Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°5 : PRODUIT SCALAIRE

Exercice 1 : (*) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{2}$ et $\|\vec{v}\| = \frac{1}{4}$ et $(\vec{u};\vec{v}) = \frac{5\pi}{4}$

Calculer : $\vec{u}.\vec{v}$

Solution : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v}) = 2\sqrt{2} \times \frac{1}{4} \times \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{4} \times \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$ or $\cos(\pi + x) = -\cos x$

Donc : $\vec{u}.\vec{v} = -\frac{2\sqrt{2}}{4} \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

Exercice 2 : (**) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = 2$ et $\vec{u}.\vec{v} = -7$ et $(\vec{u};\vec{v}) = \frac{\pi}{6}$

Déterminer : $\|\vec{v}\|$

Solution : On sait que : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u};\vec{v})$ donc : $\|\vec{v}\| = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})}$

Donc : $\|\vec{v}\| = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \cos\frac{\pi}{6}}$ or $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

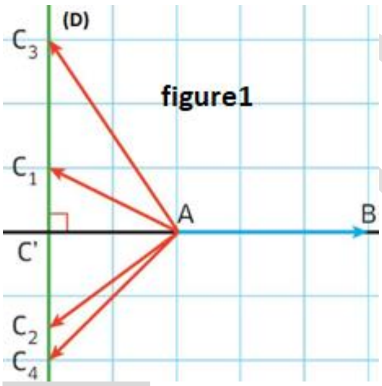
Donc : $\|\vec{v}\| = \frac{-7}{\sqrt{3}} = -\frac{7\sqrt{3}}{3}$

Exercice 3 : (**) Soit A, B et C' ; trois points alignés tels que : $AB = 3cm$ et $AC' = 2cm$

(D) est la droite perpendiculaire à (AB) passant par C'. (Figure 1)

1) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC_1}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC_2}$

2) Soit C un point de (D) ; Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$



Solution : 1) Dans la figure 1 : $\overrightarrow{AB}$. et $\overrightarrow{AC'}$ sont colinéaires et de même sens

Ainsi : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'} = AB \times AC' = 3 \times 2 = 6$

Tous les points C_1 ; C_2 ; C_3;....., de la droite (D) ont le même projeté orthogonal C' sur la droite (AB) et Ainsi : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'} = AB \times AC' = 3 \times 2 = 6$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC_2} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'} = AB \times AC' = 3 \times 2 = 6$

2) Soit C un point de (D)

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{C'C}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'C}$

Puisque $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{C'C}$ sont orthogonaux alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'C}=0$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=6+0=6$

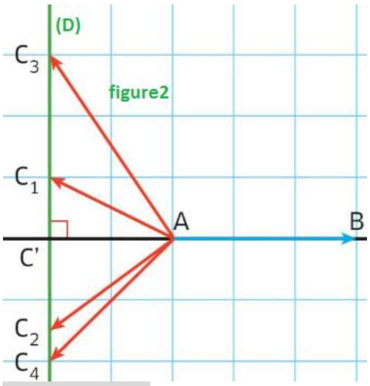
On constate donc que le produit scalaire : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ne dépend que du projeté orthogonal de C sur la droite (AB)

Exercice 4 : (**) Soit A, B et C' ; trois points alignés tels que : $AB=3cm$ et $AC'=2cm$

(D) est la droite perpendiculaire à (AB) passant par C'. (Figure 2)

1) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC_1}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC_2}$

2) Soit C un point de (D). Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$



Solution : Dans la figure2 : $\overrightarrow{AB}$. et $\overrightarrow{AC'}$ sont colinéaires et sont de sens contraires,

Ainsi : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}=-AB\times AC'=-3\times 2=-6$

Tous les points C_1 ; C_2 ; C_3 ;....., de la droite (D) ont le même projeté orthogonal C' sur la droite (AB) et

Ainsi : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}=-AB\times AC'=-3\times 2=-6$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC_2}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}=-AB\times AC'=-3\times 2=-6$

2) Soit C un point de (D)

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{C'C}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'C}$

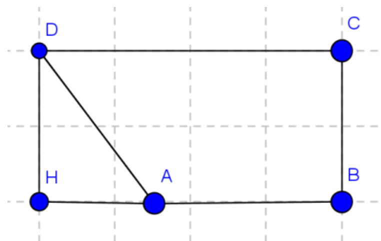
Puisque $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{C'C}$ sont orthogonaux alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'C}=0$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-6+0=-6$

On constate donc que le produit scalaire : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ne dépend que du projeté orthogonal de C sur la droite (AB)

Exercice 5 : (**) Soit HBCD un rectangle : $AB=3cm$; $AD=2cm$; $BC=\sqrt{2}cm$

1) Calculer AH 2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ 3) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$



Solution : 1) Calculons AH : le théorème de Pythagore nous permet d'écrire : $AD^2=AH^2+HD^2$

D'où $AH^2=AD^2-HD^2=4-2=2$

Donc : $AH=\sqrt{2}cm$

2) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AH}\right\|\cos\pi=AB\times AH\,(-1)=-3\sqrt{2}$

3) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$:

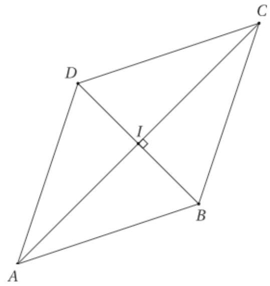
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=3^2=9$

Exercice 6 : (**), ABCD est un losange dont les diagonales mesurent : AC=12 et BD=6

Calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

Solution :

Il est possible ici de décomposer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$. et $\overrightarrow{BC}$ en utilisant la relation de Chasles et en faisant intervenir le point *I* : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC}$



On peut alors calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ de la façon suivante :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right).\left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC}\right)=\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$

Comme les vecteurs : $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont orthogonaux le produit scalaire $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BI}$ est nul ; pour la même raison le produit scalaire $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$ est lui aussi nul.

De plus : $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{AI}$; $IB=\frac{1}{2}DB=3$ et $IC=AI=\frac{1}{2}AC=6$

Par conséquent : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AI}^2-\overrightarrow{IB}^2=AI^2-IB^2=6^2-3^2=36-29=27$

Exercice 7 : (**) Soit ABC un triangle tel que : $AB=9$ et $AC=6$ et $BC=8$

En appliquant la propriété suivante :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs alors on a : $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ et $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

1)Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

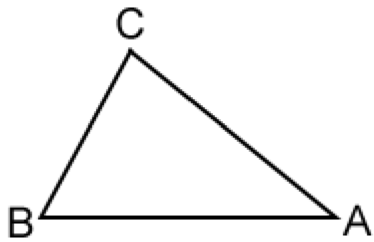
2)Calculer : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

3)Calculer : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

Solution : 1) Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

On en déduit, d'après la propriété que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\|^2\right)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{BC}\|^2\right)$



$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(9^2+6^2-8^2\right)=\frac{1}{2}\times 53=26,5$

2) Calculons : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

$\boxed{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(BA^2+BC^2-AC^2\right)}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(9^2+8^2-6^2\right)=\frac{1}{2}\times 109=54,5$

3) Calculons : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

$\boxed{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\left(CA^2+CB^2-AB^2\right)}$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\left(6^2+8^2-9^2\right)=\frac{1}{2}\times 19=9,5$

Exercice 8 : (**) On considère un triangle ABC tel que AB=11, AC=13 et BC=16

Déterminer une mesure en degré des trois angles de ce triangle (arrondir à 0,1 degré près)

Solution : a) On utilise la formule d'Al Kashi : $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos\left(BAC\right)$

Signifie que : $\cos\left(BAC\right)=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\times AC}=\frac{34}{286}=\frac{17}{134}$

Grâce à la calculatrice, on déduit que l'angle $\left(BAC\right)$ mesure environ 83,2 ° (à 0,1 degré près)

b) De la même manière :

On utilise la formule d'Al Kashi : $AC^2=BA^2+BC^2-2BA\times BC\cos\left(ABC\right)$

Signifie que : $\cos\left(\widehat{ABC}\right)=\frac{BA^2+BC^2-AC^2}{2BA\times BC}=\frac{208}{352}=\frac{13}{22}$

Grâce à la calculatrice, on déduit que l'angle $\left(\widehat{ABC}\right)$ mesure environ 53,8 ° (à 0,1 degré près)

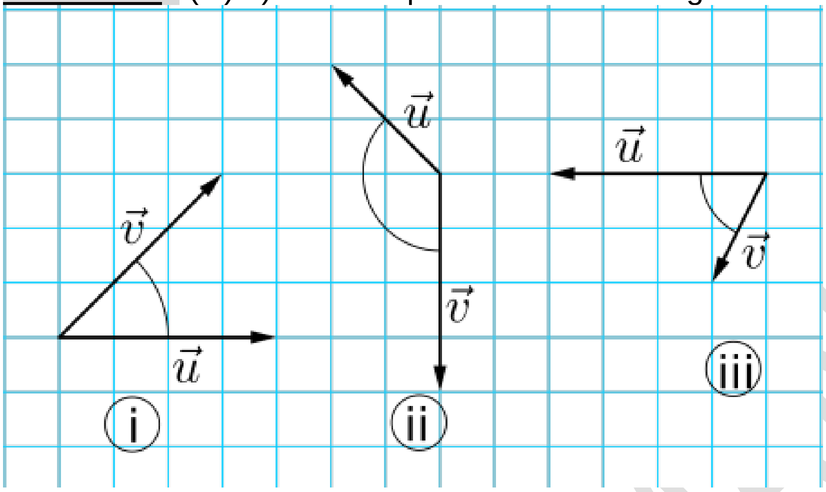
C) De la même manière :

On utilise la formule d'Al Kashi : $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\times BC\cos\left(\widehat{ACB}\right)$

Signifie que : $\cos\left(\widehat{ACB}\right)=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\times BC}=\frac{304}{416}=\frac{19}{26}$

Grâce à la calculatrice, on déduit que l'angle $\left(\widehat{ACB}\right)$ mesure environ 43 ° (à 0,1 degré près)

Exercice 9 : (**) 1) Calculer pour chacune des figures ci-dessous :



a) Les normes : $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$

b) Le produit scalaire : $\vec{u}.\vec{v}$

2)Déduis-en la valeur de l'angle géométrique formé par ces deux vecteurs.

Solution :1)a) i) Dans le premier cas de figure on a : $\|\vec{u}\|=4$

La norme du vecteur $\vec{v}$ est la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux autres côtés ont tous pour longueur 3.

Ainsi, d'après la propriété de Pythagore on a : $\|\vec{v}\|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{2\times 3^2}=3\sqrt{2}$

ii)Dans le deuxième cas de figure on a: $\|\vec{v}\|=4$

La norme du vecteur $\vec{u}$ est la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux autres côtés ont tous pour longueur 2.

Ainsi, d'après la propriété de Pythagore on a : $\|\vec{u}\|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{2\times 2^2}=2\sqrt{2}$

iii) Dans le troisième cas de figure on a: $\|\vec{u}\|=4$

La norme du vecteur $\vec{v}$ est la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux autres côtés ont pour longueur 2 et 1.

Ainsi, d'après la propriété de Pythagore on a :

$\|\vec{v}\|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

b) Le produit scalaire : $\vec{u}.\vec{v}$

i) Dans le premier cas de figure : On fait une projection du vecteur $\vec{v}$ sur la droite d'action du vecteur $\vec{u}$ comme sur la figure ci-dessus. On obtient deux vecteurs colinéaires et de même sens, donc : $\vec{u}.\vec{v}=4\times 3=12$

ii)Dans le deuxième cas de figure :
n fait une projection du vecteur $\vec{u}$ sur la droite d'action du vecteur $\vec{v}$ comme sur la figure ci-dessus. On obtient deux vecteurs colinéaires et de sens contraire, donc : $\vec{u}.\vec{v} = -2\times 4 = -8$
iii) Dans le troisième cas de figure : On fait une projection du vecteur $\vec{v}$ sur la droite d'action du Vecteur $\vec{u}$ comme sur la figure ci-dessus. On obtient deux vecteurs colinéaires et de même sens,
Donc : $\vec{u}.\vec{v} = 4\times 1 = 4$
2) Déduisons la valeur de l'angle géométrique formé par ces deux vecteurs.
Soit α la mesure de l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

On sait que : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos\alpha$ donc : $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$

i) Dans le premier cas de figure : $\|\vec{u}\| = 4$ et $\|\vec{v}\| = 3\sqrt{2}$ et $\vec{u}.\vec{v} = 12$

Donc : $\cos\alpha = \dfrac{12}{4\times 3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et puisque $\alpha \in [0;\pi]$ alors : $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

ii)Dans le deuxième cas de figure : $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{2}$ et $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u}.\vec{v} = -8$

Donc : $\cos\alpha = \dfrac{-8}{4\times 2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et puisque $\alpha \in [0;\pi]$ alors : $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$

iii) Dans le troisième cas de figure : $\|\vec{u}\| = 4$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{5}$ et $\vec{u}.\vec{v} = 4$

Donc : $\cos\alpha = \dfrac{4}{4\times\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ et puisque $\alpha \in [0;\pi]$ alors :

Avec la calculatrice on trouve : $\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right) = 63,45^\circ$

Exercice 10 : (**) Soit ABC un triangle tel que et $BC = 4cm$
$AC = 6cm$ et $AB = 3cm$ et I le milieu du segment $[BC]$
Calculer : AI
Solution : D'après le théorème de la médiane dans le triangle ABC on a :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

Donc : $3^2 + 6^2 = 2AI^2 + \dfrac{1}{2}4^2$ donc : $9 + 36 = 2AI^2 + \dfrac{16}{2}$

Donc : $AI^2 = \dfrac{37}{2}$ par suite : $AI = \sqrt{\dfrac{37}{2}}$

Exercice 11 : (**) Soit $EFGH$ un parallélogramme tel que et $EF = 3$ et $EH = 5$ et $FEH = \dfrac{3\pi}{4}$
Calculer la Surface du triangle EFH et la Surface du parallélogramme $EFGH$
Solution : a) $S_{EFH} = \dfrac{1}{2}EF\times EH\sin E = \dfrac{1}{2}3\times 5\sin\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{15}{2}\sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$S_{EFH} = \dfrac{15}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{15}{4}\sqrt{2}$ b) $S_{EFGH} = 2\times S_{EFH} = 2\times\dfrac{15}{4}\sqrt{2} = \dfrac{15}{2}\sqrt{2}$

Exercice 12 : (**) Soit ABC un triangle isocèle en A tel que et $AB=5$ et $BC=6$

Soit I le milieu du segment $[BC]$

1) Calculer $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IC}$

2) Soit K la projection orthogonale du point C sur la droite (AB)

Calculer : BK

Solution : 1) a) Calculons $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}$:

1*iére méthode :* I le milieu du segment $[BC]$ et ABC un triangle isocèle en A

Cela équivaut à dire que (AI) est une hauteur du triangle ABC donc : $(AI)\perp(BC)$

Par suite $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

2*iére méthode :*

$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AI}\cdot 2\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IC}=-2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IC}$

Et d'après le Théorème d'Al Kashi dans le triangle AIC on a : $AC^2=AI^2+IC^2-2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IC}$

Donc : $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IC}=\frac{1}{2}\left(AI^2+IC^2-AC^2\right)$

Donc : $-2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IC}=-\left(AI^2+IC^2-AC^2\right)$

Donc : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}=-\left(AI^2+\left(\frac{BC}{2}\right)^2-AC^2\right)$

Et D'après le théorème de la médiane dans ABC on a : $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{BC^2}{2}$

Donc : $AI^2=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\frac{BC^2}{2}\right)$ par suite : $AI^2=\frac{1}{2}\left(25+25-\frac{36}{2}\right)=16$

Par suite : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}=-(16+9-25)=0$

b) Calculons $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$:

D'après le Théorème d'Al Kashi dans le triangle ABC on a :

$AC^2=BA^2+BC^2-2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(BA^2+BC^2-AC^2\right)$

Donc : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(25+36-25^2\right)=18$

c) Calculons $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IC}$:On sait que : $\overrightarrow{IC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ car I le milieu du segment $[BC]$

Donc : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{AC}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

Et on a : $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\left(CA^2+CB^2-AB^2\right)$

Donc : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IC}=\frac{1}{4}\left(25+36-25^2\right)=9$

2) on a : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=18$ et puisque K est la projection orthogonale du point C sur la droite (AB)

Alors : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BA}$ donc : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BA}=18$

Donc : $BK\times BA=18$ par suite : $BK=\frac{18}{BA}=\frac{18}{5}$

Exercice13 : (***) Soit ABC un triangle tel que et $AB=2\sqrt{2}$ et $AC=3$ et $BAC=\frac{\pi}{4}$

1) a) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

b) En déduire la distance BC

2) Soit I le milieu du segment $[BC]$

Calculer la distance AI

3) Soit J le milieu du segment $[AB]$; Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AJ}$

4) Soit K tel que $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Montrer que les droites : (IJ) et (BK) sont perpendiculaires

Solution : 1) a) Calculons $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\cos BAC$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\sqrt{2}\times 3\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\sqrt{2}\times 3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=6$

b) déduction de la distance BC ?

D'après le Théorème d'Al Kashi dans le triangle ABC on a :

$BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Donc $BC^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2+3^2-2\times 6=8+9-12=5$ par suite : $BC=\sqrt{5}$

2) Calculons la distance AI : on a : I le milieu du segment $[BC]$

D'après le théorème de la médiane dans ABC on a : $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{BC^2}{2}$

Donc : $AI^2=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\frac{BC^2}{2}\right)$

Donc : $AI^2=\frac{1}{2}\left(8+9-\frac{5}{2}\right)=\frac{29}{4}$ Par suite : $AI=\frac{\sqrt{29}}{2}$

3) Calculons $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AJ}$

On a : J le milieu du segment $[AB]$ donc : $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2=\frac{1}{2}AB^2=\frac{1}{2}8=4$

4) on a : $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{IJ}=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}\right)\cdot\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{IJ}$

Donc : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{IJ}=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}\right)\cdot\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{IJ}$

Et puisque : I le milieu du segment $[BC]$ et J le milieu du segment $[AB]$

Alors : $\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{IJ}=\left(-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}^2=\frac{6}{2}-\frac{9}{3}=3-3+0$

Et puisque : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{IJ}=0$ alors les droites : (IJ) et (BK) sont perpendiculaires

Exercice 14 : (***) Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que : $AB = AD$ et $CD = CB$

1) Montrer que : les deux droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires

2) En déduire que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$

3) Nous prenons dans cette question : $AB = AD = 3cm$ et $\left(\overline{BAD}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

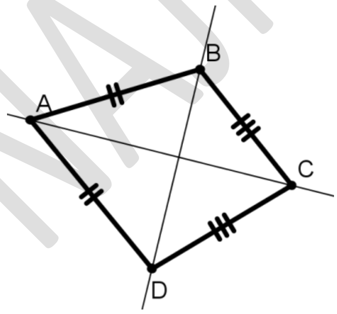
a) Calculer : BD

b) En déduire $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Solution : 1) Montrons que : $(AC) \perp (BD)$?

Puisque : $AB = AD$ et $CD = CB$ alors les points A et C appartiennent a la médiatrice (AC) Du segment $[BD]$

Donc les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires



2) En déduisons que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}\right).\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC}$

Or $(AC) \perp (BD)$ donc : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC} = 0$

Par suite : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$

3) a) Calculons : BD ?

D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABD nous obtenons :

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD \cos BAD$

$BD^2 = 18 - 18\cos\frac{\pi}{4} = 9\left(2 - \sqrt{2}\right)$

D'où : $BD = \sqrt{9\left(2-\sqrt{2}\right)} = 3\sqrt{2-\sqrt{2}}$

b) En déduisons $\sin\frac{\pi}{8}$:Soit I le point d'intersection des deux diagonales $[BD]$ et $[AC]$

Nous avons ABD est un triangle isocèle et (AC) est la médiatrice du segment $[BD]$

Donc : (AC) est la bissectrice de l'angle BAD

Donc : $\left(\overline{BAI}\right) \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$

D'autre part : le triangle ABI est rectangle en I

Donc : $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{BI}{AB} = \frac{\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2-\sqrt{2}}}{3} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Exercice 15 : (****) Soient A et B deux points distincts du plan. I et J deux point tels que : $\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{JA} + 3\overrightarrow{JB} = \vec{0}$

1) Représenter les points I et J

2) Montrer que pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MJ}$

3) Déterminer et représenter l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $\frac{MA}{MB} = 2$

Solution : 1) Représentation des points I et J (voir la figure)

- $\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ Équivaut à : $\overrightarrow{IA} - 3\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$

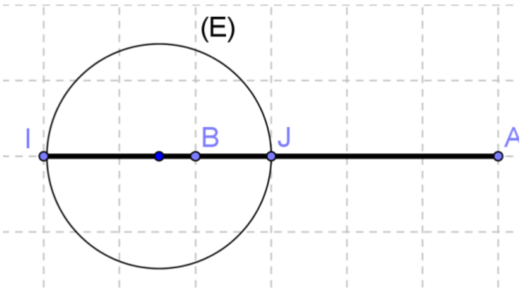
Équivaut à : $-2\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

- $\overrightarrow{JA}+3\overrightarrow{JB}=\vec{0}$ Équivaut à : $\overrightarrow{JA}+3\left(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}$

Équivaut à : $4\overrightarrow{JA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$



2)

- Montrons que pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MI}$

$\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}-3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=-2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}=-2\overrightarrow{MI}$ car $\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Donc : $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MI}$ pour tout point M du plan

- Montrons que pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MJ}$

$\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JA}+3\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JB}\right)=4\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JA}+3\overrightarrow{JB}=4\overrightarrow{MJ}$ car $\overrightarrow{JA}+3\overrightarrow{JB}=\vec{0}$

Donc : $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MJ}$ pour tout point M du plan

3) Déterminons l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $\frac{MA}{MB}=3$?

$M\in(E)$ Équivaut à : $\frac{MA}{MB}=3$

Équivaut à : $MA=3MB$ Équivaut à : $MA^2-9MB^2=0$

Équivaut à : $\overrightarrow{MA}^2-9\overrightarrow{MB}^2=0$ Équivaut à : $\left(\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right)=0$

Équivaut à : $-2\overrightarrow{MI}\cdot4\overrightarrow{MJ}=0$

Équivaut à : $-8\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}=0$

Équivaut à : $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}=0$

Équivaut à : $(MI)\perp(MJ)$

Équivaut à dire que : le point M appartient au cercle de diamètre $[IJ]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien