Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°5 : TRIGONOMÉTRIE2

Partie 2 : Equations et inéquations trigonométriques

Exercice 1 : (*)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $\sin x = \frac{1}{2}$

2) En déduire les solutions dans $]-\pi,\pi]$ de l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$

Solution :1) $\sin x = \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Donc : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) Résolution dans $]-\pi,\pi]$ de l'équation

Méthode1 : (l'encadrement)

a) Encadrement de : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$: $-\pi < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi$ Équivaut à : $-\pi - \frac{\pi}{6} < 2k\pi \leq \pi - \frac{\pi}{6}$

Équivaut à : $-\frac{7\pi}{6} < 2k\pi \leq \frac{5\pi}{6}$ Équivaut à : $-\frac{7}{6} < 2k \leq \frac{5}{6}$ Équivaut à : $-\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{5}{12}$

C'est-à-dire : $-0,5... \leq k \leq 0,4...$ et $k \in \mathbb{Z}$ Donc $k = 0$

Pour $k = 0$ on remplace on trouve $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\times 0 \times \pi = \frac{\pi}{6}$

b) Encadrement de $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$: $-\pi < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi$

Donc : $-1 < \frac{5}{6} + 2k \leq 1$ c'est-à-dire : $-1 - \frac{5}{6} < 2k \leq 1 - \frac{5}{6}$

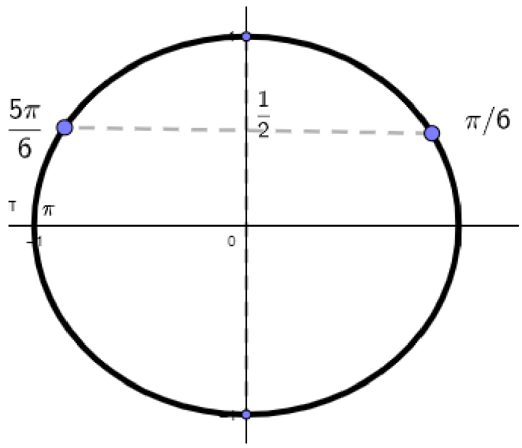
Donc : $-\frac{11}{6} < 2k \leq \frac{1}{6}$ c'est-à-dire : $-\frac{11}{12} < k \leq \frac{1}{12}$

Donc $-0,9... \leq k \leq 0,08...$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ on remplace on trouve : $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\times 0 \times \pi = \frac{5\pi}{6}$

Donc $S_{]-\pi,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$

Méthode2 : (utilisation du cercle trigo)



Donc $S_{]-\pi,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$

Exercice 2 : (*)1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) En déduire les solutions dans $]-\pi,\pi]$ de l'équation : $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : 1) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\cos x = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$ Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

Donc : $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) Résolution dans $\left]-\pi, \pi\right]$ de l'équation

Méthode1 : (l'encadrement)

a) Encadrement de : $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$: $-\pi < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \le \pi$ Équivaut à : $-\pi - \frac{3\pi}{4} < 2k\pi \le \pi - \frac{3\pi}{4}$

Équivaut à : $-\frac{7\pi}{4} < 2k\pi \le \frac{\pi}{4}$ Équivaut à : $-\frac{7}{4} \le 2k \le \frac{1}{4}$ Équivaut à : $-\frac{7}{8} \le k \le \frac{1}{8}$

C'est-à-dire : $-0,... \le k \le 0,...$ et $k \in \mathbb{Z}$ Donc $k = 0$

Pour $k = 0$ on remplace on trouve $x_1 = \frac{3\pi}{4} + 2 \times 0 \times \pi = \frac{3\pi}{4}$

b) Encadrement de $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$: $-\pi < -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \le \pi$

Donc : $-1 < -\frac{3}{4} + 2k \le 1$ c'est-à-dire : $-1 + \frac{3}{4} < 2k \le 1 + \frac{3}{4}$

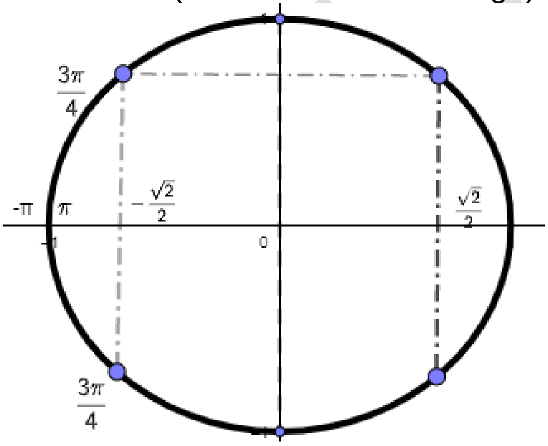
Donc : $-\frac{1}{4} < 2k \le \frac{7}{4}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{8} < k \le \frac{7}{8}$

