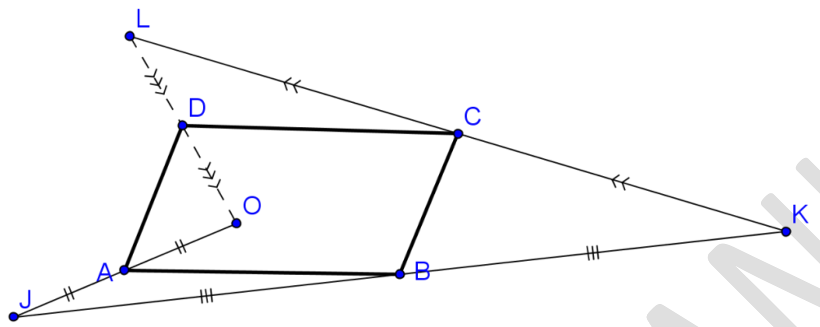
Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°5 :
Les Transformations du plan

Exercice 1 : (***) $ABCD$ un parallélogramme et O un point qui n'appartient pas à ces cotés
Et soient : J le symétrique de O par rapport a A
Et K le symétrique de J par rapport a B
Et L le symétrique de K par rapport a C
Montrer que : O est le symétrique de L par rapport a D

Solution :



On a : $\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KL}$ donc : $\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OK}+2\overrightarrow{KC}$ car C le milieu du segment $[KL]$

Donc : $\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{JK}+2\overrightarrow{KC}$

Donc : $\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OJ}+2\overrightarrow{BK}+2\overrightarrow{KC}$

Donc : $\overrightarrow{OL}=2\overrightarrow{OA}+2\left(\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{KC}\right)$ car A le milieu du segment $[OJ]$

Donc : $\overrightarrow{OL}=2\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{BC}=2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}\right)$ or $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ car $ABCD$ un parallélogramme

Donc : $\overrightarrow{OL}=2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}\right)=2\overrightarrow{OD}$

Donc : D est le milieu du segment $[IK]$ et par suite : $S_D(L)=O$

Exercice 2 : (***) A , B, C et D sont quatre points du plan deux a deux distincts.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs fixés
Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ qui transforme A en D et C en B
Soit $t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{v}$ qui transforme B en A
Déterminer la translation qui transforme C en D

Solution : Nous avons : $t_{\vec{u}}(A)=D$ Équivaut à : $\overrightarrow{AD}=\vec{u}$ et $t_{\vec{u}}(C)=B$ Équivaut à : $\overrightarrow{CB}=\vec{u}$

Et on a : $t_{\vec{v}}(B)=A$ Équivaut à : $\overrightarrow{BA}=\vec{v}$

On a : $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$ donc : $\overrightarrow{CD}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{u}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{CD}=2\vec{u}+\vec{v}$

Par suite : la translation qui transforme C en D est la translation $t_{\vec{w}}$ de vecteur : $\vec{w}=2\vec{u}+\vec{v}$

Exercice 3 : (**) Soient deux points fixes distincts A et B du plan.
Soit T une transformation du plan qui transforme chaque point M en M' tel que :
$\overrightarrow{M'A}-\overrightarrow{M'B}+5\overrightarrow{MM'}=\vec{0}$
1) En utilisant la propriété caractéristique d'une translation montrer que T est une translation
2) Déterminer un vecteur de la translation T

Solution :1) Soient M et N deux points du plan nous avons :

$T(M)=M'$ Équivaut à : $\overrightarrow{M'A}-\overrightarrow{M'B}+5\overrightarrow{MM'}=\vec{0}$ (1)

$T(N)=N'$ Équivaut à : $\overrightarrow{N'A}-\overrightarrow{N'B}+5\overrightarrow{NN'}=\vec{0}$ (2)

$(2)-(1)$ Donne : $\overrightarrow{M'A}-\overrightarrow{M'B}+5\overrightarrow{MM'}-\overrightarrow{N'A}+\overrightarrow{N'B}-5\overrightarrow{NN'}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{M'A}+\overrightarrow{AN'}+\overrightarrow{N'B}+\overrightarrow{BM'}+5\overrightarrow{MM'}+5\overrightarrow{N'N}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{M'N'}+\overrightarrow{N'M'}+5\overrightarrow{MM'}+5\overrightarrow{N'N}=\vec{0}$

Équivaut à : $5\overrightarrow{MM'}+5\overrightarrow{N'N}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{NN'}$

Et d'après la propriété caractéristique d'une translation cela veut dire que T est une translation

2) déterminons un vecteur de la translation T :

$T(M)=M'$ Équivaut à : $\overrightarrow{M'A}-\overrightarrow{M'B}+5\overrightarrow{MM'}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{BA}+5\overrightarrow{MM'}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ c'est-à-dire : $t_{\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}}(M)=M'$

Par suite : T est la translation de vecteur $\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ c'est-à-dire : $T=t_{\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}}$

Exercice 4 : (***) Soient deux points fixes différents A et B du plan.

Soit f une transformation du plan qui transforme chaque point M en M' tel que :

$7\overrightarrow{MB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{M'M}-7\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Montrer que f est une translation et Trouver son vecteur

Solution : Pour chaque point M du plan nous avons :

$f(M)=M'$ Équivaut à : $7\overrightarrow{MB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{M'M}-7\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Équivaut à : $\frac{2}{3}\overrightarrow{M'M}+7\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=\vec{0}$

Équivaut à : $\frac{2}{3}\overrightarrow{M'M}+7\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=\frac{21}{2}\overrightarrow{BA}$

Équivaut à : $t_{\frac{21}{2}\overrightarrow{BA}}(M)=M'$ Cela veut dire que : f est une translation de vecteur $\frac{21}{2}\overrightarrow{BA}$

Exercice 5 : (***) ABC un triangle tel que : $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et m un paramètre réel

Soit f une transformation du plan qui transforme chaque point M en M' tel que :

$\overrightarrow{MM'}=2m\overrightarrow{MA}+\left(m+\frac{3}{2}\right)\overrightarrow{MB}-3\left(m+\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{MC}$

1) Monter que : pour tout réel m f est une translation dont trouvera son vecteur

2) Déterminer l'image de la droite (BC) par la translation f et en déduire l'image de la droite (AB) par la translation f

Solution :1) Montrons que : pour tout réel m f est une translation dont trouvera son vecteur

Soit M un point du plan (P) et M' son image par la transformation f

On a : $\overrightarrow{MM'} = 2m\overrightarrow{MA} + \left(m+\frac{3}{2}\right)\overrightarrow{MB} - 3\left(m+\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{MM'} = 2m\overrightarrow{MA} + m\overrightarrow{MB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{MB} - 3m\overrightarrow{MC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{MM'} = 2m\overrightarrow{MA} + m\overrightarrow{MB} - 3m\overrightarrow{MC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{MB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{MM'} = m\left(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right)\right) + \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right)$

$\overrightarrow{MM'} = m\left(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AC}\right) + \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MB}\right)$

$\overrightarrow{MM'} = m\left(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}\right) + \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$ et comme : $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ alors : $3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

Alors : $\overrightarrow{MM'} = m.\vec{0} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$

On a donc : $\overrightarrow{MM'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$ c'est-à-dire : $t_{\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}}(M) = M'$

Cela veut dire que : f est une translation de vecteur $\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$

2)Déterminons l'image de la droite (BC) par la translation : $t_{\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}}$

On a : $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ donc : les points $A\,;B\ et\ C$ sont alignés et $\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$ est un vecteur directeur de (BC)

Alors : $t_{\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}}((BC)) = (BC)$ et puisque : $(AB) = (BC)$ car les points $A\,;B\ et\ C$ sont alignés

Alors : $t_{\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}}((AB)) = t_{\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}}((BC)) = (BC)$

Exercice 6 : (***) ABC un triangle et D un point tel que : $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et I est le point d'intersection des droites (BD) et (AC) (Voir la figure)

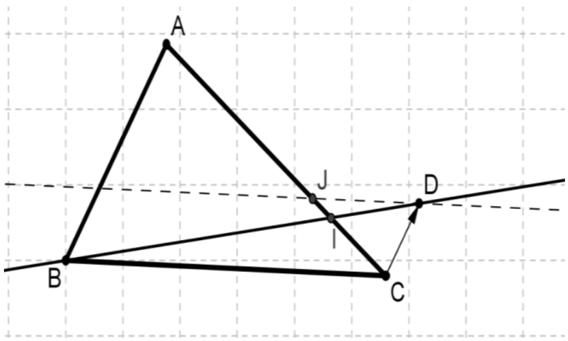
On considère l'homothétie h de centre I qui transforme le point A en C.

1) a) Déterminer l'image du point B par l'homothétie h

b) En déduire le rapport k de l'homothétie h

2) La droite qui passe par D et parallèle a (BC) coupe la droite (AI) en J

Montrer que $h(C) = J$



Solution : 1) a) On a : I qui transforme le point A en C

Et on a : $h((BI)) = (BI)$ car $I \in (BI)$ et I est le centre l'homothétie h

On a aussi : $h(A) = C$ et on sait que L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle donc L'image de la droite (AB) est la droite qui passe par l'image de A qui est C et parallèle a (AB) donc : $h((AB)) = (CD)$

On a : $B\in(BI)\cap(AB)$ donc : $h(B)\in h((BI))\cap h((AB))$ c'est-à-dire : $h(B)\in(BI)\cap(CD)$

Et puisque : $(BI)\cap(CD)=\{D\}$ alors : $h(B)=D$

b) Déduction du rapport k de l'homothétie h ?

On a $\begin{cases} h(A)=C \\ h(B)=D \end{cases}$ donc d'après la propriété caractéristique de l'homothétie on a : $\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$

Et puisque : $\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc $k=-\frac{1}{4}$

2) on a : $h((CI))=(CI)$ car $I\in(CI)$ et I est le centre l'homothétie h

On a aussi : $h(B)=D$ donc L'image de la droite (BC) est la droite qui passe

Par l'image de B qui est D et parallèle a (BC) donc : $h((BC))=(DJ)$

On a : $C\in(BC)\cap(CI)$ donc : $h(C)\in h((BC))\cap h((CI))$ c'est-à-dire : $h(C)\in(DJ)\cap(CI)$

Et puisque : $(DJ)\cap(CI)=\{J\}$ alors : $h(C)=J$

Exercice 7 : (***) Soit $ABCD$ un trapèze tel que : $(AB)\parallel(CD)$ et tels que : $AB=2$ et $CD=4$

1) Déterminer le centre et le rapport k de l'homothétie h qui transforme A en D et transforme B en C

2) Déterminer le centre et le rapport k de l'homothétie h' qui transforme A en C et transforme B en D

Solution :1) Soit $h(E,k)$: on a : $h(A)=D$ donc : $\overrightarrow{ED}=k\overrightarrow{EA}$

Donc : les points E ; A et D sont alignés par suite : $E\in(AD)$

Et On a : $h(B)=C$ donc : $\overrightarrow{EC}=k\overrightarrow{EB}$

Donc : les points E ; B et C sont alignés par suite : $E\in(BC)$

Donc le centre de l'homothétie h est le point E d'intersection des droites (AD) et (BC)

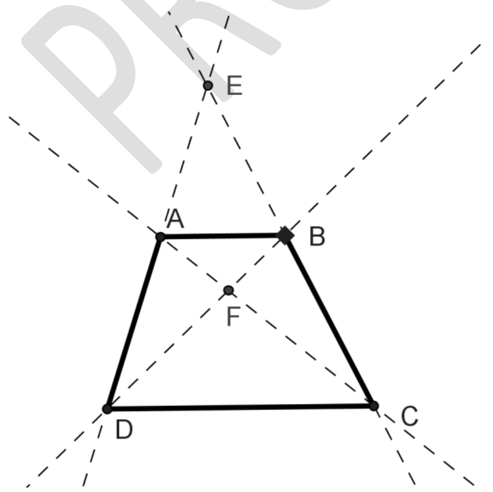
Et puisque : $(AB)\parallel(CD)$ donc d'après le théorème de Thalès dans le triangle EDC on a :

$$\frac{ED}{EA}=\frac{EC}{EB}=\frac{DC}{AB}=\frac{4}{2}=2$$

Et puisque : $\overrightarrow{ED}=k\overrightarrow{EA}$ alors : $\|\overrightarrow{ED}\|=\|k\overrightarrow{EA}\|$ c'est-à-dire : $ED=|k|EA$ donc : $\frac{ED}{EA}=|k|$

Et par suite : $|k|=2$ et puisque : $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EA}$ ont le même sens alors : $k=2$

Par conséquent : $h(E,2)$



2) Soit $h'(F,k')$

On a : $h'(A)=C$ donc : $\overrightarrow{FC}=k'\overrightarrow{FA}$

Donc : les points F ; A et C sont alignés par suite : $F\in(AC)$

Et On a : $h'(B)=D$ donc : $\overrightarrow{FD}=k'\overrightarrow{FB}$

Donc : les points F ; B et D sont alignés par suite : $F\in(BD)$

Donc le centre de l'homothétie h' est le point F d'intersection des droites (AC) et (BD)

Et puisque : $(AB)\parallel(CD)$ donc d'après le théorème de Thalès dans le triangle EDC on a :

$\frac{FD}{FA}=\frac{FC}{FB}=\frac{DC}{AB}=\frac{4}{2}=2$

Et puisque : $\overrightarrow{FD}=k'\overrightarrow{FB}$ alors : $\|\overrightarrow{FD}\|=\|k'\overrightarrow{FB}\|$ c'est-à-dire : $FD=|k'|FB$ donc : $\frac{FD}{FB}=|k'|$

Et par suite : $|k'|=2$ et puisque : $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EA}$ ont le sens contraire alors : $k'=-2$

Par conséquent : $h'(F,-2)$

Exercice 8 : (****) (C) un cercle de centre I et de rayon $R=1{,}5cm$.

Soit h l'homothétie de centre I et de rapport $k=2$

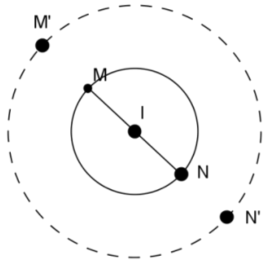
M , N sont deux points de (C) diamétralement opposés. M' et N' sont leurs images par h

1) Faite une figure et monter que : $\overrightarrow{M'M}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$.

2) Monter que : $\overrightarrow{N'M}=\frac{3}{2}\overrightarrow{NM}$.

3) Quelle est l'image du cercle (C) par l'homothétie h

Solution :1) La figure :



Montrons que : $\overrightarrow{M'M}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$?

$h(M)=M'$ Equivaut à : $\overrightarrow{IM'}=2\overrightarrow{IM}$

D'autre part : $\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{M'I}+\overrightarrow{IM}$ (relation de Chasles)

Donc ; $\overrightarrow{M'M}=-\overrightarrow{IM'}+\overrightarrow{IM}$

Donc ; $\overrightarrow{M'M}=-2\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IM}$

Donc ; $\overrightarrow{M'M}=-\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{MI}$ et puisque I le milieu du segment $[MN]$

D'où : $\overrightarrow{M'M}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$

3) Montrons que : $\overrightarrow{N'M}=\frac{3}{2}\overrightarrow{NM}$?

On a : $\overrightarrow{N'M}=\overrightarrow{N'M'}+\overrightarrow{M'M}$ (relation de Chasles)

Or on a : $\begin{cases} h(M)=M' \\ h(N)=N' \end{cases}$ donc $\overrightarrow{N'M'}=2\overrightarrow{NM}$ d'après la propriété caractéristique de l'homothétie

Et on aussi : $\overrightarrow{M'M}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ donc : $\overrightarrow{N'M}=2\overrightarrow{NM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{NM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{NM}$

4) puisque : $h(I)=I$ car c'est le centre de l'homothétie h

L'image du cercle (C) par l'homothétie h est le cercle (C') de centre I et de rayon :

$R'=2\times1.5cm=3cm$

Exercice 9: (****) ABC un triangle équilatéral. M , N et P sont les milieux des segments $[AB]$; $[AC]$ et $[BC]$ et I est le point d'intersection des médianes : (AP) ; (BN) et (CM)

A' , B' et C' sont respectivement les images des points : A , B et C par l'homothétie h de centre I et de rapport $k=\frac{1}{2}$

1) Faite une figure.

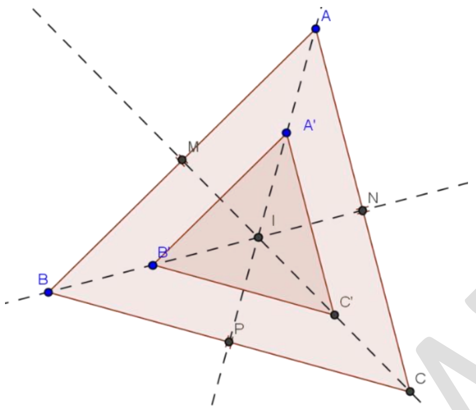
2) Monter que : $\frac{AB}{A'B'}=2$.

3) Monter que le triangle $A'B'C'$ est équilatéral

4) Monter que : $\frac{L}{L'}=2$ .sachant que L est le périmètre du triangle ABC et L' est le périmètre du triangle $A'B'C'$

5) Monter que : $\frac{S}{S'}=4$ .sachant que S est la surface du triangle ABC et S' est la surface du triangle $A'B'C'$

Solution :



2) Montrons que : $\frac{AB}{A'B'}=2$.

On a $\begin{cases} h(A)=A' \\ h(B)=B' \end{cases}$ donc $\overrightarrow{A'B'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ d'après la propriété caractéristique de l'homothétie

Donc : $\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\|=\left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right\|$ par suite : $A'B'=\frac{1}{2}AB$ D'où : $\frac{AB}{A'B'}=2$

3) Montrons que : le triangle $A'B'C'$ est équilatéral

On a : $A'B'=\frac{1}{2}AB$

De même on montre que : $A'C'=\frac{1}{2}AC$ et aussi $B'C'=\frac{1}{2}BC$

Et puisque : $AB=AC=BC$ alors : $A'B'=A'C'=B'C'$

D'où : le triangle $A'B'C'$ est équilatéral

4) Montrons que : $\frac{L}{L'}=2$?

On a : $\frac{AB}{A'B'}=2$ et $\frac{AC}{A'C'}=2$ et $\frac{BC}{B'C'}=2$

Donc : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=2$

Donc : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AB+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'}=\frac{L}{L'}$

Donc : $\frac{L}{L'}=\frac{AB}{A'B'}=2$

5) Montrons que : $\frac{S}{S'}=4$?

On a : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$ et $C=C'$ car l'homothétie conserve la mesure des angles

Or : la surface du triangle ABC est $S=\frac{1}{2}AC\times BC\times\sin C$ et la surface de $A'B'C'$ est

$S'=\frac{1}{2}A'C'\times B'C'\times\sin C'$

Par conséquent : $\frac{S}{S'}=\frac{AC\times BC\times\sin C}{A'C'\times B'C'\times\sin C'}=\frac{AC\times BC}{A'C'\times B'C'}=\frac{AC}{A'C'}\times\frac{BC}{B'C'}=2\times 2=4$

Exercice 10 : (****) A , B , C trois points du plan tel que B est le milieu du segment $[AC]$

Soit la droite (Δ) qui passe par A et différent de la droite (AB) et non perpendiculaire a (AB)

B' et C' les projections orthogonales respectivement des points B et C sur la droite (Δ)

I le point d'intersection des droites (BC') et $(B'C)$

Soit h l'homothétie de centre I et transforme B en C'

1) Déterminer l'image du point B' par l'homothétie h et rapport k de l'homothétie h

2) a) Déterminer le nombre réel x tel que : $\overrightarrow{BI}=x\overrightarrow{BC'}$

b) Déterminer l'ensemble (E) des points C' lorsque (Δ) varie

c) Déterminer l'ensemble (F) des points I lorsqu'elle varie sur (Δ)

d) Faire une figure sachant que : $AB=4cm$

Solution :1) h l'homothétie de centre I et $h(B)=C'$

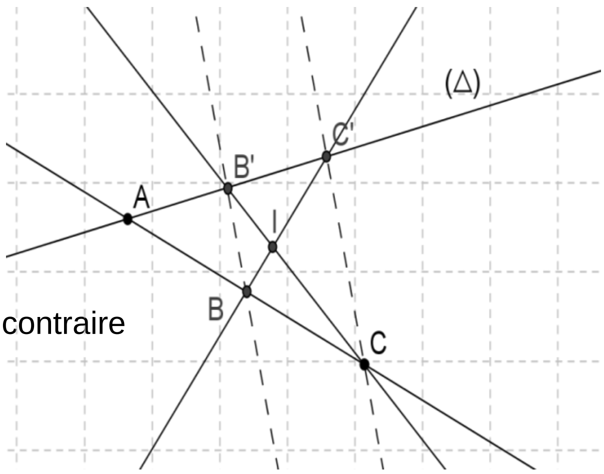
On a : $h(B)=C'$ donc : $\overrightarrow{IC'}=k\overrightarrow{IB}$

Et puisque : $(BB')\parallel(CC')$ donc d'après le théorème de Thalès on a : $\overrightarrow{IC}=k\overrightarrow{IB'}$

Donc : $h(B')=C$

Donc : d'après la propriété caractéristique d'une homothétie on a $\overrightarrow{CC'}=k\overrightarrow{B'B}$

Donc : $CC'=|k|B'B$ par suite : $\frac{CC'}{B'B}=|k|$



On considère le triangle ACC'

On a : B est le milieu du segment $[AC]$ et $(BB')\parallel(CC')$

Donc : B' est le milieu du segment $[AC']$ et $CC'=2B'B$

Par suite : $\frac{CC'}{B'B}=2$

Donc : $2=|k|$ et puisque : $\overrightarrow{B'B}$ et $\overrightarrow{CC'}$ ont le même sens contraire

Alors : $-2=k$

2)a) On a : $h(B)=C'$ donc : $\overrightarrow{IC'}=-2\overrightarrow{IB}$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC'}=-2\overrightarrow{IB}$

Donc : $3\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{BC'}$ par suite : $\overrightarrow{IB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC'}$ donc : $x = -\frac{1}{3}$

2)b) On a : $\widehat{AC'C}$ est un angle droit et A et C deux points fixes

Donc lorsque la droite (Δ) varie le point C' Varie su le cercle (Γ) de diamètre $[AC]$

Mais le point C' est tel que : $C' \neq A$ et $C' \neq C$

Donc l'ensemble (E) des points C' lorsque (Δ) varie est le (Γ) de diamètre $[AC]$privé des points A et C

C'est-à-dire : $(E) = (\Gamma) - \{A;C\}$

2)c) On a : $\overrightarrow{IB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC'}$ donc : $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC'}$

C'est-à-dire : I est l'image du point C' par l'homothétie $h'_{\left(B;\frac{1}{3}\right)}$

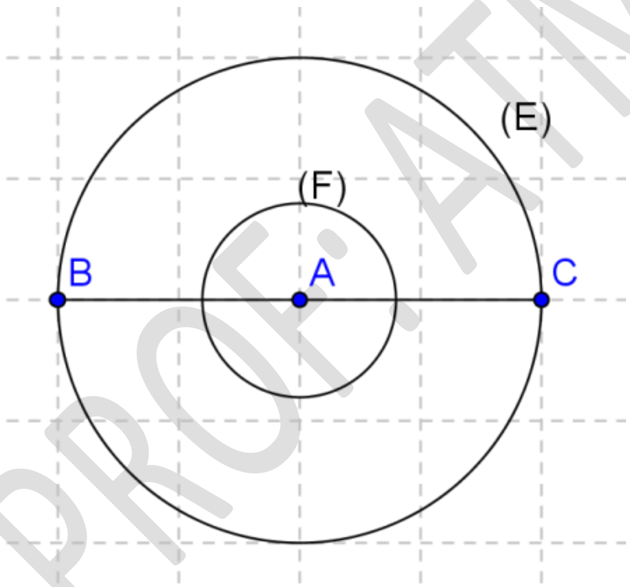
Donc lorsque le point C' varie su le cercle (Γ) alors le point I varie su le cercle (Γ') l'image du cercle(Γ) par l'homothétie $h'_{\left(B;\frac{1}{3}\right)}$ privé des points A' et I tel que : $h'(A) = A'$

Et on a le rayon du cercle (Γ') est : $r' = \frac{1}{3} \times r$ avec r le rayon du cercle (Γ)

Le centre du cercle (Γ') est : l'image du centre du cercle (Γ) par l'homothétie $h'_{\left(B;\frac{1}{3}\right)}$

Par suite : $(F) = (\Gamma') - \{A';I\}$

d) La figure sachant que : $AB = 4cm$



C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien