Tronc commun Sciences BIOF

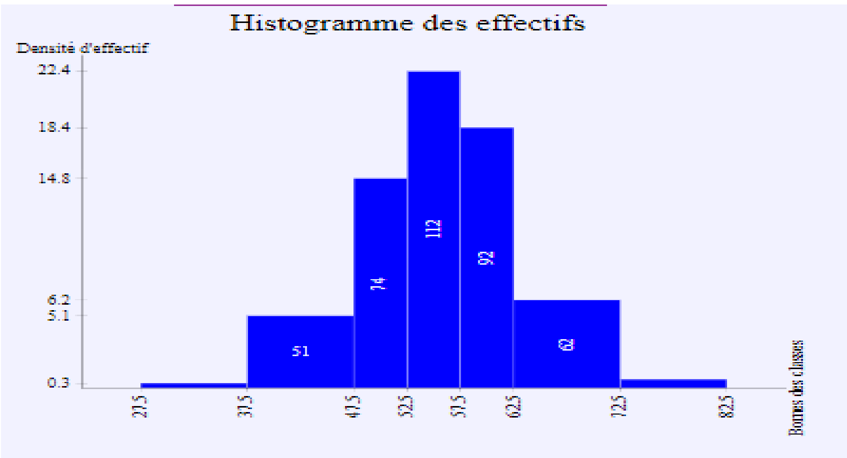
Correction Série N°5 : Statistique

Exercice 1 : (*) (**) Dans une ferme, à une date déterminée, on a pesé les œufs qui ont été produits (les masses des œufs sont exprimées en grammes) :

Masse de l'œuf	$[27,5;37,5[$	$[37,5;47,5[$	$[47,5;52,5[$	$[52,5;57,5[$	$[57,5;62,5[$	$[62,5;72,5[$	$[72,5;82,5[$
(Effectifs)	3	**51**	**74**	**112**	**92**	**62**	**6**

1) Construire l'histogramme des effectifs, correspondant à cette série
2) Déterminer la classe modale de cette série
3) Calculer la moyenne de cette série
4) Calculer la Variance et L'écart-type

Solution :



2) la classe modale de cette série est $[52,5;57,5[$:

3) calcul de la moyenne de cette série : (On utilise les centres de chaque classe) $m = 55,73$

4) Après les calculs on trouve : $V \simeq 65,36$

Écart-type : $\sigma = \sqrt{V} \simeq \sqrt{65,36} \simeq 8,08$

Exercice 2 : (*) (**) On a demandé aux élèves d'une classe de seconde combien de livres ils avaient lus pendant l'année. On a synthétisé les résultats dans le tableau suivant :

Nombre de livres lus	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Nombre élèves	2	**7**	12	6	2	3

1) Déterminer la médiane de cette série.

2) Combien de livres un élève de cette classe lit - il en moyenne ?

Solution :1) le Nombre total d'élèves $N = 32$

Nombre de livres lus	1	2	3	4	5	6
Nombre d'élèves	2	7	12	6	2	3
Effectifs cumulés	2	9	21	27	29	32

La médiane : **la demie effective** total est : $\frac{32}{2} = 16$

Le plus petit effectif cumulé supérieur ou égale à 16 est 21
Le Nombre de livres lus associé est 3 donc la médiane Est 3
2) la moyenne est :
$$m = \frac{1\times 2+2\times 7+3\times 12+4\times 6+5\times 2+6\times 33}{32} = \frac{104}{32} = 3,25$$
Un élève de cette classe lit donc en moyenne $3,25$ livres par an

Exercice 3 : (*) (**) Un professeur a corrigé les devoirs en trois lots :
1er lot : 12 copies, moyenne 11,2
2ème lot : 9 copies, moyenne 10,3
3ème lot : 14 copies, moyenne 10,7
Quelle est la moyenne de l'ensemble de la classe ? (Arrondir au centième)

Solution la moyenne de l'ensemble de la classe est : $m = \frac{12\times 11,2+9\times 10,3+14\times 10,7}{12+9+14} = \frac{104}{35} \simeq 10,7$

Exercice 4 : (*) (**) Le tableau ci-dessous donne les salaires mensuels **(**en dh**)** des employés d'une entreprise.

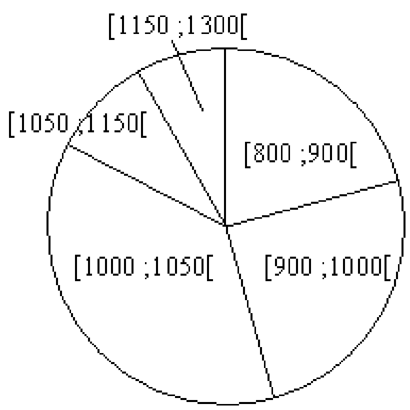
Salaire	[800 ; 900[	[900 ; 1000[	[1000 ;	[1050 ;	[1150 ;
Effectif	42	49	74	19	16

1) Représenter cette série par un diagramme circulaire
2) Calculer le salaire moyen dans cette entreprise. Que penser d'un tel résultat ?
3) dans cette entreprise, combien d'employés gagnent au plus 1050 euros ?
4) Dresser le polygone des effectifs cumulés croissants et lire une valeur approchée de la médiane (le salaire correspondant à un effectif cumulé de 100 salariés cad : la moitié de l'effectif).
5) Soit Q_1 le salaire qui corresponde à un effectif cumulé de : $\frac{1}{4}\times 200 = 50$ et Q_3 le salaire qui corresponde à un effectif cumulé de : $\frac{3}{4}\times 200 = 150$
Calculer de manière précise la médiane et Q_1 et Q3
6) Calculer l'écart type de cette série statistique.

Solution 1) Effectif total est : N=200
1) Pour trouver les angles (en degré) correspondant aux effectifs nous calculons d'abord le coefficient de proportionnalité $k = \frac{360^\circ}{N} = \frac{360^\circ}{200} = 1,8$
Par suite pour trouver les angles des effectifs en question nous multipliions chaque effectif par $k = 1,8$

Salaire (en dh)	[800 ; 900[	[900 ; 1000[	[1000 ; 1050[	[1050 ; 1150[	[1150 ; 1300[
Effectif	42	49	74	19	16
Angle en degré	$42\times 1.8 = 75.6^\circ$	$49\times 1.8 = 88.2^\circ$	$74\times 1.8 = 133.2^\circ$	$19\times 1.8 = 34.2^\circ$	$16\times 1.8 = 28.8^\circ$

Répartition des salaires au sein d'une entreprise



2) Salaire moyen : (On utilise les centres de chaque classe)

On doit d’abord calculer le centre des classes : $[a_i ; a_{i+1}[$

Le centre de la classe $[a_i ; a_{i+1}[$ est : $c_i = \dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}$

Le centre de la classe $[800;900[$ est : $c_1 = \dfrac{800+900}{2} = 850$

Le centre de la classe $[900;1000[$ est : $c_2 = \dfrac{900+1000}{2} = 950$

Le centre de la classe $[1000;1050[$ est : $c_3 = \dfrac{1000+1050}{2} = 1025$

Le centre de la classe $[1050;1150[$ est : $c_4 = \dfrac{1050+1150}{2} = 1100$

Le centre de la classe $[1150;1300[$ est : $c_5 = \dfrac{1150+1300}{2} = 1225$

Calculons donc la moyenne arithmétique :

$$m = \frac{n_1 \times c_1 + n_2 \times c_2 + n_3 \times c_3 + n_4 \times c_4 + n_5 \times c_5}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5} = \frac{\sum_{i=1}^{5} n_i \times c_i}{\sum_{i=1}^{5} n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{5} n_i \times c_i}{N}$$

$$m = \frac{42 \times 850 + 49 \times 950 + 74 \times 1025 + 19 \times 1100 + 16 \times 1225}{200}$$

$$m = \frac{198600}{200} = 993$$

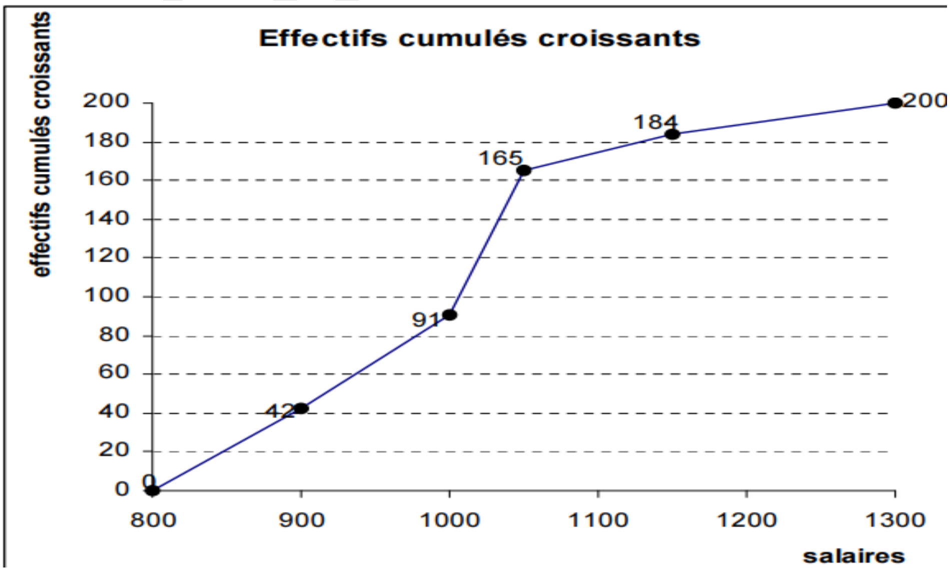
Le salaire moyen dans cette entreprise est donc de 993 €. Il n’est pas forcément très représentatif de cette entreprise, car plus de la moitié des employés y gagnent plus de 1000 dh !

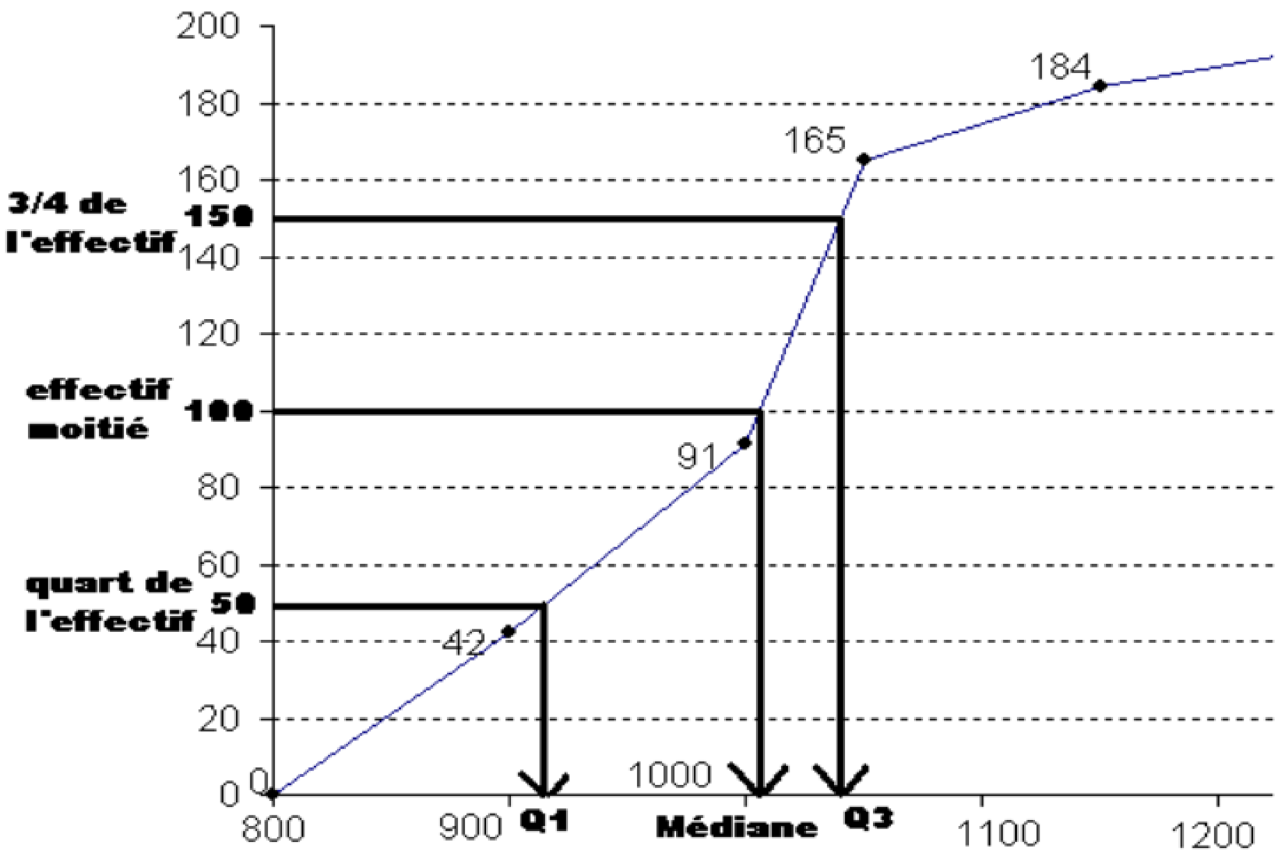
3) Pour répondre à cette question, il faut dresser le tableau des effectifs cumulés croissants :

Salaire	[800 ;900[	[900 ;1000[	[1000 ;1050[	[1050 ;1150[	[1150 ;1300[
Effectifs cumulés		42+49	91+74	165+19	184+16

Ainsi, 165 employés gagnent au plus 1050 dh, au sein de cette entreprise

4) Dressage du polygone des effectifs cumulés croissants et lire une valeur approchée de la médiane :
A partir du tableau précédant on dresse le polygone des effectifs cumulés croissants





Calcul graphique de la médiane :
C'est le salaire correspondant à un effectif cumulé de 100 salariés (moitié de l'effectif).
On se place ainsi dans l'axe des ordonnées à l'effectif cumulé 100, et on lit l'antécédent de 100.
Donc : On lit graphiquement
La Médiane ≈ 1010

5) Calcul précis de la moyenne et des quartiles Q_1 et Q_3
Pour calculer la médiane, on va réaliser une interpolation linéaire entre les
Points A (1000 ;91) et B (1050 ;165)

L'équation de la droite (AB) est de la forme : $y = mx + p$ avec : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{165-91}{1050-1000} = 1.48$

Donc : $y = 1.48x + p$

Pour trouver la valeur de p , on utilise les coordonnées de A (ou B) : $y = 1.48x_A + p$

Donc : $p = y_A - 1.48x_A = 91 - 1.48\times 1000 = -1389$

L'équation de (AB) est donc $y = 1.48x - 1389$. On trouve la médiane en calculant l'antécédent de la moitié de l'effectif (c'est à dire 200/2=100)

Par la fonction affine $x \xrightarrow{f} 1.48x + p$

C'est-à-dire : en résolvant l'équation : $100 = 1.48x - 1389$

$100 = 1.48x - 1389$ Équivaut à : $x = \frac{1489}{1.48} \simeq 1006.$

Ainsi Me ≈1006

Puisque le quartile Q_3 semble lui aussi appartenir à l'intervalle $[1000;1050[$, on utilise la même droite, et on résout l'équation : $150 = 1.48x - 1389$

$150 = 1.48x - 1389$ Équivaut à : $x = \frac{1539}{1.48} \simeq 1039.86$

Ainsi : $Q_3 \approx 1040$
De la même manière, pour déterminer le quartiles Q_1

On doit déterminer l'équation de la droite reliant les points
(900 ;42) et (1000 ;91). Cette droite a pour équation : $y = 1.49x - 399$, et la résolution de l'équation

$1.49x - 399 = 50$ Équivaut à : $x = \dfrac{449}{0.49} \simeq 916.33$ fournit $Q_1 \approx 916$

6) Calcul de l'écart type de cette série statistique.
Commençons par calculer la Variance qui est la moyenne des carrés des écarts à la valeur

C'est-à-dire : $V = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} n_i \left|x_i - m\right|^2}{\sum_{i=1}^{5} n_i} = \dfrac{42 \times \left|850 - 993\right|^2 + 49 \times \left|950 - 993\right|^2 + \ldots + 16 \times \left|1225 - 993\right|^2}{200}$

Après les calculs on trouve : $V = \dfrac{2103950}{200} = 10519.75$

Écart-type : $\sigma = \sqrt{V} \simeq \sqrt{10519.75} \simeq 102.6$

La statistique a pour objet de recueillir des observations portant sur des sujets présentant une certaine propriété et de traduire ces observations par des nombres qui permettent d'avoir des renseignements sur cette propriété.
Le but de la statistique descriptive est de structurer et de représenter l'information contenue dans les données
Les statistiques sont utilisées de nombreuses façons chaque jour
Pensez-y : avez-vous utilisé des statistiques au cours de la dernière semaine ?

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien