$ **3)** $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\sqrt{3}$

Solution : 1) on a : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $2x=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $2x=-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $2x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $2x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{12}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) on a : $\sin(2x)=\cos(3x)$ équivaut à : $\sin(2x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$

Équivaut à : $2x=\frac{\pi}{2}-3x+2k\pi$ ou $2x=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $5x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $-x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}$ ou $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5} / k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

3) on a : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\sqrt{3}$ équivaut à : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Équivaut à : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$ équivaut à : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Équivaut à : $\frac{\pi}{4}-x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$

Équivaut à : $-x=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+k\pi$ cad $x=\frac{7\pi}{12}+k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{7\pi}{12}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice6 : (***)1) résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $2\cos^2 x-3\sqrt{3}\cos x+3=0$ (E_1) 2) $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$ (E_2)

3) $\sqrt{3}\tan^2 x+\left(\sqrt{3}-1\right)\tan x-1=0$ (E_3)

Solution :1) $2\cos^2 x-3\sqrt{3}\cos x+3=0$ (E_1)

On utilise un changement de variable : on pose $t=\cos x$

L'équation (E_1) devienne : $2t^2-3\sqrt{3}t+3=0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2-3\sqrt{3}t+3$:

Calcul du discriminant réduit : $\Delta=\left(-3\sqrt{3}\right)^2-4\times 2\times 3=3$

Les racines sont : $t_1=\frac{-\left(-3\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}}{4}=\frac{4\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$ et $t_2=\frac{-\left(-3\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc : $\cos x=\sqrt{3}$ et $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ mais l'équation n'a pas de solution car $\sqrt{3}\succ 1$

Donc : $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) $2\sin^2 x-3\sin x+1=0\quad (E_2)$

On utilise un changement de variable : on pose $t=\sin x$

L'équation (E_2) devienne : $2t^2-3t+1=0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2-3t+1$:

Calcul du discriminant réduit : $\Delta=(-3)^2-4\times2\times1=1$

Les racines sont : $t_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{4}=\frac{4}{4}=1$ et $t_2=\frac{-(-3)-\sqrt{1}}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ donc : $\sin x=1$ et $\sin x=\frac{1}{2}$

Donc : : $\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

3) $\sqrt{3}\tan^2 x+\left(\sqrt{3}-1\right)\tan x-1=0\quad (E_3)$

On utilise un changement de variable : on pose $t=\tan x$

L'équation (E_2) devienne : $\sqrt{3}\,t^2+\left(\sqrt{3}-1\right)t-1=0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2-3t+1$:

Calcul du discriminant réduit : $\Delta=\left(-\left(\sqrt{3}-1\right)\right)^2-4\times\sqrt{3}\times(-1)=4+2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$

Les racines sont : $t_1=\frac{-\sqrt{3}+1+\left|\sqrt{3}+1\right|}{2\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ et

$t_2=\frac{\sqrt{3}-1-\left|\sqrt{3}+1\right|}{2\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}+1-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=-1$ donc : $\tan x=-1$ et $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Donc : $\tan x=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ et $\tan x=\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ ou $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

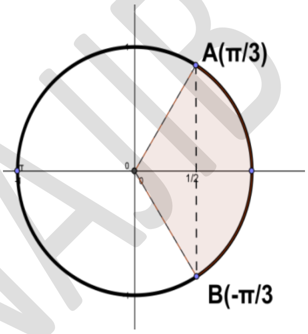
Exercice7 : (**) Résoudre dans $[-2\pi;2\pi]$ l'inéquation suivante : $\cos x > \frac{1}{2}$

Solution : La démarche : on commence par résoudre l'inéquation sur une période soit par exemple dans $[-\pi;\pi]$ Puis on énonce l'ensemble des solutions en effectuant des translations d'un nombre entier de périodes.

On commence par résoudre l'inéquation sur $[-\pi;\pi]$

L'équation : $\cos x = \frac{1}{2}$ a pour solution : $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = -\frac{\pi}{3}$ dans l'intervalle : $[-\pi;\pi]$

L'inéquation a donc pour solution $S_1 = \left]-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right[$ dans $[-\pi;\pi]$:



L'ensemble des solutions dans $[-2\pi;2\pi]$ est la réunion de tous les intervalles de la forme : $\left]-\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{\pi}{3}+2k\pi\right[$

Sur l'intervalle : $\left[-\frac{\pi}{3}-2\pi;\frac{\pi}{3}+2\pi\right]$ l'ensemble des solutions est :

$$S_2 = \left]-\frac{\pi}{3}-2\pi;\frac{\pi}{3}-2\pi\right[\cup \left]-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{3}+2\pi;\frac{\pi}{3}+2\pi\right[$$

Finalement l'ensemble des solutions dans $[-2\pi;2\pi]$ est donc :

$$S = \left[-2\pi;\frac{\pi}{3}-2\pi\right[\cup \left]-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{3}+2\pi;2\pi\right]$$

Exercice8 : (**) Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation suivante : $\sin x > -\frac{1}{2}$

Solution : $\sin x = -\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x = \pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6}+2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

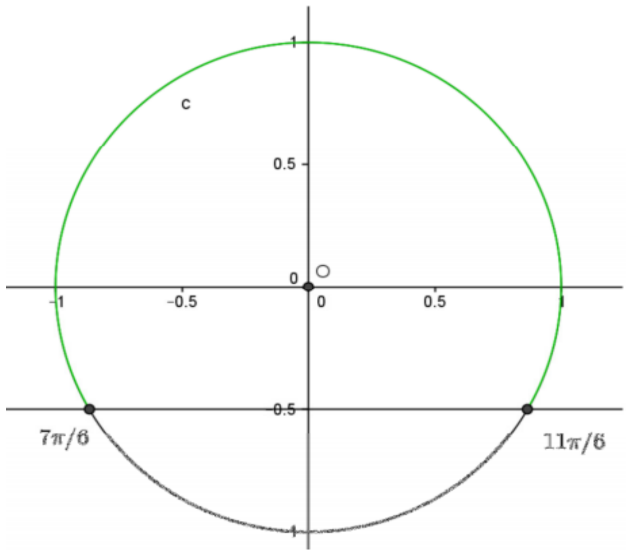
Et puisque : $x \in [0;2\pi]$ alors : $x = -\frac{\pi}{6}+2\pi = \frac{11\pi}{6}$ ou $x = \frac{7\pi}{6}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\sin x$ et $-\frac{1}{2}$ dans $[0;2\pi]$

On trouve que :

$\sin x > -\frac{1}{2}$ Équivaut à : $x \in \left[0;\frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6};2\pi\right[$

Donc : $S = \left[0;\frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6};2\pi\right[$

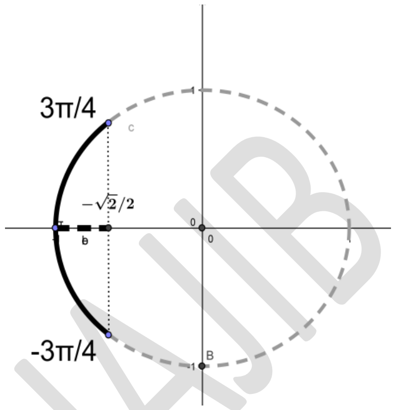


Exercice9 : (**) Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'inéquation suivante : $\cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : $\cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\cos x=-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$

Équivaut à : $x=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=-\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Et puisque : $x\in\left]-\pi;\pi\right]$ alors : $x=\dfrac{3\pi}{4}$ ou $x=-\dfrac{3\pi}{4}$



$\cos x\le\dfrac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos x\le\cos\dfrac{\pi}{3}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\cos x$ et $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Dans : $\left]-\pi;\pi\right]$

On trouve que : $S=\left]-\pi;-\dfrac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{3\pi}{4};\pi\right]$

Exercice10 : (***) Résoudre dans $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation suivante : $\cos 2x\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : 1iér étape : On pose : $X=2x$

$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ Équivaut à : $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ Équivaut à : $-\pi\le 2x\le\pi$

Équivaut à : $-\pi\le X\le\pi$

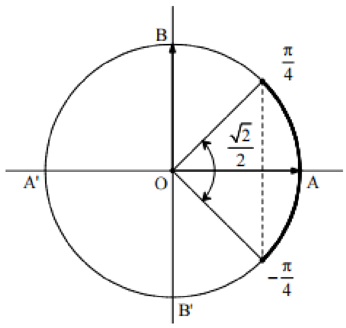
$\cos X=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\cos X=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

Équivaut à : $X=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $X=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Et puisque : $X\in\left]-\pi;\pi\right]$ alors : $X=-\dfrac{\pi}{4}$ ou $X=\dfrac{\pi}{4}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\cos X$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dans $\left]-\pi;\pi\right]$:

$\begin{cases}\cos X\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ -\pi\le X\le\pi\end{cases}$ Équivaut à : $X\in\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$



2iém étape : Or : $X=2x$

$X\in\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$ Équivaut à : $-\dfrac{\pi}{4}\le X\le\dfrac{\pi}{4}$ Équivaut à : $-\dfrac{\pi}{4}\le 2x\le\dfrac{\pi}{4}$

Équivaut à : $-\dfrac{\pi}{8}\le x\le\dfrac{\pi}{8}$

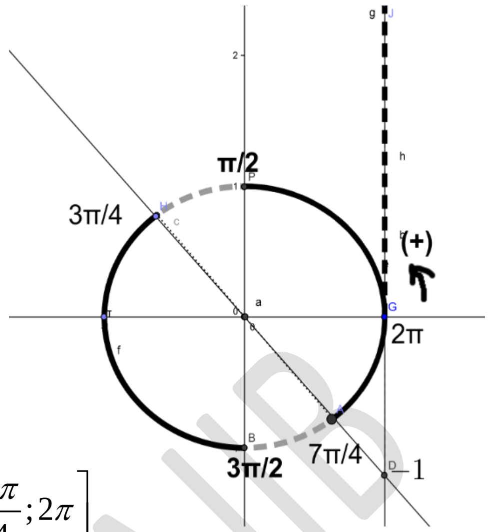
Donc : $S=\left[-\dfrac{\pi}{8};\dfrac{\pi}{8}\right]$

Exercice11 : (**) Résoudre dans $\left[0;2\pi\right]$ l'inéquation suivante : $\tan x>-1$

Solution :

- L'inéquation $\tan x>-1$ est définie si et seulement si : $x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in [0;2\pi]$ alors : $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $x \neq \frac{3\pi}{2}$



- Résolution de l'équation : $\tan x = -1$

$\tan x = -1$ Équivaut à : $\tan x = -\tan\frac{\pi}{4} = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in [0;2\pi]$ alors : $x = \frac{7\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$

En utilisant le cercle trigonométrique

On compare $\tan x$ et -1 dans $[0;2\pi]$

On trouve que : $\tan x > -1$ Équivaut à : $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$

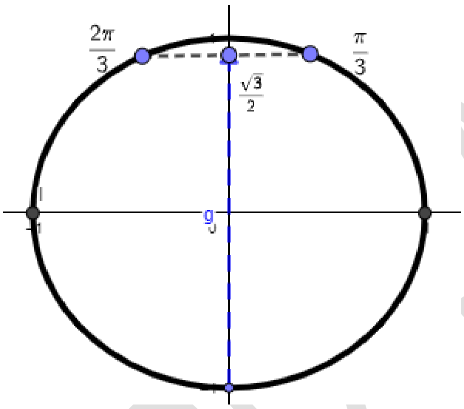
Donc : $S = \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$

Exercice12 : (***) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'inéquation suivante : (I) : $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution : Soit : $x \in [0;\pi]$ donc : $2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right]$

$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ Signifie que : $-\frac{\pi}{3} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \pi$ ou $\frac{2\pi}{3} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{3}$

Signifie que : $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$



Donc : $S = \left[0;\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

Exercice13 : (***) On pose : $E(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right)$ avec $x \in \mathbb{R}$

1) Calculer : $E(0)$ et $E(\pi)$

2) Montrer que : $E(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E) : $E(x) = -\sqrt{2}$

4) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'inéquation : (I) : $E(x) \leq -\sqrt{2}$

Solution : 1) $E(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right)$

1) Calcul de : $E(0)$ et $E(\pi)$

$$E(0)=\sin\left(2\times 0+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2\times 0+\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$E(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

$$E(\pi)=\sin\left(2\times\pi+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2\times\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$$

Car $\sin(2\pi+x)=\sin x$ et $\cos(2\pi+x)=\cos x$

2) Démontrons que : $E(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$?

$$E(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)$$

Donc : $E(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\left(-\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

3) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $E(x)=-\sqrt{2}$

$E(x)=-\sqrt{2}$ Équivaut à : $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$ c à d : $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Équivaut à : $2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $2x+\frac{\pi}{4}=\pi-\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi$ c'est à dire : $2x=\pi+2k\pi$

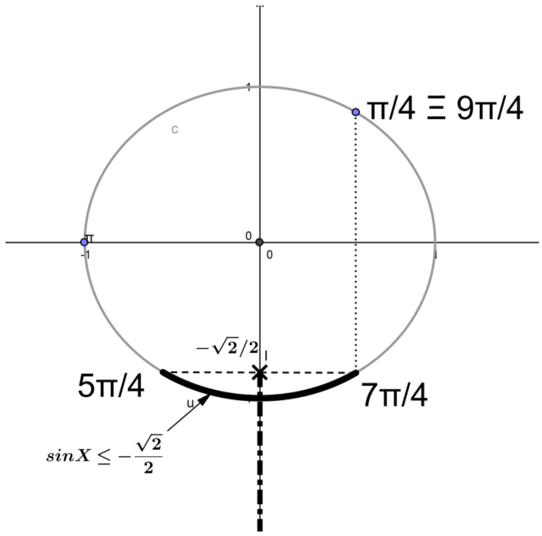
Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ ou $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

Par conséquent : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

4) Résolution dans $[0;\pi]$ de l'inéquation : $E(x)\leq-\sqrt{2}$

$E(x)\leq-\sqrt{2}$ Équivaut à : $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\leq-\sqrt{2}$

Équivaut à : $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\leq-\frac{\sqrt{2}}{2}$



On pose : $2x+\frac{\pi}{4}=X$

On a : $0\leq x\leq\pi$ donc : $0\leq 2x\leq 2\pi$

Donc : $\frac{\pi}{4}\leq 2x+\frac{\pi}{4}\leq 2\pi+\frac{\pi}{4}$ c à d : $\frac{\pi}{4}\leq 2x+\frac{\pi}{4}\leq\frac{9\pi}{4}$

Donc : $\frac{\pi}{4}\leq X\leq\frac{9\pi}{4}$ et par suite la résolution de l'inéquation (I) dans l'intervalle : $[0;\pi]$

Se ramène à la résolution de l'inéquation : $\sin X\leq-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Dans l'intervalle : $\left[\frac{\pi}{4},\frac{9\pi}{4}\right]$ (voir figure)

$\sin X\leq-\frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\frac{5\pi}{4}\leq X\leq\frac{7\pi}{4}$

C'est-à-dire : : $\frac{5\pi}{4} \le 2x + \frac{\pi}{4} \le \frac{7\pi}{4}$ Équivaut à : $\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \le 2x \le \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$ d'où : $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{4}$

Par conséquent : $S_{[0\,;\,\pi]} = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$

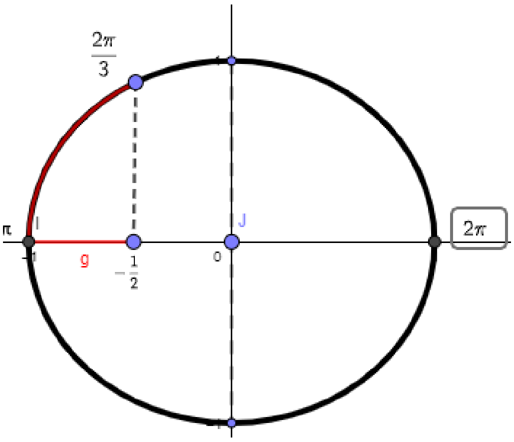
Exercice14 : (***)

Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ l'inéquation suivante : (I) : $\cos\left(\frac{x}{2}\right) \le -\frac{1}{2}$

Solution :

Soit : $x \in [0\,;2\pi]$ donc : $\frac{x}{2} \in [0\,;\pi]$

$\cos\left(\frac{x}{2}\right) \le -\frac{1}{2}$ Signifie que : $\frac{2\pi}{3} \le \frac{x}{2} \le \pi$ Signifie que : $\frac{4\pi}{3} \le x \le 2\pi$



Donc : $S = \left[\frac{4\pi}{3}; 2\pi\right]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien