Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°5 : TRIGONOMÉTRIE1

Exercice1 : (*) 1) Donner la mesure en radians de l'angle de mesure 75°.

2) Donner la mesure en degrés de l'angle de mesure $\frac{5\pi}{6}$ rad.

Solution :1) $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\beta}{180}$ signifie que : $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{75}{180}$

$\alpha=75\times\frac{\pi}{180}=\frac{5\pi}{12}$ rad.

2) $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\beta}{180}$ c'est-à-dire : $\alpha\times180=\beta\times\pi$

$\beta=\frac{\alpha\times180}{\pi}=\frac{5\pi}{6}\times\frac{180}{\pi}=150°$

Exercice2 : (**):1) Déterminer l'abscisse curviligne principale de chacune des abscisses suivantes :a) -2024π b) $\frac{2019\pi}{4}$ c) $-\frac{2021\pi}{6}$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points :

$A\left(\frac{\pi}{4}\right)$; $B\left(\frac{3\pi}{2}\right)$; $C\left(-2024\pi\right)$; $D\left(\frac{2019\pi}{4}\right)$; $E\left(-\frac{2021\pi}{6}\right)$

Solution :1) a) $-2024\pi=0+2\left(-1012\right)\pi$ et $0\in\left]-\pi;\pi\right]$

Donc l'abscisses curviligne principale associée a -2024π est $\alpha=0$

b) $x=\frac{2019\pi}{4}$ *Méthode1 :* Soit α l'abscisse curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $\alpha-x=2k\pi$ c'est-à-dire : $\alpha=\frac{2019\pi}{4}+2k\pi$ et $\alpha\in\left]-\pi;\pi\right]$

C'est-à-dire : $-\pi<\frac{2019\pi}{4}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$ équivalent à : $-\pi-\frac{2019\pi}{4}<2k\pi\leq\pi-\frac{2019\pi}{4}$

Équivalent à : $-\frac{2023\pi}{4}<2k\pi\leq-\frac{2015\pi}{4}$

Équivalent à : $-\frac{2023}{4}<2k\leq-\frac{2015}{4}$ et $k\in\mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $-\frac{2023}{8}<k\leq-\frac{2015}{8}$

$-252,8<k\leq-251,875$ et $k\in\mathbb{Z}$

Alors $k=-252$ et donc $\alpha=\frac{2019\pi}{4}+2k\pi=\frac{2019\pi}{4}+2\left(-252\right)\pi=\frac{2019\pi-2016\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

Donc l'abscisse curviligne principale associée à : $x=\frac{2019\pi}{4}$ est $\alpha=\frac{3\pi}{4}$

Méthode2 : On a $x=\frac{2019\pi}{4}=\frac{2016\pi+3\pi}{4}=336\pi+\frac{3\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+168\times2\pi$ et $\alpha=\frac{3\pi}{4}\in\left]-\pi;\pi\right]$ donc l'abscisse curviligne principale associée à : $x=\frac{2019\pi}{4}$ est $\alpha=\frac{3\pi}{4}$

c) $-\frac{2021\pi}{6}$: *Méthode1 :*

Soit α l'abscisse curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $\alpha - x = 2k\pi$ c'est-à-dire : $\alpha = -\frac{2021\pi}{6} + 2k\pi$ et $\alpha \in \left]-\pi\,;\pi\right]$

C'est-à-dire : $-\pi < -\frac{2021\pi}{6} + 2k\pi \le \pi$ et $k\in\mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $-\pi + \frac{2021\pi}{6} < 2k\pi \le \pi + \frac{2021\pi}{6}$

Équivalent à : $\frac{2015\pi}{6} < 2k\pi \le \frac{2027\pi}{6}$ Équivalent à : $\frac{2015}{6} < 2k \le \frac{2027}{6}$

Équivalent à : $\frac{2015}{12} < k \le \frac{2027}{12}$ et $k\in\mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $167{,}9.. < k \le 168{,}9..$ et $k\in\mathbb{Z}$

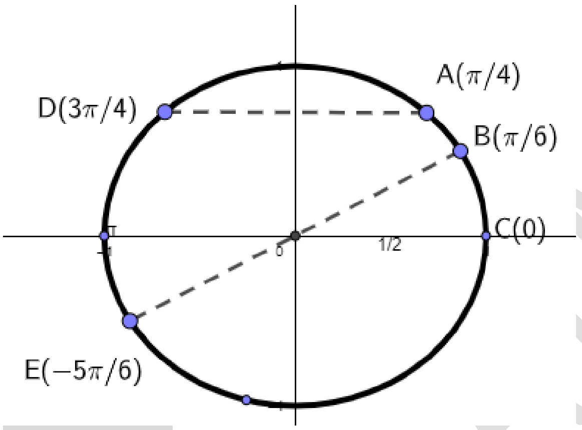
Alors $k = 168$ et donc $\alpha = -\frac{2021\pi}{6} + 2k\pi = -\frac{2021\pi}{6} + 2(168)\pi = \frac{-2021+2016\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$

Donc : l'abscisse curviligne principale associée à $-\frac{2021\pi}{6}$ est : $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$

Méthode2 : On a $-\frac{2021\pi}{6} = \frac{-2016\pi - 5\pi}{6} = 336\pi - \frac{5\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} + 2\times 168\pi$ et $-\frac{5\pi}{6} \in \left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc : l'abscisse curviligne principale associée à : $-\frac{2021\pi}{6}$ est : $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points :



Exercice3 : (**) A ; B ; C et D sont quatre points du plan.

Démontrer l'égalité : $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}}\right) \equiv 0[2\pi]$

Solution : $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}}\right)[2\pi]$

$\equiv \left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{CD}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AB}}\right)[2\pi]$

Car : $\left(\overline{-\vec{u};-\vec{v}}\right) \equiv \left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)[2\pi]$

$\equiv \left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AB}}\right)[2\pi]$ Grâce à la relation de Chasles

$\equiv 0[2\pi]$

Exercice4 : (**) Dans chacun des cas suivants déterminer $\cos x$

1) $x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right[$ et $\sin x = \frac{1}{4}$ 2) $x \in \left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ et $\sin x = -0.6$ 3) $x \in \left[-\frac{\pi}{3};0\right]$ et $\sin x = -\frac{2}{3}$

Solution :1) on a $\sin x = \frac{1}{4}$ et on a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Donc : $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ donc : $\cos^2 x = 1 - \frac{1}{16}$

Donc : $\cos^2 x=\frac{15}{16}$ signifie que : $\cos x=\frac{\sqrt{15}}{4}$ ou $\cos x=-\frac{\sqrt{15}}{4}$

Or $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right[$ donc : $\cos x\le 0$ donc : $\cos x=-\frac{\sqrt{15}}{4}$

2) on a $\sin x=-0.6$ et on a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Donc : $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ donc $\cos^2 x=1-(-0.6)^2=1-0.36$

Donc : $\cos^2 x=0.64$ donc : $\cos x=0.8$ ou $\cos x=-0.8$

Or $x\in\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]\subset\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ donc : $\cos x\ge 0$ par suite : $\cos x=0.8$

3) On a $\sin x=\frac{1}{4}$ et on a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Donc : $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ donc $\cos^2 x=1-\frac{4}{9}$

Donc : $\cos^2 x=\frac{5}{9}$ donc : $\cos x=\frac{\sqrt{5}}{3}$ ou $\cos x=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

Or $x\in\left[-\frac{\pi}{3};0\right]$ donc : $\cos x\ge 0$ donc : $\cos x=\frac{\sqrt{5}}{3}$

Exercice5 : (**) Soit $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$; On pose : $A=\cos^2 x+3\cos x\sin x-2\sin^2 x$

1) Montrer que : $A=\cos^2 x\left(1+3\tan x-2\tan^2 x\right)$

2) Sachant que $\tan x=1+\sqrt{2}$ calculer : A

Solution : 1) Montrons que : $A=\cos^2 x\left(1+3\tan x-2\tan^2 x\right)$

On a : $A=\cos^2 x+3\cos x\sin x-2\sin^2 x$

Donc : $A=\cos^2 x\left(1+3\frac{\cos x\sin x}{\cos^2 x}-2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)$ c'est-à-dire :: $A=\cos^2 x\left(1+3\frac{\sin x}{\cos x}-2\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2\right)$

Donc : $A=\cos^2 x\left(1+3\tan x-2(\tan x)^2\right)$

Donc : $A=\cos^2 x\left(1+3\tan x-2\tan^2 x\right)$

2) Sachant que $\tan x=1+\sqrt{2}$ calculons : A

On a : $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ par suite : $\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}$

Donc : $\cos^2 x=\frac{1}{1+\left(1+\sqrt{2}\right)^2}$

C'est-à-dire : $\cos^2 x=\frac{1}{1+1+2\sqrt{2}+2}=\frac{1}{4+2\sqrt{2}}=\frac{4-2\sqrt{2}}{\left(4-2\sqrt{2}\right)\left(4+2\sqrt{2}\right)}=\frac{4-2\sqrt{2}}{8}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

On a : $A=\cos^2 x\left(1+3\tan x-2\tan^2 x\right)$

Donc : $A=\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)\left(1+3\left(1+\sqrt{2}\right)-2\left(1+\sqrt{2}\right)^2\right)$

Donc : $A=\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)\left(1+3+3\sqrt{2}-6-4\sqrt{2}\right)$

Donc : $A=-\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)=-\frac{1}{4}\left(2^2-\sqrt{2}^2\right)=-\frac{1}{4}(4-2)=-\frac{1}{2}$

Exercice6 : (**) Soit $x\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$

1) Montrer que : $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos(\pi-x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin(\pi-x)=1-2\cos^2 x$

2) Sachant que : $\sin x=\frac{\sqrt{5}}{3}$; calculer : $\cos x$ et $\tan x$

Solution : On a : $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ et $\cos(\pi-x)=-\cos x$ et $\sin(\pi-x)=\sin x$

Donc : $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos(\pi-x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin(\pi-x)=-\cos^2 x+\sin^2 x$

Et on a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ c'est à dire **:** $\sin^2 x=1-\cos^2 x$

Donc : $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos(\pi-x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin(\pi-x)=-\cos^2 x+1-\cos^2 x$

Donc : $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos(\pi-x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin(\pi-x)=1-2\cos^2 x$

2) Sachant que : $\sin x=\frac{\sqrt{5}}{3}$; calculons : $\cos x$ et $\tan x$

On a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ c'est à dire **:** $\cos^2 x=1-\sin^2 x$

Donc : $\cos^2 x=1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2$ c'est à dire **:** $\cos^2 x=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$

Par suite : $\cos x=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$ ou $\cos x=-\sqrt{\frac{4}{9}}=-\frac{2}{3}$

Or $x\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$ donc : $\cos x<0$ donc : $\boxed{\cos x=-\frac{2}{3}}$

On a : $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$

Exercice7 : (**) Soit $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et sachant que : $\tan x=\frac{\sqrt{5}}{2}$;

1) Calculer : $\cos x$ et $\sin x$

2) Calculer : $A=\sin(5\pi-x)+\cos\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)-\tan(3\pi-x)$

Solution : 1) On a : $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ par suite : $\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}$

Donc : $\cos^2 x=\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{1}{1+\frac{5}{4}}=\frac{1}{\frac{9}{4}}=\frac{4}{9}$

Par suite : $\cos x=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$ ou $\cos x=-\sqrt{\frac{4}{9}}=-\frac{2}{3}$

Or $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ donc : $\cos x>0$ donc : $\boxed{\cos x=\frac{2}{3}}$

On a : $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ donc : $\sin x=\cos x\tan x$

Donc : $\boxed{\sin x=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{3}}$

2) Calculons : $A=\sin(5\pi-x)+\cos\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)-\tan(3\pi-x)$

$A=\sin(5\pi-x)+\cos\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)-\tan(3\pi-x)$

$A=\sin(4\pi+\pi-x)+\cos\left(x+\frac{4\pi+\pi}{2}\right)-\tan(-x)$ Car $\tan(k\pi+X)=\tan X$

$A=\sin(4\pi+\pi-x)+\cos\left(x+2\pi+\frac{\pi}{2}\right)+\tan x$ Car $\tan(-X)=-\tan X$

$A=\sin(\pi-x)+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\tan x$ Car $\cos(2k\pi+X)=\cos X$ et $\sin(2k\pi+X)=\sin X$

$A=\sin x-\sin x+\tan x$ car : $\sin(\pi-x)=\sin x$ et $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$

Donc : $A=\tan x=\frac{\sqrt{5}}{2}$

Exercice8 : (**) Exprimer en fonction de $\cos x$ ou de $\sin x$ les réels suivants :

$A=\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)$; $B=\sin(x+100\pi)$ $C=\cos\left(\frac{2020\pi}{2}+x\right)$ $D=\sin\left(\frac{2021\pi}{2}+x\right)$

$E=\sin(x-78\pi)$; $F=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+4\sin\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)-5\sin(\pi+x)$

$G=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-2\cos(-x-\pi)+5\sin(-x)$

Solution : $A=\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$

$B=\sin(x+100\pi)=\sin(x+2\times50\pi)=\sin x$

$C=\cos\left(\frac{2020\pi}{2}+x\right)=\cos(1010\pi+x)=\cos(2\times505\pi+x)=\cos x$

$D=\sin\left(\frac{2021\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{2020\pi+\pi}{2}+x\right)=\sin\left(1010\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)$

$D=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$

$E=\sin(x-78\pi)=\sin(x-2\times39\pi)=\sin x$

$F=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+4\sin\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)-5\sin(\pi+x)$

$$F=\sin x+4\sin\left(-\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)-5\times(-\sin x)$$

$$F=\sin x-4\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+5\sin x=6\sin x-4\cos x$$

$$G=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-2\cos(-x-\pi)+5\sin(-x)$$

$$G=\cos x+2\cos x-5\sin x=3\cos x-5\sin x$$

Exercice9 : (***) Simplifier les expressions suivantes :

$$G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$H=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

$$K=\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{4\pi}{10}\right)$$

Solution : $G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$

On a $\frac{\pi}{7}+\frac{6\pi}{7}=\pi$ donc : $\frac{\pi}{7}=\pi-\frac{6\pi}{7}$

Et on a $\frac{2\pi}{7}+\frac{5\pi}{7}=\pi$ donc : $\frac{5\pi}{7}=\pi-\frac{2\pi}{7}$

Et on a $\frac{3\pi}{7}+\frac{4\pi}{7}=\pi$ donc : $\frac{4\pi}{7}=\pi-\frac{3\pi}{7}$

Donc : $G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)$

Donc : $G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)=0$

$$H=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

On a $\frac{\pi}{8}+\frac{7\pi}{8}=\pi$ donc : $\frac{7\pi}{8}=\pi-\frac{\pi}{8}$

Et on a $\frac{3\pi}{8}+\frac{5\pi}{8}=\pi$ donc : $\frac{5\pi}{8}=\pi-\frac{3\pi}{8}$

Donc : $H=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$

Donc : $H=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Donc : $H=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+2\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

Et on a $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$ donc : $\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$

Donc on a : $H=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$

Donc $H=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)=2\times1=2$

$K=\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{4\pi}{10}\right)$

Et on a : $\cos\left(\frac{4\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{10}\right)$

Donc : $\cos\left(\frac{4\pi}{10}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{10}\right)$

Donc : $K=\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$

Donc : $K=\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)+\left(\cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)\right)$

Donc : $K=1+1=2$

Exercice10 : (**) Soit $x\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$; On pose : $A=\sin^2 x+2\cos^2 x-1$

1) Montrer que : $A=\cos^2 x$

2) Si $A=\frac{1}{3}$ calculer : $\tan x$

Solution : 1) Montrons que : $A=\cos^2 x$

On a : $A=\sin^2 x+2\cos^2 x-1$ et on sait que : $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ c'est-à-dire : $\sin^2 x=1-\cos^2 x$

Donc : $A=1-\cos^2 x+2\cos^2 x-1$

Donc : $A=1+\cos^2 x-1=\cos^2 x$

2) Si $A=\frac{1}{3}$ calculons : $\tan x$

On a : $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ par suite : $\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}$

Donc : $A=\frac{1}{1+\tan^2 x}$ c'est-à-dire : $\frac{1}{3}=\frac{1}{1+\tan^2 x}$

Donc : $1+\tan^2 x=3$ c'est-à-dire : $\tan^2 x=2$

Donc : $\tan x=\sqrt{2}$ ou $\tan x=-\sqrt{2}$ mais on a : $x\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$ c'est-à-dire : $\tan x\le 0$

Par suite : $\tan x=-\sqrt{2}$

Exercice11 : (**) Simplifier les expressions suivantes : $x\in\mathbb{R}$

$I=\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{(1-\sin x)(1-\cos x)}{\sin x\cos x}$ si $x\neq\frac{k\pi}{2}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

$J=\frac{(1-\sin x)(1-\cos x)}{\sin x\cos x}+\frac{2}{\sin x+\cos x+1}$ si $x\neq\frac{k\pi}{2}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

$K=\cos^4 x-\sin^4 x+2\sin^2 x$

$X=\cos^6 x+\sin^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x$

Solution : $I=\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{(1-\sin x)(1-\cos x)}{\sin x\cos x}$

$$I=\frac{\cos x(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}+\frac{\sin x(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}+\frac{1-\cos x-\sin x+\sin x\cos x}{\sin x\cos x}$$

$$I=\frac{\cos x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}+\frac{\sin x(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}+\frac{1-\cos x-\sin x+\sin x\cos x}{\sin x\cos x}$$

$$I=\frac{\cos x(1-\sin x)}{\cos^2 x}+\frac{\sin x(1-\cos x)}{\sin^2 x}+\frac{1-\cos x-\sin x+\sin x\cos x}{\sin x\cos x}$$

$$I=\frac{1-\sin x}{\cos x}+\frac{1-\cos x}{\sin x}+\frac{1-\cos x-\sin x+\sin x\cos x}{\sin x\cos x}$$

$$I=\frac{\sin x(1-\sin x)+\cos x(1-\cos x)+1-\cos x-\sin x+\sin x\cos x}{\cos x\sin x}$$

$$I=\frac{\sin x-\sin^2 x+\cos x-\cos^2 x+1-\cos x-\sin x+\sin x\cos x}{\cos x\sin x} \quad I=\frac{-(\sin^2 x+\cos^2 x)+1+\sin x\cos x}{\cos x\sin x}$$

$$I=\frac{-1+1+\sin x\cos x}{\cos x\sin x}=\frac{\sin x\cos x}{\cos x\sin x}=1$$

$$J=\frac{(1-\sin x)(1-\cos x)}{\sin x\cos x}+\frac{2}{\sin x+\cos x+1}=\frac{(1-\sin x)(1-\cos x)(\sin x+\cos x+1)+2\sin x\cos x}{\sin x\cos x(\sin x+\cos x+1)}$$

Et après développement et Réduction on trouve : $J=1$

$$K=\cos^4 x-\sin^4 x+2\sin^2 x$$

$$K=(\cos^2 x)^2-(\sin^2 x)^2+2\sin^2 x$$

$$K=(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)+2\sin^2 x$$

$$K=\cos^2 x-\sin^2 x+2\sin^2 x$$

$$K=\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

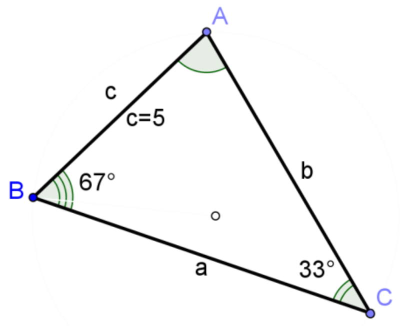
$$X=\cos^6 x+\sin^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$X=(\cos^2 x)^3+(\sin^2 x)^3+3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)$$

Et puisque : $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

Alors : $X=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3=1$

Exercice12 : (**) Calculer AC dans ce triangle :



Solution D'après la loi des sinus, On obtient : $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$

Donc : $\frac{\sin 67^\circ}{b}=\frac{\sin 33^\circ}{5}$

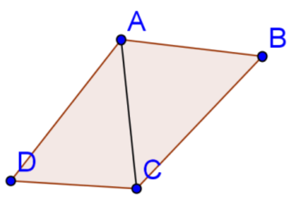
Donc : $b\sin 33^\circ=5\sin 67^\circ$ c'est-à-dire : $b=\frac{5\sin 67^\circ}{\sin 33^\circ}$

Par suite : $AC\simeq 8,45$

Exercice13 : (**) Calculer le périmètre et la surface d'un parallélogramme $ABCD$ tel que :

$BC=3cm$ et $ABC=\frac{2\pi}{3}$ et $AB=4cm$

Solution : Le périmètre du parallélogramme $ABCD$ est :



$P=2(AB+AD)=2(4+3)=14cm$

La surface du parallélogramme $ABCD$ est : $S_{ABCD}=2S_{ABC}$

Et on a : $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times BC\sin B$ donc :

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}4\times 3\sin\frac{2\pi}{3}=6\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=6\sin\frac{\pi}{3}=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}cm^2$$

Par suite : $S_{ABCD}=2\times 3\sqrt{3}=6\sqrt{3}cm^2$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien