Tronc commun Sciences BIOF

# Correction Série N°5 : FONCTIONS - *Généralités*

**Exercice 1 :** (*) (**) (***) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{7x-3}{2x^2-3x+\dfrac{9}{8}}$ 2) $f(x)=\dfrac{x^2}{4x^2+2\left(\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}}$ 3) $f(x)=\dfrac{-2\sqrt{3-4x}+6}{2x^2-3x+1}$

4) $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{1-3x}}{2|x-1|-|x+5|}$ 5) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+8}{x+1}}$ 6) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-x-5}{x+2}}$

7) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x(2x-1)}}$ 8) $f(x)=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{2x}$

**Solution :** 1) $f(x)=\dfrac{7x-3}{2x^2-3x+\dfrac{9}{8}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,2x^2-3x+\dfrac{9}{8}\neq 0\right\}$

Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-3x+\dfrac{9}{8}=0$ : a = 2, b = -3 et c = $\dfrac{9}{8}$

Donc :$\Delta = b^2-4ac = (-3)^2-4 \times 2 \times \dfrac{9}{8} = 0$.

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une seule solution (dite double): $x_0=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-3}{2\times 2}=\dfrac{3}{4}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$

2) $f(x)=\dfrac{x^2}{4x^2+2\left(\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,4x^2+2\left(\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}\neq 0\right\}$

$4x^2+2\left(\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}=0$ Signifie que : $x^2+\dfrac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{4}x-\dfrac{\sqrt{2}}{4}=0$

Signifie que : $x^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)x-\dfrac{\sqrt{2}}{4}=0$ c'est-à-dire : $x^2-\left(\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)x+\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$

C'est-à-dire : $x_1=\dfrac{1}{2}$ et $x_2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ par suite : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{1}{2}\right\}$

3) $f(x)=\dfrac{-2\sqrt{3-4x}+6}{2x^2-3x+1}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,2x^2-3x+1\neq 0 \;\; et \;\; 3-4x\geq 0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,2x^2-3x+1\neq 0 \;\; et \;\; x\leq\dfrac{3}{4}\right\}$

$2x^2-3x+1=0$ : Calculons le discriminant : a = 2, b = -3 et c = 1 donc : $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times1=9-8=1>0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times 2} = \frac{3+1}{4} = 1$ et $x_2 = \frac{5+\sqrt{9}}{2a} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq \frac{1}{2} \;\; et \;\; x \neq 1 \;\; et \;\; x \leq \frac{3}{4} \right\}$$

$$D_f = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[ \cup \left]\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$$

4) $f(x) = \frac{x-\sqrt{1-3x}}{2|x-1|-|x+5|}$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, 2|x-1|-|x+5| \neq 0 \;\; et \; 1-3x \geq 0 \right\}$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, 2|x-1|-|x+5| \neq 0 \;\; et \; -3x \geq -1 \right\}$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, 2|x-1|-|x+5| \neq 0 \;\; et \;\; x \leq \frac{1}{2} \right\}$$

$2|x-1| = |x+5|$ Signifie que : $|2x-2| = |x+5|$

**Règle :** L'égalité $|a| = |b|$ est équivalente à : $a = b$ ou $a = -b$

Signifie que : $2x-2 = x+5$ ou $2x-2 = -(x+5)$

Signifie que : $x = 7$ ou $2x-2 = -x-5$

Signifie que : $x = 7$ ou $3x = -3$

Signifie que : $x = 7$ ou $x = -1$

Donc : $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq -1 \;\; et \;\; x \neq 7 \;\; et \;\; x \leq \frac{1}{2} \right\}$

Donc : $D_f = ]-\infty; -1[ \cup \left]-1; \frac{1}{2}\right]$

5) $f(x) = \sqrt{\frac{2x+8}{x+1}}$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x+1 \neq 0 \;\; et \;\; \frac{2x+8}{x+1} \geq 0 \right\}$$

$x+1 = 0$ Équivalent à : $x = -1$ et $2x+8 = 0$ Équivalent à : $x = -4$

On a le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $-4$ | | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x+8$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\frac{2x+8}{x+1}$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ |

Donc : $D_f = ]-\infty; -4] \cup ]-1; +\infty[$

6) $f(x) = \sqrt{\frac{-x-5}{x+2}}$ : $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x+2 \neq 0 \;\; et \;\; \frac{-x-5}{x+2} \geq 0 \right\}$

$-x-5 = 0$ Équivaut à : $x = -5$ et $x+2 = 0$ qui signifie que : $x = -2$

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x-5$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $x+2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\dfrac{-x-5}{x+2}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | |

Donc : $D_f = [-5,-2[$

7) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x(2x-1)}}$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x(2x-1) \neq 0 \quad et \quad \frac{x-1}{x(2x-1)} \geq 0 \right\}$$

$x-1=0$ Équivaut à : $x=1$ et $2x-1=0$ qui signifie que : $x=\dfrac{1}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $2x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\dfrac{x-1}{x(2x-1)}$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Donc : $S = \left]0;\dfrac{1}{2}\right[ \cup [1;+\infty[$

8) $f(x) = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{2x}$

$D_f = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x^2-4 \geq 0 \quad et \quad 2x \geq 0 \}$

$D_f = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x^2-4 \geq 0 \quad et \quad x \geq 0 \}$

$D_f = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, (x-2)(x+2) \geq 0 \quad et \quad x \geq 0 \}$

$D_f = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x-2 \geq 0 \quad et \quad x \geq 0 \}$

$D_f = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 2 \quad et \quad x \geq 0 \}$

$D_f = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 2 \} = [2.+\infty[$

**Exercice 2 :** (*) (**) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^3}{|x+2|-|x-2|}$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Etudier la parité de la fonction f
3) Donner une interprétation graphique

PROF: ATMANI NAJIB

**Solution :**1) $f(x)=\frac{x^3}{|x+2|-|x-2|}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/|x+2|-|x-2|\neq 0\}$

$|x+2|-|x-2|=0$ Signifie $|x+2|=|x-2|$ C'est-à-dire : $x+2=x-2$ ou $x+2=-(x-2)$

Signifie $2=-2$ ou $2x=0$

C'est-à-dire : $2=-2$ (pas de solution) ou $x=0$

Signifie : $x=0$ Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

2)Etude de la parité de la fonction f

☞Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$ alors $-x\in\mathbb{R}^*$

☞ $f(-x)=\frac{(-x)^3}{|-x+2|-|-x-2|}=\frac{-x^3}{|-(x-2)|-|-(x+2)|}=\frac{-x^3}{|x-2|-|x+2|}$ Car $|-x|=|x|$

$f(-x)=\frac{-x^3}{-(-|x-2|+|x+2|)}=\frac{x^3}{-|x-2|+|x+2|}=\frac{x^3}{|x+2|-|x-2|}$

Donc : $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire,

3)Interprétation graphique : l'axe des ordonnées est un axe symétrie de la courbe représentative

**Exercice 3 :** (*) (**) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}$

1) Déterminer $D_f$

2) Démontrer que : $f(x)\geq 1$ si $x\in\mathbb{R}$

3) Démontrer que $f(x)\leq\frac{7}{3}$.Conclure

**Solution :**1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+3x+3\neq 0\}$

$\Delta=-3\prec 0$ : pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

2) Soit $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)-1=\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}-1=\frac{2x^2+7x+7-1(x^2+3x+3)}{x^2+3x+3}=\frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+3}$$

$f(x)-1=\frac{(x+2)^2}{x^2+3x+3}$ Or $x^2+3x+3\succ 0$ car $\Delta=-3\prec 0$(signe de a=1)

Et on a : $(x+2)^2\geq 0$ donc $f(x)\geq 1$ si $x\in\mathbb{R}$

f est donc minorée sur $\mathbb{R}$ par $m=1$

2) soit $\forall x\in\mathbb{R}$

$$f(x)-\frac{7}{3}=\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}-\frac{7}{3}=\frac{-x^2}{3(x^2+3x+3)}\leq 0$$

Par suite f est majorée par $\frac{7}{3}$.

Conclusion : $1\prec f(x)\leq\frac{7}{3}$ si $x\in\mathbb{R}$

**Exercice 4 :** (*) (**) Soit f une fonction tel que : $f(x)=\frac{-2x^2-3}{x^2+4}$

1) Déterminer $D_f$

2) Etudier la parité de la fonction f

3) Montrer que : pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = -2 + \frac{5}{x^2+4}$

4) a) Etudier la monotonie de f sur l'intervalles $[0;+\infty[$

b) En déduire les variations de f sur $]-\infty;0]$

5) Dresser le tableau de variation de f

6) Déterminer les extrémums de f

**Solution :** $f(x) = \frac{-2x^2-3}{x^2+4}$

1 $D_f = \{x \in E / x^2+4 \neq 0\}$

$x^2+4=0$ Signifie $x^2=-4$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : $x^2+4$ ne s'annule jamais

Par suite : $D_f = \mathbb{R}$

2) Etudions la parité de la fonction f :

- si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$
- $f(-x) = \frac{-2(-x)^2-3}{(-x)^2+4} = \frac{-2x^2-3}{x^2+4} = f(x)$ donc : $f(-x) = f(x)$

Donc $f$ est une fonction paire,

3) Montrons que : pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $f(x) = -2 + \frac{5}{x^2+4}$

Méthode1 : $-2 + \frac{5}{x^2+4} = \frac{-2(x^2+4)+5}{x^2+4} = \frac{-2x^2-8+5}{x^2+4} = \frac{-2x^2-3}{x^2+4}$

Donc : $f(x) = -2 + \frac{5}{x^2+4}$

Méthode2 : $f(x) = \frac{-2x^2-3}{x^2+4} = \frac{-2x^2-8+8-3}{x^2+4} = \frac{-2(x^2+4)+5}{x^2+4} = \frac{-2(x^2+4)}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+4}$

Donc : $f(x) = -2 + \frac{5}{x^2+4}$

4) a) Etudions la monotonie de f sur l'intervalles $[0;+\infty[$

2) soient $x_1 \in [0;+\infty[$ et $x_2 \in [0;+\infty[$ tel que : $x_1 < x_2$

$x_1 < x_2$ Implique : $x_1^2 < x_2^2$

Implique : $x_1^2 + 4 < x_2^2 + 4$

Implique : $\frac{1}{x_2^2+4} < \frac{1}{x_1^2+4}$

Implique : $\frac{5}{x_2^2+1} < \frac{-5}{x_1^2+1}$

Implique : $-2 + \frac{5}{x_2^2+1} < -2 + \frac{-5}{x_1^2+1}$

Implique : $f(x_2) < f(x_1)$

D'où : f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

b) Déduction des variations de f sur $]-\infty;0]$ :

Puisque f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ et $f$ est une fonction paire et le symétrique de $[0;+\infty[$ est $]-\infty;0]$

Alors : f est strictement croissante sur $]-\infty;0]$

5) Le tableau de variation de f :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-3/4$ | $\nearrow$ |

6)D'après le tableau de variation de f on a : $f(0)=-\frac{3}{4}$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

**Exercice 5 :** (**) (***) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=-x^2+4x+3$

1) Préciser le domaine de définition de f

2) Calculer le taux d'accroissement de fonction de f entre $x_1$ et $x_2$ tel que : $x_1 \neq x_2$

3) Etudier la monotonie de f sur : $I=[2;+\infty[$ et sur $J=]-\infty;2]$

4) Dresser le tableau de variation de f

5) En déduire les extrémums de f sur $\mathbb{R}$

6) Trouver les points d'intersection de la courbe $(C_f)$ avec les axes du repère

7) Soit g la fonction définie sur R par : $g(x)=2x$

Tracer Les courbes représentatives de $(C_f)$ et $(C_g)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

8) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x)=g(x)$

9)Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $f(x)>g(x)$

**Solution :** $f(x)=-x^2+4x+3$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

2)Soient : $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(-x_2^2+4x_2+3)-(-x_1^2+4x_1+3)}{x_2-x_1}=\frac{-x_2^2+4x_2+3+x_1^2-4x_1-3}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{-x_2^2+x_1^2+4(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{-(x_2^2-x_1^2)+4(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{-(x_2-x_1)(x_2+x_1)+4(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-x_1)(-(x_2+x_1)+4)}{x_2-x_1}$$

Par suite : $T(x_1;x_2)=-(x_1+x_2)+4$

3)a) Etude de la monotonie de f sur : $I=[2;+\infty[$

Soients : $x_1\in[2;+\infty[$ et $x_2\in[2;+\infty[$ alors $x_1\geq 2$ et $x_2\geq 2$ implique $x_1+x_2\geq 4$

Donc $-(x_1+x_2)\leq -4$ par suite : $-(x_1+x_2)+4\leq 0$

Donc $T(x_1;x_2)\leq 0$ d'où : f est décroissante sur $I=[2;+\infty[$

3)b) Etude de la monotonie de f sur : $J=]-\infty;2]$

Soients : $x_1\in]-\infty;2]$ et $x_2\in]-\infty;2]$ alors : $x_1\leq 2$ et $x_2\leq 2$ cela implique $x_1+x_2\leq 4$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc $-\left(x_1+x_2\right)\geq -4$ par suite : $-\left(x_1+x_2\right)+4\geq 0$ Donc $T\left(x_1;x_2\right)\geq 0$

D'où : f est croissante sur $J=\left]-\infty;2\right]$

4) Tableau de variation : On a : $f\left(2\right)=-2^2+4\times 2+3=-4+8+3=7$

Donc :

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $7$ | $\searrow$ |

5) $f\left(2\right)=7$ est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

6)a) Intersection de la courbe $\left(C_f\right)$ avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection C et D de la courbe $\left(C_f\right)$ avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f\left(x\right)=0$.

$f\left(x\right)=0$ Signifie $-x^2+4x+3=0$ ; $\Delta=b^2-4ac=16-4\times\left(-1\right)\times 3=16+12=28>0$

$$x_1=\frac{-4+\sqrt{28}}{2\times\left(-1\right)}=\frac{-4+\sqrt{4\times 7}}{-2}=\frac{-4+2\sqrt{7}}{-2}=\frac{-2\left(2-\sqrt{7}\right)}{-2}=2-\sqrt{7}$$

$$x_2=\frac{-4-\sqrt{28}}{2\times\left(-1\right)}=\frac{-4-\sqrt{4\times 7}}{-2}=\frac{-4-2\sqrt{7}}{-2}=\frac{-2\left(2+\sqrt{7}\right)}{-2}=2+\sqrt{7}$$

Donc les points d'intersection de la courbe $\left(C_f\right)$ avec l'axe des abscisses sont :

$C\left(2-\sqrt{7};0\right)$ et $D\left(2+\sqrt{7};0\right)$

b) Intersection de la courbe $\left(C_f\right)$ avec l'axe des ordonnées

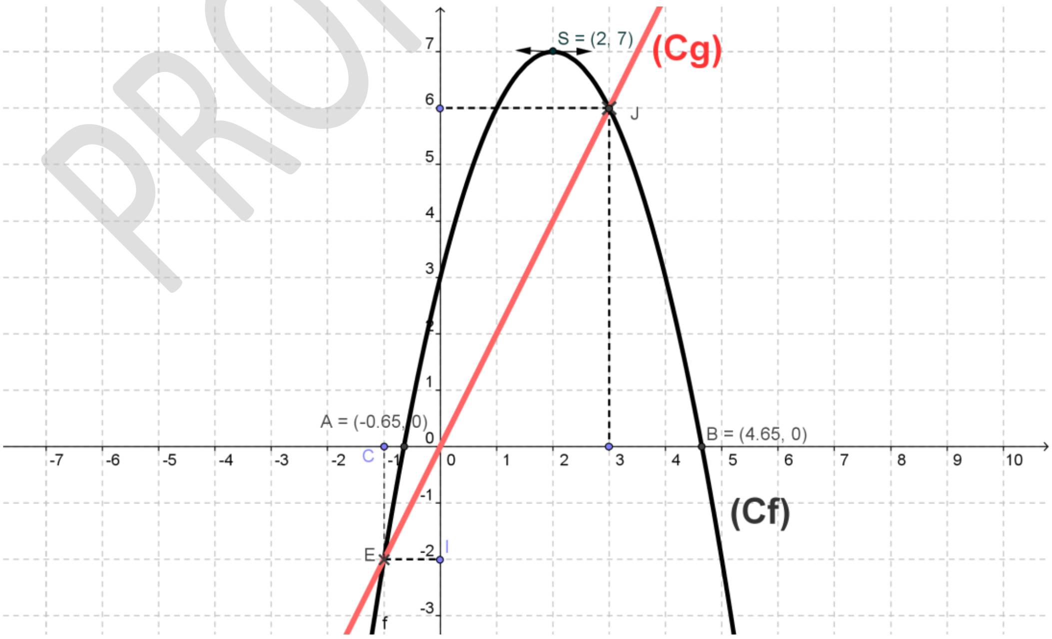
Le point d'intersection de la courbe $\left(C_f\right)$ avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $f\left(0\right)=-0^2+4\times 0+3=3$

Donc le point d'intersection de la courbe $\left(C_f\right)$ avec l'axe des ordonnées est : $E\left(0;3\right)$

**7**) Les courbes représentatives $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$ sont données dans le repère ci-dessous :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **-1** | **0** | **1** | **2** | **3** | 4 | **5** |
| -2 | 3 | 6 | 7 | 6 | 3 | -2 |







PROF: ATMANI NAJIB

8) a) Résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes $(C_f)$ et $(C_g)$

On a donc $x=-1$ et $x=3$ donc $S=\{-1;3\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ Signifie : $-x^2+4x+3=2x$ c'est-à-dire : $-x^2+2x+3=0$ $a=-1$ et $b=2$ et $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times(-1)\times3=4+12=16>0$ Donc : $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

C'est-à-dire : $x_1=\frac{-2+\sqrt{16}}{2\times(-1)}=\frac{-2+4}{-2}=\frac{2}{-2}=-1$ et $x_2=\frac{-2-\sqrt{16}}{2\times(-1)}=\frac{-2-4}{-2}=\frac{-6}{-2}=3$

Donc : $S=\{-1;3\}$

9) a) Résolution graphique de l'inéquation $f(x)>g(x)$ :

La courbe $(C_f)$ est au-dessus de $(C_g)$ si $x\in]-1;3[$

Donc $S=]-1;3[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation $f(x)>g(x)$ : $f(x)>g(x)$ Signifie $-x^2+4x+3>2x$

C'est-à-dire : $-x^2+2x+3>0$

Les racines sont : $x_1=-1$ et $x_2=3$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2+2x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Donc $S=]-1;3[$

**Exercice 6 :** (*) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=5x^2+3$

Montrer que f admet un minimum absolu sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera

**Solution :** $D_f=\mathbb{R}$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$ $x^2\geq0$ donc $5x^2\geq0$ car $5\succ0$

Par suite $5x^2+3\geq3$ et on a $f(0)=3$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ $f(x)\geq f(0)$

D'où : $f(0)=3$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

**Exercice 7 :** (**) Soit f une fonction numérique tq : $f(x)=-x^2+4x-3$

Montrer que 1 est le maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

**Solution** : $D_f=\mathbb{R}$

Montrons donc que : $f(x)\leq1$ et que l'équation $f(x)=1$ admet une solution dans $\mathbb{R}$

$f(x)-1=-x^2+4x-3-1=-x^2+4x-4$

$f(x)-1=-(x^2-4x+4)=-(x-2)^2\leq0$

Donc $f(x)\leq1$ $\forall x\in\mathbb{R}$ et on a :

$f(x)=1\Leftrightarrow f(x)-1=0\Leftrightarrow-(x-2)^2=0\Leftrightarrow x=2$

Donc 'équation $f(x)=1$ admet une solution dans $\mathbb{R}$

Et on a : $f(2)=1$ donc : $f(x)\leq f(2)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Par suite : $f(2)=1$ est le maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

**Exercice 8 :** (*) Du tableau de variation

| $x$ | $-5$ | | $-2$ | | $2$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $5$ | ↘ | $0,5$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-2$ |

Déduire les extrémums de f

**Solution :** Du tableau de variation on a :

Le nombre 2 est une valeur maximale de f au point $x_0 = 2$

Le nombre 0.5 est une valeur Minimale de f au point $x_0 = -2$

**Exercice 9 :** (***) Soit f une fonction tel que : $f(x) = x + \frac{1}{x}$

1) Déterminer $D_f$ et étudier la parité de f

2) Calculer Le taux d'accroissement $T(x_1;x_2)$ de f entre $x_1$ et $x_2$ deux éléments de $D_f$ Tel que : $x_1 \neq x_2$

3) Étudier les variations de f sur $I = ]0;1]$ puis sur $J = [1;+\infty[$

4) En déduire les variations de f sur $D_f$

5) Dresser le tableau de variations de f sur $D_f$

**Solutions :** 1) On a $f(x) \in \mathbb{R}$ équivaut à: $x \neq 0$ Donc $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

- $f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -x - \frac{1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right)$

$f(-x) = -f(x)$

Donc $f$ est une fonction impaire,

2) $f(x_1) - f(x_2) = \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) - \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) = x_1 + \frac{1}{x_1} - x_2 - \frac{1}{x_2}$

$= \frac{x_1^2 \times x_2 + x_2 - x_2^2 \times x_1 - x_1}{x_1 \times x_2} = \frac{x_1 \times x_2 (x_1 - x_2) + x_2 - x_1}{x_1 \times x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 \times x_2 - 1)}{x_1 \times x_2}$

$$T(x_1;x_2) = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 \times x_2 - 1)}{x_1 \times x_2} \times \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 \times x_2 - 1}{x_1 \times x_2}$$

a) Sur $I = ]0;1]$

Soit $x_1 \in ]0;1]$ et $x_2 \in ]0;1]$

Donc $0 \prec x_1 \leq 1$ et $0 \prec x_2 \leq 1$ $x_2 + 1 \prec 0$ Donc $0 \prec x_1 x_2 \leq 1$ et $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 x_2 - 1 \prec 0$ et on a : $0 \prec x_1 x_2$ Donc $T(x_1;x_2) = \frac{x_1 \times x_2 - 1}{x_1 \times x_2} \prec 0$

D'où : f est strictement décroissante sur $I = ]0;1]$

b) Sur $J = [1;+\infty[$ : Soient $x_1 \in [1;+\infty[$ et $x_2 \in [1;+\infty[$ .

Donc $x_1 \geq 1$ et $x_2 \geq 1$ Donc $x_1 x_2 \geq 1$ et $x_1 \neq x_2$ Donc $x_1 x_2 \succ 1$ par suite : $x_1 x_2 - 1 \succ 0$

Et on a $0 \prec x_1 x_2$ Donc $T(x_1;x_2) = \frac{x_1 \times x_2 - 1}{x_1 \times x_2} \succ 0$

D'où : f est strictement croissante sur $J = [1;+\infty[$

PROF: ATMANI NAJIB

3) f est impaire et le symétrique de $I=]0;1]$ est l'intervalle $I'=[-1;0[$ et le symétrique de $J=[1;+\infty[$ est l'intervalle $J'=]-\infty;-1]$

Puisque : f est strictement décroissante sur $I$ alors f est strictement décroissante sur $I'$

Puisque : f est strictement croissante sur $J$ alors f est strictement croissante sur $J'$

5) par suite le tableau de variations de f sur $D_f$ est : $f(x)=1+\frac{1}{1}=2$ ; $f(-1)=-1-\frac{1}{1}=-2$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f(x)$ | ↗ | $-2$ | ↘ ‖ ↘ | $2$ | ↗ |

**Exercice 10 :** (**) (***) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=2x^2-4x+7$

1) Déterminer $D_f$ et déterminer $\alpha$ et $\beta$ tel que : $f(x)=2(x+\alpha)^2+\beta$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

2) Déterminer les éléments caractéristiques de $(C_f)$

3) Déterminer le Tableau de variations de $f$

4) a) En déduire que : pour tout $x\in\mathbb{R}$ On a : $f(x)>0$

b) En déduire que : pour tout $x\in\left[1;\frac{3}{2}\right]$ On a : $5\le f(x)\le\frac{11}{2}$

c) En déduire que : pour tout $x\in[-1;0]$ On a : $7\le f(x)\le 13$

6)Trouver les points d'intersection de la courbe $(C_f)$ avec les axes du repère

7)Tracer la courbe représentative de $(C_f)$ dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

8) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $f(x)=m$ avec : $m\in\mathbb{R}$

**Solution :** $f(x)=2x^2-4x+7$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=2(x^2-2x)+7=2(x^2-2\times x\times 1+1^2-1^2)+7$

$f(x)=2((x-1)^2-1)+7=2(x-1)^2-2+7$

Donc ; $f(x)=2(x-1)^2+5$ par suite : : $\alpha=-1$ et $\beta=5$ et $a=2$

2)les éléments caractéristiques de $(C_f)$ :La courbe $(C_f)$ c'est une parabole de sommet $W(1;5)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$.

3)Le Tableau de variations de $f$ : On a $a=2\succ 0$

Donc :

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↘ | $5$ | ↗ |

5) a) D'après le tableau de variation de f on a : $f(1)=5$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f(1)\le f(x)$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $5\le f(x)$ or $0<5$

Par suite : $0<f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

b) Soit : $x\in\left[1;\frac{3}{2}\right]$ alors : $1\le x\le\frac{3}{2}$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement croissante sur $I=[1;+\infty[$

Par suite : f est strictement croissante sur $\left[1;\frac{3}{2}\right]$

PROF: ATMANI NAJIB

Alors : $f(1) \leq f(x) \leq f\left(\frac{3}{2}\right)$ et comme : $f(1)=5$ et $f\left(\frac{3}{2}\right)=2\left(\frac{3}{2}\right)^2-4\times\left(\frac{3}{2}\right)+7=\frac{11}{2}$

Par suite : $5 \leq f(x) \leq \frac{11}{2}$ si $x \in \left[1;\frac{3}{2}\right]$

b) Soit : $x\in[-1;0]$ On a alors : $-1\leq x\leq 0$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement décroissante sur $J=]-\infty;1]$

Par suite : f est strictement décroissante sur $[-1;0]$

Alors : $f(0)\leq f(x)\leq f(-1)$ et comme :

$f(0)=2(0)^2-4\times(0)+7=7$ Et $f(-1)=2(-1)^2-4\times(-1)+7=13$

Par suite : $7\leq f(x)\leq 13$

6)a) Intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$.

$f(x)=0$ Signifie $2x^2-4x+7=0$ $\quad a=2$ et $b=-4$ et $c=7$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times3=16-24=-8<0$

Donc : Pas de solution

Donc : la courbe $(C_f)$ ne coupe pas l'axe des abscisses

b) Intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $f(0)=2(0)^2-4\times(0)+7=7$

Donc le point d'intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des ordonnées est : $C(0;7)$

7) la courbe représentative $(C_f)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |

8) Résolution graphique de l'équation : $f(x)=m$ avec : $m\in\mathbb{R}$

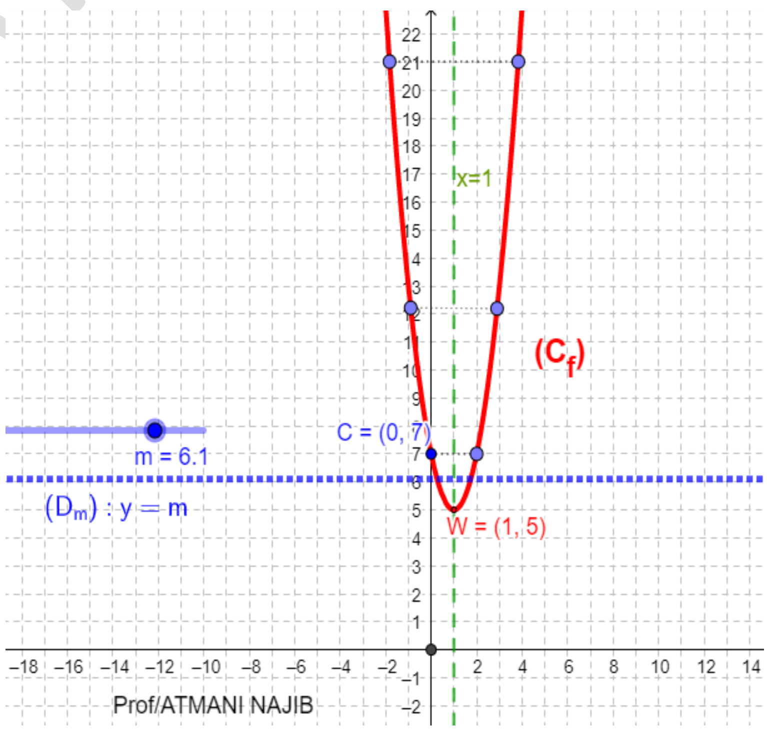
Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de $(C_f)$ et la droite : $y=m$

**Si**: $m>5$ ou $m=1$ il y'a deux solutions

**Si**: $m=5$ il y'a une solution

C'est : $x=1$

**Si**: $m<5$ pas de solutions




PROF: ATMANI NAJIB

**Exercice 11 :** (**) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$

$(C_f)$ Sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer $D_f$ 2) Ecrire $f(x)$ sous la forme : $f(x)=\beta+\frac{k}{x+\alpha}$ (déterminer $\alpha$ et $\beta$ et $k$ )

3) En déduire la nature de $(C_f)$ et ses éléments caractéristiques

4) Dresser le Tableau de variations de $f$

5) Tracer la courbe représentative $(C_f)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

**Solution :1)** On a : $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie : $x-1\neq 0$ équivaut à : $x\neq 1$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

2) Si $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ : la division euclidienne de : $2x+1$ $par$ $x-1$ donne :

$$\begin{array}{r|l} 2x+1 & x-1 \\ \cline{2-2} -2x+2 & 2 \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

$f(x)=\frac{2x+1}{x-1}=\frac{2(x-1)+3}{x-1}=\frac{2(x-1)}{x-1}+\frac{3}{x-1}=2+\frac{3}{x-1}$

Puisque : $f(x)=\beta+\frac{k}{x+\alpha}$ Alors : $\alpha=-1$ et $\beta=2$ et $k=3>0$

3) On a : $f(x)=2+\frac{3}{x-1}$ avec : $\alpha=-1$ et $\beta=2$ et $k=3>0$

Donc : $(C_f)$ est une hyperbole de centre $W(-\alpha;\beta)$ ; $W(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=1$ et $y=2$

4) $k=3>0$ Le tableau de variations de f :

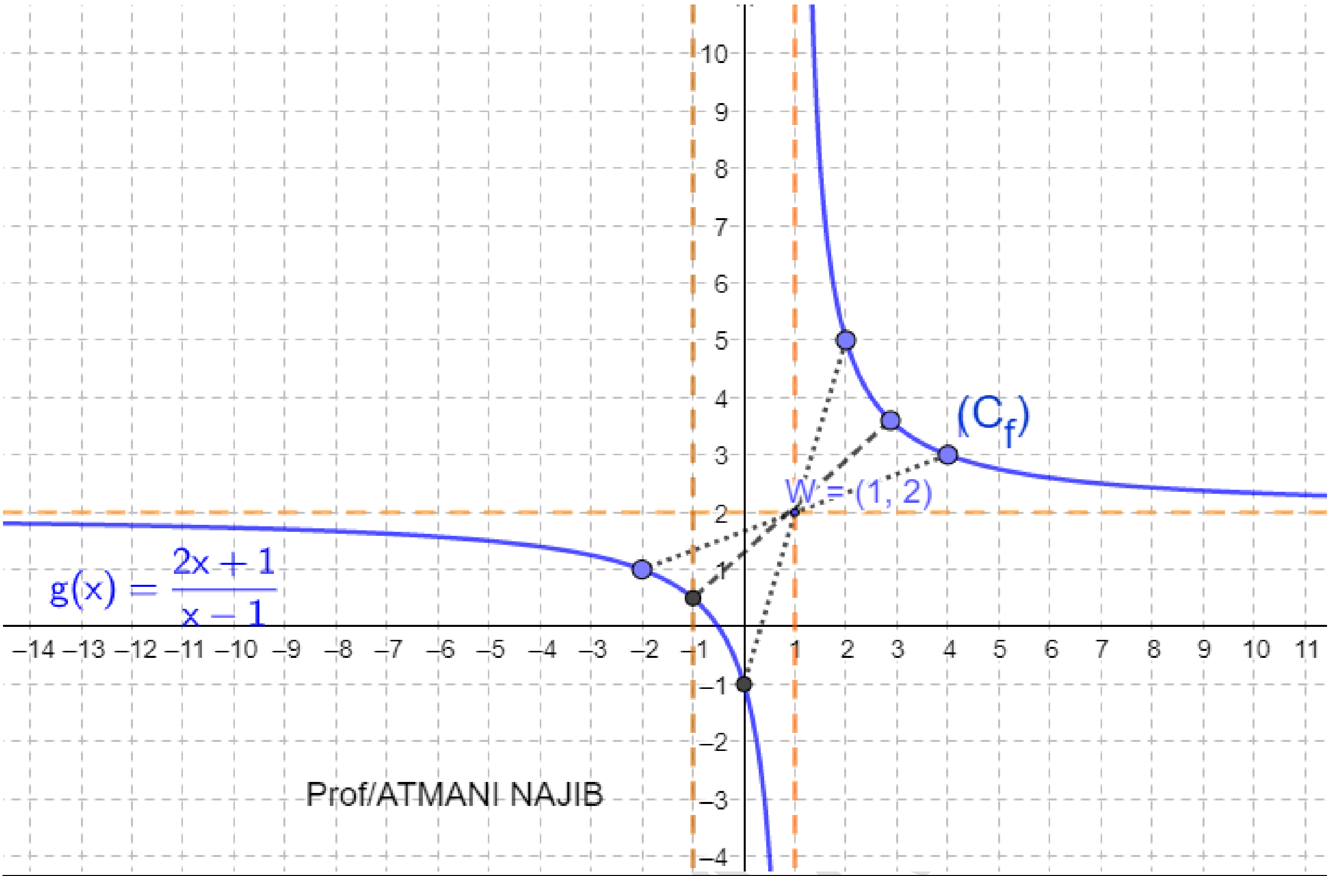
| $x$ | $-\infty$ 1 $+\infty$ | |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $\searrow$ | $\searrow$ |

Methode2 : $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2-1=-3\prec 0$

<u>5)Représentation graphique :</u> $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}=2+\frac{3}{x-1}$

| -2 | 1- | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | -1 | | 5 | $\frac{7}{2}$ | 3 |

PROF: ATMANI NAJIB




**Exercice1 2 :** (***) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = x|x| - 2x + 2$

1)a) Montrer que $f(x) = (x-1)^2 + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

b) Montrer que $f(x) = -(x+1)^2 + 3$ pour tout $x \in \mathbb{R}^-$

2) Tracer la courbe représentative $(C_f)$ de f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

3) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation :
$-x|x| + 2x - 2 + m = 0$ avec : $m \in \mathbb{R}$

4) Résoudre graphiquement l'inéquation : $1 \leq f(x) \leq 3$.

**Solutions :** 1) a) Soit : $x \in \mathbb{R}^+$ alors : $|x| = x$

Donc : $f(x) = x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1$ par suite : $f(x) = (x-1)^2 + 1$

1)b) Soit : $x \in \mathbb{R}^-$ alors : $|x| = -x$

Donc : $f(x) = -x^2 - 2x + 2 = -x^2 - 2x - 1 + 3$

Donc : $f(x) = -(x^2 + 2x + 1) + 3$ par suite : $f(x) = -(x+1)^2 + 3$

2) ☞ sur $\mathbb{R}^+$ : on a ; $f(x) = (x-1)^2 + 1$

l'équation de $(C_f)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ est : $y = f(x)$

Signifie : $y = (x-1)^2 + 1 = a(x+\alpha)^2 + \beta$

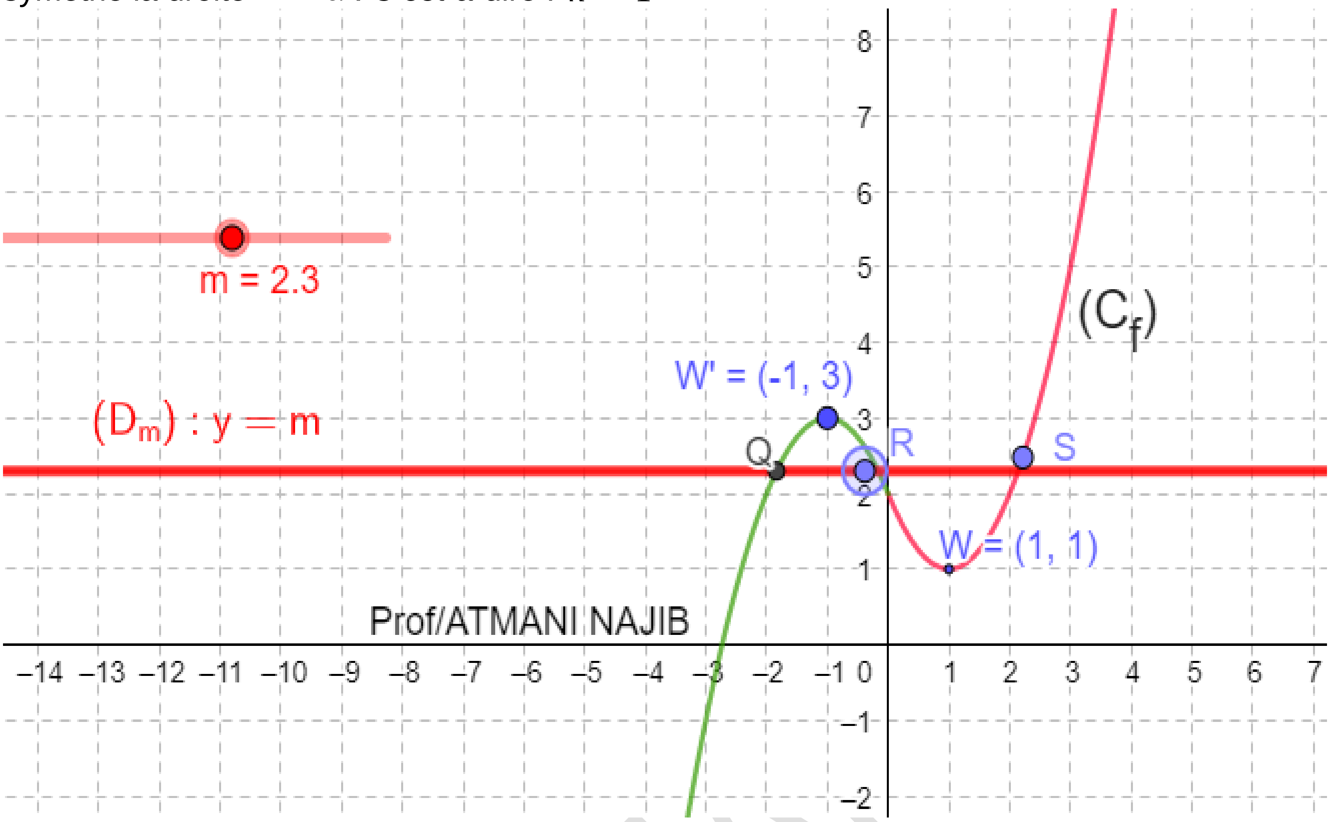
Donc $\alpha = -1$ et $\beta = 1$

La courbe $(C_f)$ est une partie d'une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta)$ ; $W(1;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x = -\alpha$. C'est-à-dire : $x = 1$

☞ Sur $\mathbb{R}^-$ : on a ; $f(x) = -(x+1)^2 + 3 = a(x+\alpha)^2 + \beta$

Donc $\alpha = 1$ et $\beta = 3$

La courbe $(C_f)$ est une partie d'une parabole de sommet $W'(-\alpha;\beta)$ ; $W'(-1;3)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\alpha$ . C'est-à-dire : $x=-1$




3) Résolution graphique de l'équation $-x|x|+2x-2+m=0$ avec $m\in\mathbb{R}$ :

$-x|x|+2x-2+m=0$ Signifie $m=x|x|-2x+2$

Signifie : $m=f(x)$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de $(C_f)$ et la droite : $y=m$

**Si**: $m>3$ ou $m<1$ il y'a une solution
**Si**: $m=3$ ou $m=1$ il y'a deux solutions
**Si**: $1<m<3$ il y'a une trois solutions

4) Résolution graphique de l'inéquation : $1\le f(x)\le 3$

$1\le f(x)\le 3$ Signifie $(C_f)$ comprise entre les droites : $y=1$ et $y=3$

On va résoudre d'abord l'équation : $f(x)=3$

☞ Sur $\mathbb{R}^+$ : $f(x)=3$ Signifie que : $(x-1)^2+1=3$

Signifie $(x-1)^2=2$ Signifie que : $x-1=\sqrt{2}$ ou $x-1=-\sqrt{2}$

Signifie $x=\sqrt{2}+1$ ou $x=-\sqrt{2}+1\notin\mathbb{R}^+$

Signifie $x=\sqrt{2}+1$

☞ Sur $\mathbb{R}^-$ : $f(x)=3$ Signifie $-(x+1)^2+3=3$

Signifie $-(x+1)^2=0$

Signifie $x=-1$

On va aussi résoudre l'équation : $f(x)=1$

☞ Sur $\mathbb{R}^+$ : $f(x)=1$ Signifie $(x-1)^2+1=1$

Signifie $(x-1)^2=0$

Signifie $x=1$

☞ Sur $\mathbb{R}^-$ : $f(x)=1$ Signifie $-(x+1)^2+3=1$

Signifie $-(x+1)^2=-2$

Signifie $(x+1)^2=2$

Signifie $x+1=\sqrt{2}$ ou $x+1=-\sqrt{2}$

Signifie $x=\sqrt{2}-1\notin\mathbb{R}^-$ ou $x=-\sqrt{2}-1\in\mathbb{R}^-$

Signifie $x=-\sqrt{2}-1$

Par suite : $1\leq f(x)\leq 3$ Signifie $-\sqrt{2}-1\leq x\leq 1+\sqrt{2}$

Finalement : $S=\left[-\left(\sqrt{2}+1\right);1+\sqrt{2}\right]$

10) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $f(x)=m$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de $(C_f)$ et la droite : $y=m$

**Si** : $m<5$ l'équation n'admet pas de solution

**Si** : $m=5$ il y'a une solution c'est : x = 1

**Si** : $m>5$ il y'a deux solutions

**Exercice 13 :** (***) On considère les fonctions : $f(x)=x^2-2x+1$ et $g(x)=\frac{3x-3}{x+1}$ et $(C_f)$ et $(C_g)$ les courbes représentatives des fonctions f et g

1) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f et g

2) a) Vérifier que : $f(x)=(x-1)^2$ si $x\in D_f$

b) Vérifier que : $g(x)=3-\frac{6}{x+1}$ si $x\in D_g$

3)a) Donner la nature de la courbe de f et ces éléments caractéristique

b) Dresser le tableau de variation de f

4)a) Donner la nature de la courbe de g et ces éléments caractéristique

b) Dresser le tableau de variation de g

5)Déterminer les points d'intersection de $(C_f)$ avec les axes du repère

6)Déterminer les points d'intersection de $(C_g)$ avec les axes du repère

7)Tracer les courbes $(C_f)$ et $(C_g)$ dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

8) Déterminer algébriquement les points d'intersection de $(C_f)$ et $(C_g)$

9)Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\geq g(x)$

10)Soit $h$ la fonction définie par : $h(x)=\frac{3|x|-3}{|x|+1}$

a) Déterminer l'ensemble de définition $D_h$

b) Montrer que la fonction h est paire

c)Vérifier que $h(x)=g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$

11)Tracer la courbes $(C_h)$ de $h$ dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

12)Soit $K$ la fonction définie par : $K(x)=|f(x)|$

PROF: ATMANI NAJIB

a) Tracer la courbes $(C_K)$ de $K$ dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

b) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de

L'équation $K(x)=m$

**<u>Solution :</u>** 1) $f(x)=x^2-2x+1$ et $g(x)=\dfrac{3x-3}{x+1}$

Dans l'expression de $f(x)$ , $x$ peut prendre n'importe quelle valeur réelle : Donc $D_f=\mathbb{R}$

Tandis que pour : $g(x)$ , $x$ ne doit pas prendre de valeur telle que : $x+1=0$ soit $x=-1$

Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

2) a) Vérifions que : $f(x)=(x-1)^2$ si $x\in\mathbb{R}$

$f(x)=x^2-2x+1=x^2-2x+1^2=x^2-2\times x\times 1+1^2$

Donc : $f(x)=(x-1)^2+0$ ( la forme canonique)

b) Vérifions que : $g(x)=3-\dfrac{6}{x+1}$ si $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

Soit : $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ ; $3-\dfrac{6}{x+1}=\dfrac{3(x+1)-6}{x+1}=\dfrac{3x+3-6}{x+1}=\dfrac{3x-3}{x+1}=g(x)$ (La forme réduite)

3) $f(x)=x^2-2x+1$ : $(f(x)=ax^2+bx+c)$

a) <u>Méthode1 :</u> On a : $a=1$ et $b=-2$ et $c=1$ $f(x)=x^2-2x+1$

$\alpha=\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{2}{2\times 1}=-1$ et $\beta=f(-\alpha)=f(1)=(1)^2-2\times 1+1=0$

Ainsi : dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe $(C_f)$ c'est une parabole de sommet : $W(-\alpha;\beta)$ soit $W(1;0)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

<u>Méthode2 :</u> On utilisant un résumé de notre cours :

Rappelle : $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$ (forme canonique)

Dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe $(C_f)$ c'est une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\alpha$

Dans notre exercice on a : $f(x)=(x-1)^2+0$ si $x\in\mathbb{R}$ : $\alpha=-1$ et $\beta=0$

Dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe $(C_f)$ c'est une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta)$ c'est-à-dire : $W(1;0)$ et d'axe de symétrie la droite : $x=-\alpha=1$

b) Le tableau de variations de f :

Dans notre exercice on a : $\alpha=-1$ et $\beta=0$

$a=1>0$

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

4) $g(x)=\dfrac{3x-3}{x+1}$

a) <u>Méthode1 :</u> On utilisant un résumé de notre cours :

PROF ATMANI NAJIB

Rappelle : Si : $g(x)=\beta+\frac{k}{x+\alpha}$ alors $(C_g)$ est une hyperbole de centre $\Omega(-\alpha;\beta)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\alpha$ et $y=\beta$

Dans notre exercice on a : $g(x)=3-\frac{6}{x+1}$ si $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ donc : $\alpha=1$ et $\beta=3$ et $k=-6<0$

Donc $(C_g)$ est une hyperbole de centre $\Omega(-1;3)$ et d'asymptotes les droites d'équations :
$x=-1$ et $y=3$

Et puisque : $k=-6<0$ alors : $g$ est strictement croissante sur les intervalles : $]-\infty;-1[$ $et$ $]-1;+\infty[$

b) Le tableau de variations de g :

| $x$ | $-\infty$   $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g(x)$ | ↗ | ↗ |

<u>Méthode2 :</u> (On utilisant un résumé de notre cours)

Si : $g(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors $(C_g)$ est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\frac{d}{c}$ et $y=\frac{a}{c}$

**1iér cas :** si $\det g=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\succ 0$ alors $g$ est strictement croissante

**2iér cas :** si $\det g=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc<0$ alors $g$ est strictement décroissante

Dans notre Exercice on a : $g(x)=\frac{3x-3}{x+1}$ Avec : $a=3$ ; $b=-3$ ; $c=1$ ; $d=1$

Donc : $(C_g)$ est une hyperbole de centre $\Omega(-1;3)$ et d'asymptotes les droites d'équations :

$x=-\frac{1}{1}=-1$ et $y=\frac{3}{1}=3$

$\det g=\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3\times1-(-3)\times1=6>0$

Donc : $g$ est strictement croissante sur les intervalles : $]-\infty;-1[$ $et$ $]-1;+\infty[$

b) Le tableau de variations de g :

| $x$ | $-\infty$   $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g(x)$ | ↗ | ↗ |

5)Déterminer les points d'intersection de $(C_f)$ avec les axes du repère

$f(x)=x^2-2x+1$

a) Intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$

$f(x)=0$ Signifie $x^2-2x-1=0$

Signifie : $(x-1)^2=0$

Signifie : $x-1=0$

Signifie : $x=1$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : le point d'intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des abscisses est : $A(1;0)$

Donc : $(C_f)\cap(ox)=\{A(1,0)\}$

b) Intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $f(0)=0^2-2\times0+1=1$

Donc le point d'intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des ordonnées est : $B(0;1)$

Donc : $(C_f)\cap(oy)=\{B(0,1)\}$

6)Déterminer les points d'intersection de $(C_g)$ avec les axes du repère

$g(x)=\dfrac{3x-3}{x+1}$

a) Intersection de la courbe $(C_g)$ avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection de la courbe $(C_g)$ avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $g(x)=0$

$g(x)=0$ Signifie : $\dfrac{3x-3}{x+1}=0$ et $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

Signifie : $3x-3=0$

Signifie : $x=1$

Donc le point d'intersection de la courbe $(C_g)$ avec l'axe des abscisses est : $A(1;0)$

Donc : $(C_g)\cap(ox)=\{A(1;0)\}$

b) Intersection de la courbe $(C_g)$ avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe $(C_g)$ avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a : $g(0)=\dfrac{3\times0-3}{0+1}=\dfrac{-3}{1}=-3$

Donc le point d'intersection de la courbe $(C_g)$ avec l'axe des ordonnées est : $C(0;-3)$

Donc : $(C_g)\cap(oy)=\{C(0;-3)\}$

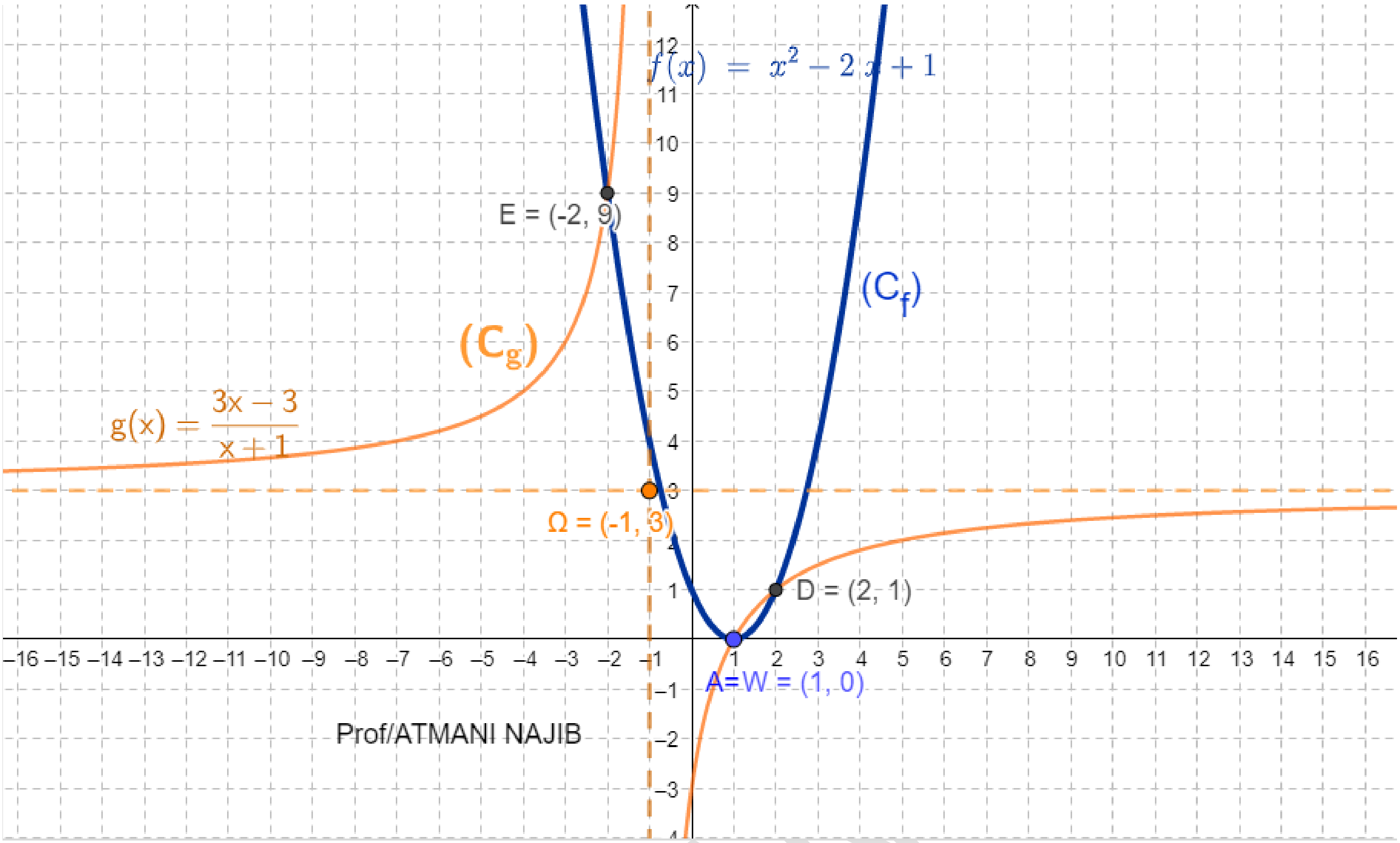
7)Représentation des courbes $(C_f)$ et $(C_g)$ dans le même repère orthonormé$(O;\vec{i};\vec{j})$

La courbe $(C_g)$ : $g(x)=\dfrac{3x-3}{x+1}$

| **-4** | **-3** | **-2** | **-1** | **0** | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 6 | 9 | | -3 | 0 | 1 |

La courbe $(C_f)$ : $f(x)=x^2-2x+1$

| $x$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 1 | 4 |




8) Déterminons algébriquement les points d'intersection de $(C_f)$ et $(C_g)$

Résolvons dans : $\mathbb{R}-\{-1\}$ l'équation : $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ Signifie que : $x^2-2x+1=\dfrac{3x-3}{x+1}$

Signifie que : $(x-1)^2-\dfrac{3(x-1)}{x+1}=0$

Signifie que : $(x-1)\left(x-1-\dfrac{3}{x+1}\right)=0$

Signifie que : $(x-1)\left(\dfrac{(x-1)(x+1)-3}{x+1}\right)=0$

Signifie que : $(x-1)\left(\dfrac{x^2-1-3}{x+1}\right)=0$

Signifie que : $(x-1)\left(\dfrac{x^2-4}{x+1}\right)=0$

Signifie que : $(x-1)\left(\dfrac{x^2-2^2}{x+1}\right)=0$

Signifie que : $\dfrac{(x-1)(x-2)(x+2)}{x+1}=0$ avec $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

Signifie que : $(x-1)(x-2)(x+2)=0$ avec $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

Signifie que : $x-1=0$ ou $x-2=0$ ou $x+2=0$

Signifie que : $x=1$ ou $x=2$ ou $x=-2$

Et par suite : $(C_f)\cap(C_g)=\{A(1,0);E(-2,9);D(2,1)\}$

9)Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\le g(x)$

Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\ge g(x)$ équivaut à déterminer les intervalles dont on a

$(C_f)$ est au-dessus de $(C_g)$

Donc : graphiquement : $S = ]-\infty,-2] \cup ]-1,1] \cup [2,+\infty[$

10)Soit $h$ la fonction définie par : $h(x)=\dfrac{3|x|-3}{|x|+1}$

a) Déterminons l'ensemble de définition $D_h$

$D_h = \{x \in \mathbb{R} / |x|+1 \neq 0\}$

$|x|+1=0$ Signifie $|x|=-1$ impossible

Donc : $D_h = \mathbb{R}$

b) Montrons que la fonction h est paire

- si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$
- $h(-x)=\dfrac{3|-x|-3}{|-x|+1}=\dfrac{3|x|-3}{|x|+1}=h(x)$ C'est à dire : $h(-x)=h(x)$

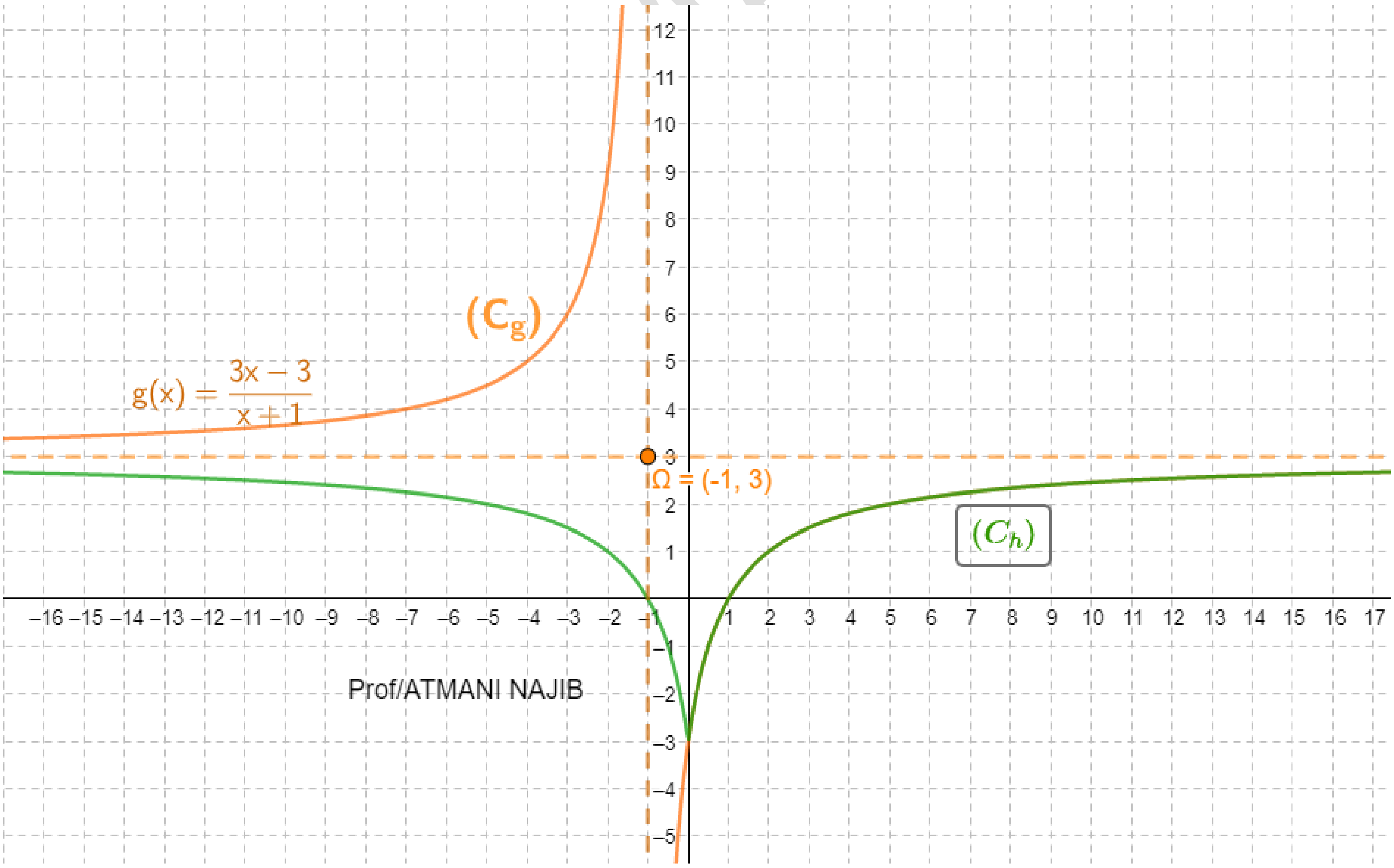
Donc h est une fonction paire,

c)Vérifions que $h(x)=g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$

Soit : $\mathbb{R}^+$ on a : $h(x)=\dfrac{3|x|-3}{|x|+1}=\dfrac{3x-3}{x+1}=g(x)$ car $|x|=x$

Donc : $h(x)=g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$

11) Représentation de la courbes $(C_h)$ de $h$ dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

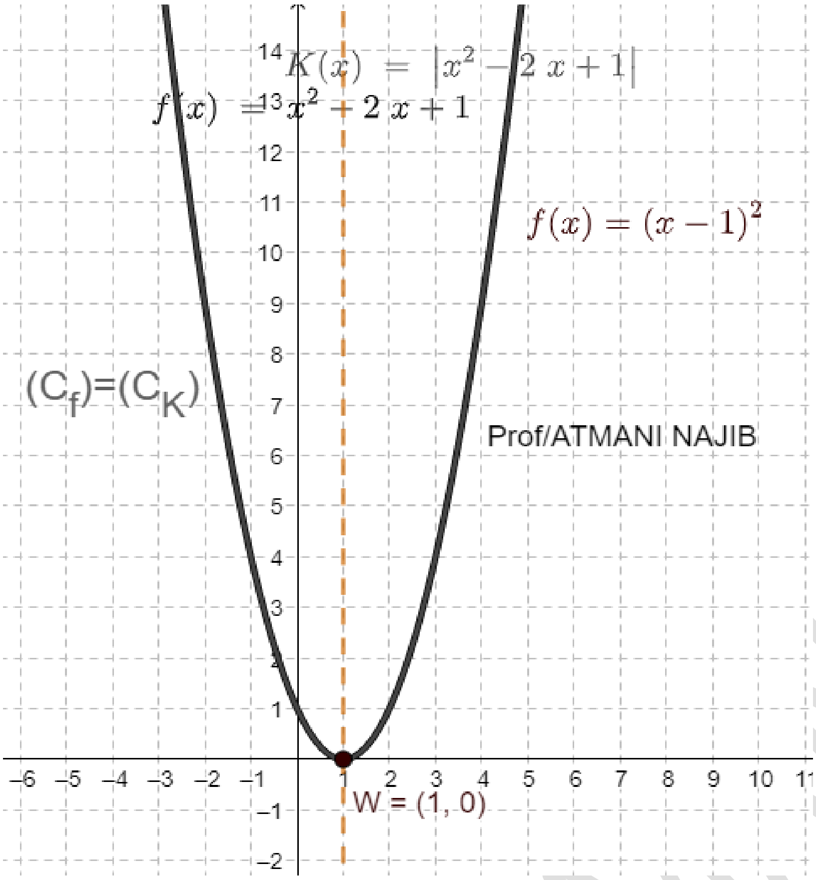



12)Soit $K$ la fonction définie par : $K(x)=|f(x)|$

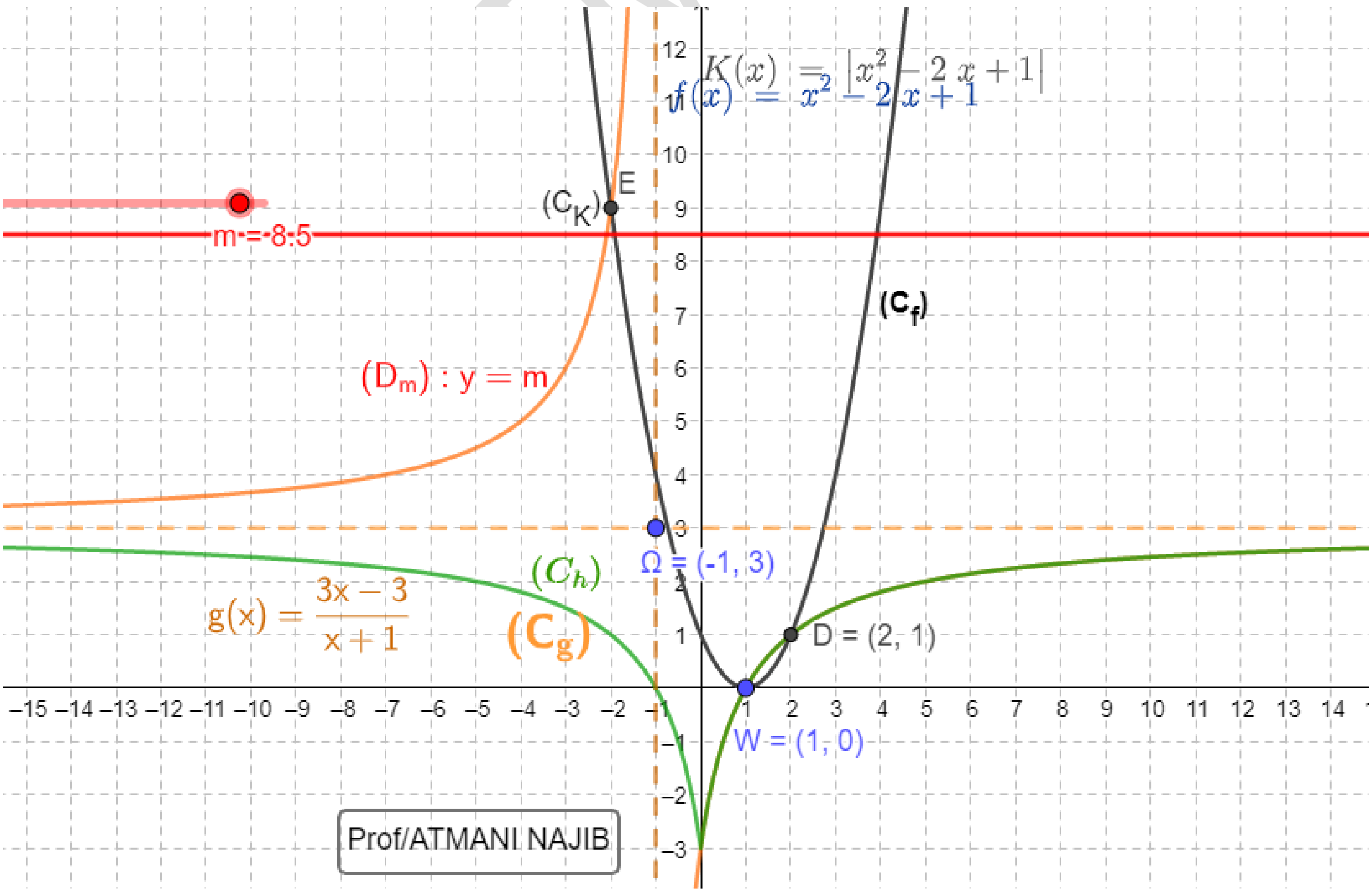
a) Tracer la courbes $(C_K)$ de $K$ dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

On a : $K(x)=|f(x)|=f(x)$ car $f(x)=(x-1)^2\geq 0$

Donc : $(C_f)$ et $(C_K)$ sont confondues




**Remarque :** tous les courbes dans un même repère :



b) Discutons suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de

L'équation $K(x)=m$

Le nombre de solutions de l'équation $K(x)=m$ :est le nombre de points d'intersection de $(C_K)$ et la droite $(D_m)$ d'équation : $(D_m)\quad y=m$

⊳ Si $m<0$ : l'équation n'a pas de solutions
⊳ Si $m=0$ : l'équation admet une seule solution
⊳ Si $m>0$ : l'équation admet deux solutions

*C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.*
*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien*

PROF: ATMANI NAJIB