Donc $-0,... \le k \le 0,...$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ on remplace on trouve : $x_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2 \times 0 \times \pi = -\frac{3\pi}{4}$

Donc $S_{]-\pi,\pi]} = \left\{-\frac{3\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4}\right\}$

Méthode2 : (utilisation du cercle trigo)



Donc $S_{]-\pi,\pi]} = \left\{-\frac{3\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4}\right\}$

Exercice 3 : (*) Soit l'équation : $-\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

Résoudre l'équation dans l'intervalle [0,4π]

Solution : On isole l'expression trigonométrique.

$-2\sin x-\sqrt{2}=0$ Équivaut à : $-2\sin x=\sqrt{2}$ c'est-à-dire : $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Équivaut à : $\sin x=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ (on utilise le tableau)

Équivaut à : $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ (on peut aussi utiliser le cercle trigonométrique)

Équivaut à : $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Ainsi : $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\pi-\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi$ avec: $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$ avec: $k\in\mathbb{Z}$

On s'intéresse maintenant aux solutions situées dans l'intervalle [0,4π]
Pour obtenir toutes les solutions demandées, on remplace k par 0 et par 1:

Donc L'ensemble des solutions de l'équation dans [0,4π] est donc $S=\left\{\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4};\frac{13\pi}{4};\frac{15\pi}{4}\right\}$

(On peut aussi faire des encadrements pour trouver toutes les solutions demandées)

Exercice4 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : (E) : $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$

2) En déduire les solutions de l'équation (E) dans $[0;\pi]$

Solution :1) On pose $t=\sin x$ et l'équation (E) devient : $2t^2-3t+1=0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2-3t+1$:
Calcul du discriminant :
$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1$

Les racines sont : $t_1=\frac{3-\sqrt{1}}{2\times 2}=\frac{1}{2}$ et $t_2=\frac{3+\sqrt{1}}{2\times 2}=1$

Donc : $\sin x=\frac{1}{2}$ et $\sin x=1$

$\sin x=\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

$\sin x=1$ Équivaut à : $\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ;\ \frac{5\pi}{6}+2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) On a deux méthodes soit l'encadrement ou en donnant des valeurs a k

a) Pour : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$: Prenons par exemple la valeur $k=-1$ et remplaçons on obtient :

$x=\frac{\pi}{6}-2\pi=-\frac{11\pi}{6}$; cette valeur n'appartient pas à $[0;\pi]$; il est donc évident que des valeurs

de k inférieures à -1 ne conviendront pas non plus.
Par contre, si je choisis $k=0$: on obtient $x=\frac{\pi}{6}$; cette valeur appartient à $[0;\pi]$.

Pour $k=1$: $x=\frac{\pi}{6}+2\pi \notin [0;\pi]$

Il est inutile de poursuivre pour des valeurs supérieures à : 1
Donc : la seule valeur dans $[0;\pi]$ est : $x=\frac{\pi}{6}$

b) Pour : $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

La même démarche que précédemment donne : $x=\frac{5\pi}{6}$

Donc : la seule valeur dans $[0;\pi]$ est : $x=\frac{5\pi}{6}$

c) Pour : $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

La même démarche que précédemment donne : $x=\frac{\pi}{2}$

Donc : la seule valeur dans $[0;\pi]$ est : $x=\frac{\pi}{2}$

Conclusion : $S_{[0;\pi]}=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right\}$

Exercice 5 : (*) (**) Résoudre les équations trigonométriques suivantes.

1) $\cos 2x=\cos\left(\frac{8\pi}{2}\right)$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $[\pi;5\pi]$

2) $\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-2\pi;2\pi]$

3) $\cos 3x=-\cos x$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-2\pi;\pi]$

4) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin x$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $[4\pi;6\pi]$

5) $\sin(3x)=\cos(2x)$ dans $\mathbb{R}$

Solution : 1) On a : $\cos 2x=\cos\left(\frac{8\pi}{2}\right)$ Équivaut à : $\cos 2x=\cos(4\pi)$

Équivaut à : $\cos 2x=\cos(0)$ Équivaut à : $2x=0+2k\pi$ Équivaut à : $x=k\pi$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\{k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$

Pour la résolution dans : $[\pi;5\pi]$ on va encadrer :

Encadrement de $k\pi$: $\pi\le k\pi\le 5\pi$ Équivaut à : $1\le k\le 5$ $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $k\in\{1;2;3;4;5\}$ par suite : $x_1=\pi$; $x_2=2\pi$; $x_3=3\pi$; $x_4=4\pi$; $x_5=5\pi$

Donc : $S_{[\pi;5\pi]}=\{\pi;2\pi;3\pi;4\pi;5\pi\}$

2) on a : $\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ Équivaut à : $x-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{5}+2k\pi$ ou $x-\frac{2\pi}{3}=-\frac{\pi}{5}+2k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{13\pi}{15}+2k\pi$ ou $x=\frac{22\pi}{15}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{13\pi}{15}+2k\pi;\frac{22\pi}{15}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

Pour la résolution dans : $\left[-2\pi\,;2\pi\right]$ on va encadrer :

- Encadrement de $\frac{13\pi}{15}+2k\pi$:

$-2\pi\le\frac{13\pi}{15}+2k\pi\le2\pi$ Équivaut à : $\frac{-43\pi}{15}\le2k\pi\le\frac{17\pi}{15}$ $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $\frac{-43}{30}\le k\le\frac{17}{30}$ $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $k\in\{-1;0\}$ ce qui donne : $x_1=-\frac{17\pi}{15}$; $x_2=\frac{13\pi}{15}$

- Encadrement de $\frac{22\pi}{15}+2k\pi$:

$-2\pi\le\frac{22\pi}{15}+2k\pi\le2\pi$ Équivaut à : $\frac{-52}{30}\le k\le\frac{8}{30}$ $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $k\in\{-1;0\}$ ce qui donne : $x_3=-\frac{8\pi}{15}$; $x_4=\frac{22\pi}{15}$

Finalement : $S_{[-2\pi\,;2\pi]}=\left\{-\frac{17\pi}{15};\frac{13\pi}{15};\frac{-8\pi}{15};\frac{22\pi}{15}\right\}$

3) on a : $\cos3x=-\cos x$ Équivaut à : $\cos3x=\cos(\pi-x)$

Équivaut à : $3x=\pi-x+2k\pi$ ou $3x=-(\pi-x)+2k\pi$

Équivaut à : $4x=\pi+2k\pi$ ou $2x=-\pi+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ ou $x=-\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};-\frac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

Pour la résolution dans : $\left[-2\pi\,;\pi\right]$ on va encadrer :

- Encadrement de $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$:

$-2\pi\le\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\le\pi$ Équivaut à : $\frac{-9\pi}{4}\le\frac{k\pi}{2}\le\frac{3\pi}{4}$ $k\in\mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $\frac{-9}{2}\le k\le\frac{3}{2}$ $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $k\in\{-4;-3;-2;-1;0;1\}$ ce qui donne : $x_1=-\frac{7\pi}{4}$; $x_2=\frac{-5\pi}{4}$; $x_3=\frac{-3\pi}{4}$; $x_4=\frac{-\pi}{4}$; $x_5=\frac{\pi}{4}$; $x_6=\frac{3\pi}{4}$

- Encadrement de $-\frac{\pi}{2}+k\pi$:

$-2\pi\le-\frac{\pi}{2}+k\pi\le\pi$ Équivaut à : $-\frac{3\pi}{2}\le k\pi\le\frac{3\pi}{2}$ c'est-à-dire : $\frac{-3}{2}\le k\le\frac{3}{2}$ $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $k\in\{-1;0;1\}$ ce qui donne : $x_7=-\frac{3\pi}{2}$; $x_8=-\frac{\pi}{2}$; $x_9=\frac{\pi}{2}$

Finalement : $S_{[-2\pi\,;\pi]}=\left\{-\frac{7\pi}{4};\frac{-5\pi}{4};\frac{-3\pi}{4};\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4};\frac{-3\pi}{2};\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\}$

4) on va résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $\left[4\pi\,;6\pi\right]$: $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin x$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin x$ Équivaut à : $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin(-x)$

Équivaut à : $2x+\frac{\pi}{4}=-x+2k\pi$ ou $2x+\frac{\pi}{4}=\pi-(-x)+2k\pi$

Équivaut à : $3x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ c'est-à-dire : $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} ; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

- Encadrement de $-\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$:

$4\pi \leq -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \leq 6\pi$ Équivaut à : $\frac{49\pi}{12} \leq \frac{2k\pi}{3} \leq \frac{73\pi}{12}$ $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $\frac{49}{8} \leq k \leq \frac{73}{8}$ $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $k \in \{7;8;9\}$ ce qui donne : $x_1 = \frac{55\pi}{12}$; $x_2 = \frac{63\pi}{12}$; $x_3 = \frac{71\pi}{12}$

- Encadrement de $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$:

$4\pi \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq 6\pi$ Équivaut à : $\frac{13\pi}{4} \leq 2k\pi \leq \frac{21\pi}{4}$ $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $\frac{13}{8} \leq k \leq \frac{21}{8}$ $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $k = 2$ ce qui donne : $x_4 = \frac{19\pi}{4}$

Finalement : $S_{[4\pi ; 6\pi]} = \left\{ \frac{55\pi}{12} ; \frac{63\pi}{12} ; \frac{71\pi}{12} ; \frac{19\pi}{4} \right\}$

5) $\sin(3x) = \cos(2x)$ dans $\mathbb{R}$

$\sin(3x) = \cos(2x)$ Équivaut à : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos(2x)$

Équivaut à : $\frac{\pi}{2} - 3x = 2x + 2k\pi$ ou $\frac{\pi}{2} - 3x = -2x + 2k\pi$

Équivaut à : $5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ c'est-à-dire : $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

Exercice 6 : (*) (**) Résoudre dans l'intervalle I les équations suivantes :

1) $\tan x = \sin x$; $I = \mathbb{R}$ **2)** $\tan x = -\tan \frac{\pi}{12}$; $I = \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$

3) $\sqrt{3} \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$; $I = \mathbb{R}$ **4)** $\tan x \times \tan 2x = 1$; $I = \left] -\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4} \right[$

Solution:1) $\tan x = \sin x$; $I = \mathbb{R}$

Équivaut à : $\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x = 0$

Équivaut à : $\frac{\sin x}{\cos x}(1 - \cos x) = 0$

Équivaut à : $\tan x(1 - \cos x) = 0$

Équivaut à : $\tan x = 0$ ou $1 - \cos x = 0$ c'est-à-dire : $\tan x = 0$ ou $\cos x = 1$

Équivaut à : $x = k\pi$ ou $x = 2k\pi$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\} = \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

2) $\tan x = -\tan\frac{\pi}{12}$; $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ Équivaut à : $\tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$ avec : $k \in \mathbb{Z}$

Or on a : $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ donc : $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{12} + k\pi < \frac{\pi}{2}$

Donc : $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{12} + k < \frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $\frac{1}{12} - \frac{1}{2} < k < \frac{1}{2} + \frac{1}{12}$

Donc : $-\frac{5}{12} < k < \frac{7}{12}$ avec : $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $k = 0$ et par suite : $x = -\frac{\pi}{12} + 0 \times \pi = -\frac{\pi}{12}$

Par suite l'ensemble des solutions de l'équation dans $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ est : $S = \left\{-\frac{\pi}{12}\right\}$

3) $\sqrt{3}\tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$; $I = \mathbb{R}$

Équivaut à : $\tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ c'est à dire : $\tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k\pi$ qui signifie que : $2x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + k\pi$

Équivaut à : $2x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ Donc : $x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$ Avec : $k \in \mathbb{Z}$

Par suite l'ensemble des solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ est : $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\right\}$

4) $\tan x \times \tan 2x = 1$; $I = \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$

Équivaut à : $\tan 2x = \frac{1}{\tan x}$ c'est à dire : $\tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Équivaut à : $2x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi$ avec : $k \in \mathbb{Z}$ c'est à dire : $3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec : $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ avec : $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} < \frac{\pi}{4}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{4} < \frac{1}{6} + \frac{k}{3} < \frac{1}{4}$

Donc : $-\frac{3}{2} < 1 + 2k < \frac{3}{2}$ avec : $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $-\frac{5}{2} < 2k < \frac{1}{2}$

Donc : $-\frac{5}{4} < k < \frac{1}{4}$ et $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $k = 0$ ou $k = -1$ et par suite : $x = \frac{\pi}{6}$ et $x = -\frac{\pi}{6}$

Donc les solutions de l'équation dans $I = \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$ est : $S = \left\{-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right\}$

Exercice7 : (**) Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2};\pi\right]$ l'inéquation suivante : $\cos x \leq \frac{1}{2}$

Solution : $\cos x = \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

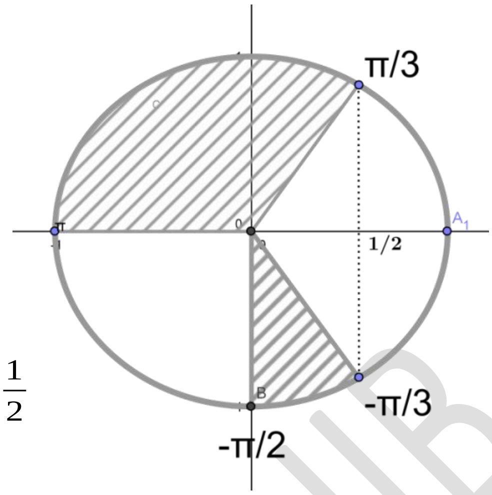
Équivaut à : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\pi\right]$ alors : $x = -\frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{\pi}{3}$

$\cos x \leq \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos x \leq \cos\frac{\pi}{3}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\cos x$ et $\frac{1}{2}$

Dans $\left]-\frac{\pi}{2};\pi\right]$ On trouve que : $S = \left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$



Exercice8 : (**) Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'inéquation suivante : $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

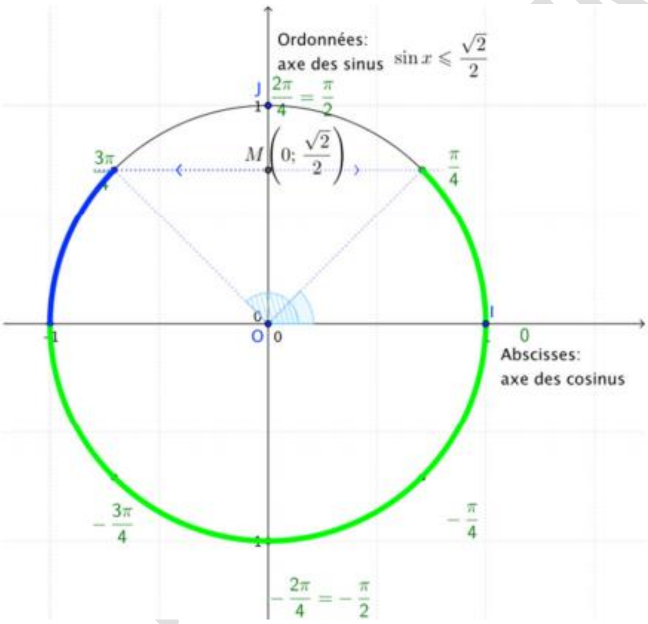
Solution : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin\frac{\pi}{4}$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in]-\pi;\pi]$ alors : $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\sin x$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$



Donc : $S = \left]-\pi;\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$

Exercice9 : (***) On pose : $F(x) = \frac{1}{\cos^2 x + 2\sin^2 x}$ avec $x \in [0;\pi]$

1) Calculer : $F(0)$ et $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$

2) Montrer que : $F(\pi - x) = F(x)$ pour tout $x \in [0;\pi]$

3) En déduire : $F(\pi)$ et $F\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $F\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

4) Ecrire $F(x)$ en fonction $\tan x$ pour tout $x \neq \frac{\pi}{2}$

5) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'équation : $F(x)=\frac{4}{7}$ (E)

6) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'inéquation : $F(x)>\frac{4}{7}$ (I)

Solution :1) $F(x)=\frac{1}{\cos^2 x+2\sin^2 x}$ avec $x\in[0;\pi]$

$$F(0)=\frac{1}{\cos^2 0+2\sin^2 0}=\frac{1}{1^2+2\times 0}=1$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}+2\sin^2\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$$

$$F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{6}+2\sin^2\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{5}$$

2) Montrons que : $F(\pi-x)=F(x)$ pour tout $x\in[0;\pi]$?

$$F(\pi-x)=\frac{1}{\cos^2(\pi-x)+2\sin^2(\pi-x)}$$

$$F(\pi-x)=\frac{1}{(-\cos x)^2+2\sin^2 x}=F(x)$$

$$F(\pi-x)=\frac{1}{\cos^2 x+2\sin^2 x}=F(x)$$

3) déduction de : $F(\pi)$ et $F\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $F\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$$F(\pi)=F(\pi-\pi)=F(0)=1$$

$F\left(\frac{3\pi}{4}\right)=F\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)=F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{3}$ et $F\left(\frac{5\pi}{6}\right)=F\left(\pi-\frac{5\pi}{6}\right)=F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$

4) Ecriture de $F(x)$ en fonction $\tan x$ pour tout $x\neq\frac{\pi}{2}$:

$$F(x)=\frac{1}{\cos^2 x+2\sin^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x\left(1+2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)}=\frac{1}{\cos^2 x}\times\frac{1}{1+2\tan^2 x}=\left(1+\tan^2 x\right)\times\frac{1}{1+2\tan^2 x}$$

Car : $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$ par suite : $F(x)=\frac{1+\tan^2 x}{1+2\tan^2 x}$

5) Résolution dans $[0;\pi]$ de l'équation : $F(x)=0$ (E)

$F(x)=\frac{4}{7}$ Équivaut à : $\frac{1+\tan^2 x}{1+2\tan^2 x}=\frac{4}{7}$

Équivaut à : $7\left(1+\tan^2 x\right)=4\left(1+2\tan^2 x\right)$

Équivaut à : $7+7\tan^2 x=4+8\tan^2 x$ Équivaut à : $\tan^2 x=3$

Équivaut à : $\tan x=\sqrt{3}$ ou $\tan x=-\sqrt{3}$

Équivaut à : $\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ou $\tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

- Encadrement de $\frac{\pi}{3} + k\pi$: $0 \leq \frac{\pi}{3} + k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $0 \leq \frac{1}{3} + k \leq 1$ équivaut à : $-\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{2}{3}$

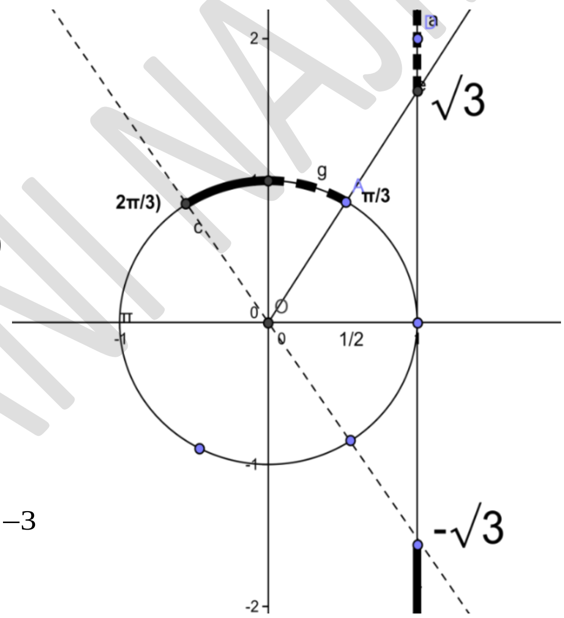
Donc $k = 0$ on remplace on trouve $x_1 = \frac{\pi}{3}$

- Encadrement de $-\frac{\pi}{3} + k\pi$: $0 \leq -\frac{\pi}{3} + k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $0 \leq -\frac{1}{3} + k \leq 1$ équivaut à : $\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{4}{3}$

Donc $k = 1$ on remplace on trouve $x_2 = \frac{2\pi}{3}$

Donc $S_{[0\,;\,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}$



6) Résolution dans $[0\,;\pi]$ de l'inéquation : $F(x) > \frac{4}{7}$ (I)

$F(x) > \frac{4}{7}$ Équivaut à : $\frac{1+\tan^2 x}{1+2\tan^2 x} > \frac{4}{7}$

Équivaut à : $7\left(1+\tan^2 x\right) > 4\left(1+2\tan^2 x\right)$

Équivaut à : $7\left(1+\tan^2 x\right) > 4\left(1+2\tan^2 x\right)$

Équivaut à : $7 + 7\tan^2 x > 4 + 8\tan^2 x$ Équivaut à : $-\tan^2 x > -3$

Équivaut à : $\tan^2 x < 3$ Équivaut à : $\tan^2 x - \sqrt{3}^2 < 0$

Équivaut à : $\left(\tan x - \sqrt{3}\right)\left(\tan x + \sqrt{3}\right) < 0$

$\tan x - \sqrt{3} < 0$ Équivaut à : $\tan x < \sqrt{3}$

$\tan x - \sqrt{3} > 0$ Équivaut à : $\tan x > \sqrt{3}$

$\tan x + \sqrt{3} < 0$ Équivaut à : $\tan x < -\sqrt{3}$

Donc le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\tan x - \sqrt{3}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$		$-$	
$\tan x + \sqrt{3}$		$+$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
produit		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	

$S = \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien