Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°5 : Géométrie dans l'espace

Exercice 1 : (***) $ABCD$ Un tétraèdre tel que : $(AB)\perp(BCD)$

Soit H l'orthocentre du triangle BCD

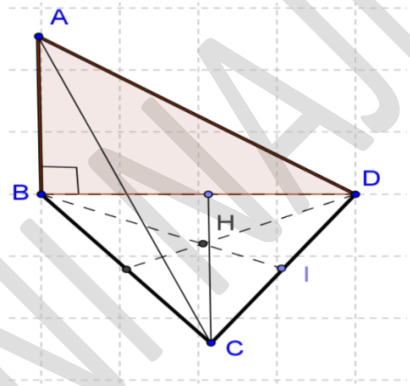
1)a)Montrer que : $(CH)\perp(ABD)$

b) En déduire que $(AD)\perp(CH)$

2) On suppose que : BCD est un triangle équilatéral et tel que : $BC=3cm$ et $AB=4cm$

Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$

Solution : 1) On a : $(AB)\perp(BCD)$ et $(CH)\subset(BCD)$



Donc : $(CH)\perp(AB)$ (1)

On a : H L'orthocentre du triangle BCD donc :

$(CH)\perp(BD)$ (2)

Et on a : (AB) et (BD) se coupent dans le plan (ABD) (3)

Donc de : (1) et (2) et (3) on déduit que : $(CH)\perp(ABD)$

b) on a : $(CH)\perp(ABD)$ et $(AD)\subset(ABD)$ donc :

$(AD)\perp(CH)$

2) le triangle BCD est équilatéral donc : (IB) est une hauteur avec I le milieu du segment $[CD]$

Donc : $A_{BCD}=\dfrac{CD\times BI}{2}$ et d'après le théorème de Pythagore dans le triangle BCI rectangle en I

On a : $IC^2=BC^2-CI^2$ donc : $IC^2=3^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{27}{4}$ par suite : $IC=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}cm$

Donc : $A_{BCD}=\dfrac{3\times3\sqrt{3}}{4}=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}cm^2$

Et on sait que : le volume du tétraèdre $ABCD$ est : $V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\times A_{ABC}\times AB$

Avec : $[AB]$ la hauteur car $(AB)\perp(BCD)$ donc : $V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{9\sqrt{3}}{4}\times 4cm^3=3\sqrt{3}cm^3$

Exercice 2 : (***) $ABCD$ Un tétraèdre tel que : $(AB)\perp(AC)$ et $(AC)\perp(AD)$ et $(AB)\perp(AD)$ et

$M\in[BC]$ tel que : $M\neq B$ et $M\neq C$

La droite qui passe par M et parallèle a (BD) coupe (DC) en N et la droite qui passe par M

Et parallèle a (AC) coupe (AB) en Q.

1)Faire une figure

2)Montrer que : $(AC)\parallel(MNQ)$ et $(BD)\parallel(MNQ)$

3) La parallèle a (AC) qui passe par N coupe (AD) en P

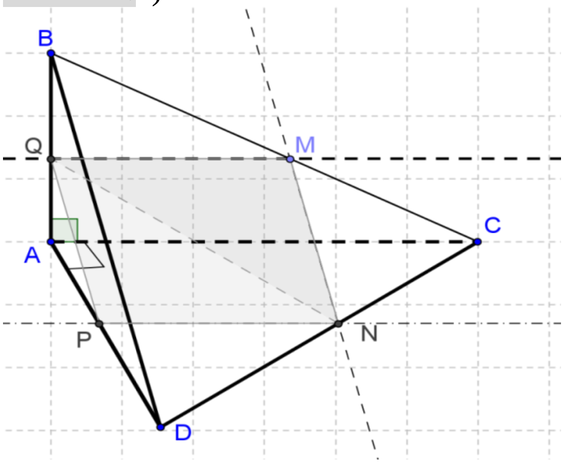
a)Montrer que : $P\in(MNQ)$

b)Montrer que : $(NP)\perp(PQ)$ et que le quadrilatère $MNPQ$ est un rectangle

4) Sachant que : $AB=2cm$ et $AD=4cm$ et $AC=3cm$

Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$

Solution : 1)



2) On a : $(AC) \parallel (MQ)$ et $(QM) \subset (MNQ)$ donc : $(AC) \parallel (MNQ)$

On a : $(BD) \parallel (MN)$ et $(MN) \subset (MNQ)$ donc : $(BD) \parallel (MNQ)$

3)a) On a : $(AC) \parallel (MQ)$ et $(AC) \parallel (NP)$ donc : $(MQ) \parallel (NP)$

Donc : les points M ; N ; P ;Q sont coplanaires

Par suite : $P \in (MNQ)$

b) On a : $(AC) \perp (AB)$ et $(AC) \perp (AD)$ et (AB) et (AD) se coupent dans le plan (ABD)

Donc : $(AC) \perp (ABD)$ et puisque : $(NP) \parallel (AC)$ alors : $(NP) \perp (ABD)$

Et aussi on a : $(PQ) \subset (ABD)$ par suite : $(NP) \perp (PQ)$

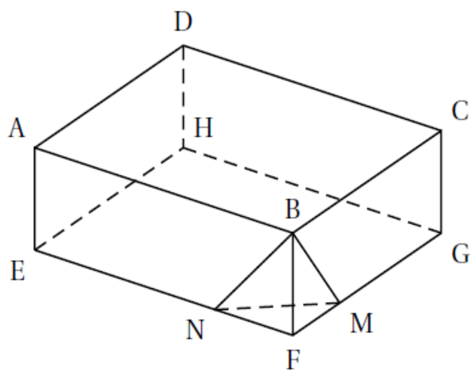
On a : $(MNQ) \cap (ABD) = (PQ)$ et $(MN) \subset (MNQ)$ et $(BD) \subset (ABD)$ et $(BD) \parallel (MN)$

Donc d'après le théorème du toit on a : $(PQ) \parallel (MN)$

Par suite : les points M ; N ; P ;Q sont coplanaires et $(PQ) \parallel (MN)$ et $(MQ) \parallel (NP)$ et $(NP) \perp (PQ)$ donc : $MNPQ$ est un rectangle.

4) le volume du tétraèdre $ABCD$ est : $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times AB \times \frac{AD \times AC}{2} = \frac{2 \times 4 \times 3}{6} = 4cm^3$

Exercice 3 : (*** On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH.
M est un point de [FG] et N un point de [EF].
On donne : FE = 15 cm ; FG = 10 cm ; FB = 5 cm ; FN = 4 cm
FM = 3 cm.
Calculer le volume du solide ABCDENMGH



Solution : a) Etant donné qu'ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle, le triangle FNM est rectangle en F. Le calcul de l'aire du triangle FNM donne :

$$V_{FNM} = \frac{base \times hauteur}{2} = \frac{FN \times FM}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6cm^2$$

b) Calcul du volume de la pyramide BFNM :
Le volume de la pyramide BFNM est :

$$V_{BFNM} = \frac{l'aire\ base\ FNM \times hauteur}{3} = \frac{V_{FNM} \times FB}{3} = \frac{6 \times 5}{3} = 10cm^3$$

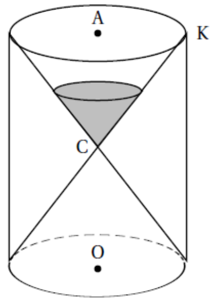
c) Calcul du volume du parallélépipède rectangle ABCDEFGH :

$$V_{ABCDEFGH} = L \times l \times h = FE \times FG \times FB = 15 \times 10 \times 5 = 750cm^3$$

Le volume du parallélépipède rectangle ABCDEFGH est de 750 cm^3. On en déduit le volume du solide ABCDENMGH : $V_{ABCDENMGH} = V_{ABCDEFGH} - V_{BFNM} = 750 - 10 = 740cm^3$

Donc : Le volume du solide ABCDENMGH est de 740 cm^3.

Exercice 4 : (***) On considère un sablier composé de deux cônes identiques de même sommet C et dont le rayon de la base est AK = 1,5 cm. Pour le protéger, il est enfermé dans un cylindre de hauteur 6 cm et de même base que les deux cônes.



1) Montrer que la valeur exacte du volume du sablier est $4{,}5\pi$ cm^3

2) Quelle fraction du volume du cylindre, le volume du sablier occupe-t-il ?
(On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible).

3) On a mis 12 cm^3 de sable dans le sablier.
Sachant que le sable va s'écouler d'un cône à l'autre avec un débit de240 cm^3/h
Quel temps sera mesuré par ce sablier ?

Solution :1) On note V le volume du cylindre et V_1 le volume du sablier

a) Calcul du volume du cylindre :

$V = \pi r^2 h = \pi \times AK^2 \times AO = \pi \times 1.5^2 \times 6 = 13.5\pi cm^3$ Valeur exacte

b) Le sablier est composé de deux cônes identiques, donc le volume V_1 est égal à deux fois le volume d'un cône.

Calcul du volume V_1 :

$$V_1 = 2\frac{l'aire\ base \times hauteur}{3} = 2\frac{\pi \times r^2 h}{3} = 2\frac{\pi \times AK^2 \times AC}{3} = 2\frac{\pi \times 1.5^2 \times 3}{3} = 4.5\pi cm^3$$ Valeur exacte

2) Le sablier occupe la fraction du volume suivante : $\frac{V_1}{V} = \frac{4.5}{13.5} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$

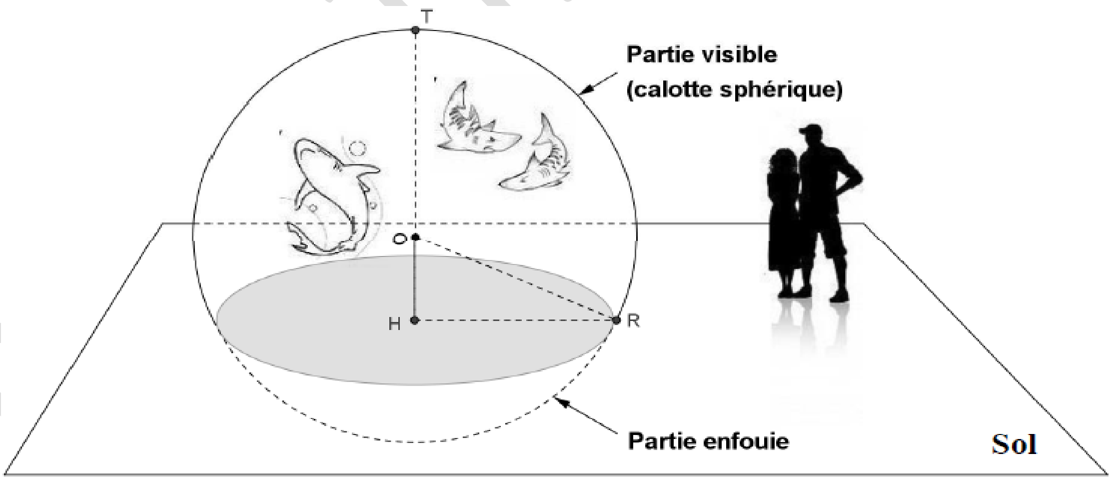
Le volume du sablier occupe un tiers de celui du cylindre.

3) Calcul du temps pour que le sable s'écoule d'un cône à l'autre :

$$\frac{12}{240} heure = 0.05\ heure = 0.05 \times 60 \min utes = 3 \min utes$$

Ce sablier mesure un temps de 3 minutes.

Exercice 5 : (***) La figure ci-dessous représente la situation



1) Calculer le volume en m^3 d'une boule (S) (sphère) de rayon 5 m. Donner l'arrondi à l'unité près.

2) En réalité, l'aquarium est implanté dans le sol. La partie supérieure (visible aux visiteurs) est une "calotte sphérique". La partie inférieure (enfouie) abrite les machines.

a) Quelle est la nature géométrique de la section entre le plan horizontal du sol et l'aquarium (la partie grisée sur la figure) ?

b) Le point O désigne le centre de la sphère. On donne les dimensions réelles suivantes :
OH = 3m ; RO = 5m ; HR = 4m , où H et R sont les points placés sur le sol comme sur la figure.
Le triangle OHR est-il rectangle ? Justifier.

3) a) T est un point de la sphère tel que les points T, O, H soient alignés comme sur la figure.
Calculer la hauteur HT de la partie visible de l'aquarium.

b) Le volume d'une calotte sphérique de rayon R est donné par la formule : $V = \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h)$ *où h* désigne sa hauteur (correspondant à la longueur HT sur la figure).
Calculer le volume en litres de cette calotte sphérique si *R=5m*
c) Pour cette question, on prendra comme volume de l'aquarium 469 000 litres.
Des pompes délivrent à débit constant de l'eau de mer pour remplir l'aquarium vide. En 2 heures de fonctionnement, les pompes réunies y injectent 14 000 litres d'eau de mer.
Au bout de combien d'heures de fonctionnement, les pompes auront-elles rempli l'aquarium?

Solution :1) Volume de la boule : $V_{boule} = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} 5^3 = \frac{500}{3} \pi m^3 \approx 524 m^3$
Donc **:** Le volume de la boule est approximativement de 524 m^3.
2) a) La section de l'aquarium par le plan horizontal est le disque de centre H et de rayon HR.
b) Dans le triangle OHR, nous avons :
$OH^2 + HR^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ et $OR^2 = 5^2 = 25$
Etant donné que nous avons : $OH^2 + HR^2 = OR^2$
Nous pouvons conclure d'après la réciproque du théorème de Pythagore que le triangle OHR est rectangle en H.
3) a) Calcul de la longueur HT : $HT = HO + OT = 3 + 5 = 8$ donc : HT mesure 8 mètres.
b) Volume de cette calotte sphérique.

$$V_{calotte} = \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h) = \frac{\pi}{3} \times 8^2 (15 - 8)$$

$V = \frac{448}{3} \pi m^3$ Valeur exacte et $V \simeq 469.145 m^3$ valeur approchée
Étant donné que : 1 m^3 = 1000 litres alors : $V \simeq 469145 \ litres$
c) Si les pompes injectent 14000 litres en 2 heures, elles injectent 7000 litres par heure. Le temps nécessaire pour remplir l'aquarium est donc égal à : $t = \frac{469000}{7000} = 67 \ heures = 2 \ \ jours \ 19 \ heures$
Il faut 2 jours et 19 heures pour remplir l'aquarium.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

Pyramides de Gizeh
Égypte