Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°6 : FONCTIONS - *Généralités*

Exercice 1 : (*) (**) (***) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x)=\frac{|x-5|}{x^2+1}$. 2) $f(x)=\frac{\sqrt{|x|}}{x}$ 3) $f(x)=\sqrt{-2x^2+x+3}$.

4) $f(x)=\sqrt{-2x^2+3x-5}$. 5) $f(x)=3x^2-\frac{1}{x}+\sqrt{-x}$. 6) $f(x)=\sqrt{\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$.

7) $f(x)=\sqrt{x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}}$. 8) $f(x)=\frac{x+5}{x^2-5x+7}$.

Solution : Remarque : Soit f une fonction réelle de la variable réelle de E dans F

L'ensemble de définition de la fonction f se note D_f et on a :

$D_f=\{x\in E\,/\,f(x)\, est\ calculable\}$ Ou $D_f=\{x\in E\,/\,f(x)\in F\}$ ou encore $D_f=\{x\in E\,/\,f(x)\in\mathbb{R}\}$

1) $f(x)=\frac{|x-5|}{x^2+1}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2+1\neq 0\}$

$x^2+1=0$ Signifie $x^2=-1$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{\sqrt{|x|}}{x}$.

$f(x)\in\mathbb{R}$ Signifie que : $\sqrt{|x|}\in\mathbb{R}$ et $x\neq 0$

Or on sait que $|x|\geq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc : $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie $x\neq 0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

3) $f(x)=\sqrt{-2x^2+x+3}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,-2x^2+x+3\geq 0\}$

$-2x^2+x+3=0$ $a=-2$ et $b=1$ et $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times(-2)\times 3=1+24=25=(5)^2>0$

Donc on a deux racines : $x_1=\frac{-1+5}{2\times(-2)}=\frac{4}{-4}=-1$ et $x_2=\frac{-1-5}{2\times(-2)}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $D_f=\left[-1,\frac{3}{2}\right]$

4) $f(x)=\sqrt{-2x^2+3x-5}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,-2x^2+3x-5\geq 0\}$

$a=-2$ et $b=3$ et $c=-5$ donc : $\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times(-2)\times(-5)=-40\prec 0$

Et puisque : $a=-2\prec 0$ alors : $-2x^2+3x-5\prec 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$
Par suite : $D_f=\varnothing$

5) $f(x)=3x^2-\dfrac{1}{x}+\sqrt{-x}$ $\qquad D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,-x\geq 0\ \ et\ \ x\neq 0\right\}$

Signifie : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\leq 0\ \ et\ \ x\neq 0\right\}$

Donc : $D_f=\left]-\infty,0\right[$

6) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$. $\qquad D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}\geq 0\ \ et\ \ x^2-x-6\neq 0\right\}$

- On détermine les racines du trinôme $-2x^2+2x+13$:Le discriminant est $\Delta' = 2^2 - 4 \times (-2) \times 13 = 108$ et ses racines sont : $x_1=\dfrac{-2-\sqrt{108}}{2\times(-2)}=\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-2+\sqrt{108}}{2\times(-2)}=\dfrac{1-3\sqrt{3}}{2}$

- On détermine les racines du trinôme x^2-x-6:
Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-6) \times 1 = 25$ et ses racines sont :
$x_1'=\dfrac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times 1}=\dfrac{1-5}{2}=-2$ et $x_2'=\dfrac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times 1}=\dfrac{1+5}{2}=3$

- On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$	$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$		-2		3		$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+2x+13$	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
x^2-x-6	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}$	$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	0	$-$	

$D_f=\left[\dfrac{1-3\sqrt{3}}{2};-2\right[\cup\left]3;\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}\right]$.

7) $f(x)=\sqrt{x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}}$: $\qquad D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}\geq 0\right\}$

$\Delta=b^2-4ac=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-4\times 1\times 2\sqrt{6}$

$\Delta=12-4\sqrt{6}+2+8\sqrt{6}=14+4\sqrt{6}$

$14+4\sqrt{6}=14+2\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\left(2\sqrt{3}\right)^2+2\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2$

$14+4\sqrt{6}=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

On a $\Delta=14+4\sqrt{6}>0$ donc

$x_1=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{14+4\sqrt{6}}}{2\times 1}=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times 1}$ et $x_2=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times 1}$

$x_1=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\times 1}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ et $x_2=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\times 1}=\dfrac{-4\sqrt{3}}{2}=-2\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{2})x-2\sqrt{6}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc : $D_f=\left]-\infty;-2\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right[$

8) $f\left(x\right)=\dfrac{x+5}{x^2-5x+7}$.

Le discriminant est $\Delta=b^2-4ac=\left(-5\right)^2-4\times1\times7=25-28=-3\prec0$

Donc : Pas de racines par suite : $D_f=\mathbb{R}$

Exercice 2 : (**) Soit f la fonction définie par $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2+1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
2) Étudier la parité de f .
3) a) Montrer que f est strictement décroissante sur $\left[0,+\infty\right[$

b) En déduire le sens de variation de f sur $\left]+\infty,0\right]$

4)Dresser alors le tableau de variations de f sur $D_f=\left\{x\in E\,/\,f\left(x\right)\in\mathbb{R}\right\}$.

5) Montrer que pour tout réel x, $-1\leq f\left(x\right)\leq1$

Solution : 1) $D_f=\left\{x\in E\,/\,f\left(x\right)\in\mathbb{R}\right\}$

$D_f=\left\{x\in E\,/\,x^2+1\neq0\right\}$

$x^2+1=0$ Signifie $x^2=-1$
Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$
Donc : x^2+1 ne s'annule jamais
Par suite : $D_f=\mathbb{R}$
2) Étudions la parité de f .
a) si $x\in\mathbb{R}$ alors : $-x\in\mathbb{R}$

b) $f\left(-x\right)=\dfrac{1}{\left(-x\right)^2+1}=\dfrac{1}{x^2+1}=f\left(x\right)$

Donc : f est paire
3) a) Montrons que f est décroissante sur $\left[0,+\infty\right[$

Soit $x_1\in\left[0,+\infty\right[$ et $x_2\in\left[0,+\infty\right[$ tel que : $x_1<x_2$

Alors : $x_1^{\,2}<x_2^{\,2}$

Donc : $x_1^{\,2}+1<x_2^{\,2}+1$

Donc : $\dfrac{1}{x_2^{\,2}+1}<\dfrac{1}{x_1^{\,2}+1}$

Donc : $f\left(x_2\right)<f\left(x_1\right)$

Donc : f est strictement décroissante sur $\left[0,+\infty\right[$

b) f est paire et le symétrique de $\left[0,+\infty\right[$ est l'intervalle $\left]-\infty;0\right]$

Puisque : f est strictement décroissante sur $\left[0,+\infty\right[$ alors f est strictement croissante sur $\left]-\infty;0\right]$

5) par suite le tableau de variations de f sur $D_f=\mathbb{R}$ est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

$f\left(0\right)=1$

3) Pour tout x, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ est positif comme quotient de deux nombres positifs et f admet 1 comme maximum d'après le tableau de variations.
Donc ; $0\leq f(x)\leq f(0)$

Donc ; $0\leq f(x)\leq 1$ Pour tout réel x

Exercice 3 : (***)
1) Montrer que : la fonction nulle est la seule fonction qui soit à la fois paire et impaire
2) Soit la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$
Montrer que : les fonctions suivantes :
$g:x\mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h:x\mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ sont respectivement paire et impaire
3) En déduire que toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ est somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire
4) Soit la fonction numérique : $K(x)=-2x^5+\frac{1}{3x}$
a) Etudier la parité de K
b) Montrer que la fonction : $M(x)=K(x)-1$ est une fonction ni paire ni impaire,

Solution :1) la fonction nulle : $\theta:x\mapsto 0$
$\theta(x)=0$; $D_\theta=\mathbb{R}$
a) Si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
b) $\theta(-x)=0=\theta(x)$ et $\theta(-x)=0=-\theta(x)$
Donc : la fonction nulle est une fonction à la fois paire et impaire
Montrons que c'est la seule
Soit : f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à la fois paire et impaire
Soit : $x\in\mathbb{R}$; Donc : $\begin{cases} f(-x)=f(x) \\ f(-x)=-f(x) \end{cases}$
Donc : $f(x)=-f(x)$
Donc : $2f(x)=0$
Donc : $f(x)=0$ c'est-à-dire : $f=\theta$
Donc : la fonction nulle est la seule fonction qui soit à la fois paire et impaire
2) $D_g=\mathbb{R}$ et $D_f=\mathbb{R}$
Si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
a) $g(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=g(x)$
Donc g est une fonction paire
b) $h(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-h(x)$
Donc : h est une fonction impaire
3) Soit : f une fonction définie sur $\mathbb{R}$
On voit que pour tout $x\in\mathbb{R}$
$$g(x)+h(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}=\frac{f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x)}{2}=\frac{2f(x)}{2}=f(x)$$
Donc : toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est somme d'une fonction paire g et d'une fonction h impaire
$f=g+h$

4) Soit la fonction numérique : $K(x) = -2x^5 + \frac{1}{3x}$

a) Etudier la parité de K

On a $K(x) \in \mathbb{R}$ signifie $x \neq 0$

Donc $D_K = \mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[= \mathbb{R} - \{0\}$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

- $K(-x) = -2(-x)^5 + \frac{1}{3(-x)} = 2x^5 - \frac{1}{3x} = -\left(-2x^5 + \frac{1}{3x}\right) = -K(x)$

Cela signifie que : K est une fonction impaire

b) $M(x) = K(x) - 1$

$M(x) = K(x) - 1 = -2x^5 + \frac{1}{3x} - 1$; on a : $D_M = \mathbb{R}^*$

Par exemple on a : $K(1) = -2\times 1^5 + \frac{1}{3\times 1} = -2 + \frac{1}{3} = -\frac{5}{3}$

$M(-1) = K(-1) - 1 = -K(1) - 1 = -\left(-\frac{5}{3}\right) - 1 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$ et $M(1) = K(1) - 1 = -\frac{5}{3} - 1 = -\frac{8}{3}$

Nous remarquons que : $M(-1) \neq -M(1)$ et $M(-1) \neq M(1)$

Cela signifie que : la fonction M est ni paire ni impaire,

Exercice 4 : (***) **Soit** la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 3$ si $x \geq 0$

Sachant que : f est une fonction paire

1)Calculer : $f(x)$ si $x \leq 0$

2) Donner : $f(x)$ si $x \in \mathbb{R}$

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$: on a : f est une fonction paire donc : $f(-x) = f(x)$

Si $x \leq 0$ alors : $-x \geq 0$

Alors : $f(-x) = 2(-x) - 3 = -2x - 3$ et puisque : $f(-x) = f(x)$

Alors : Si $x \leq 0$: $f(x) = -2x - 3$

2) On a : $\begin{cases} f(x) = 2x - 3 & ;\text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 2(-x) - 3 & ;\text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Donc : $f(x) = 2|x| - 3$ si $x \in \mathbb{R}$

Exercice 5 : (**) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = \frac{2x^2+3}{x^2+1}$

1) Déterminer D_f 2) a) Démontrer que : $f(x) \leq 3$ si $x \in \mathbb{R}$

b) Est ce que 3 est une valeur maximale de f ?

3) a) Démontrer que : $0 < f(x)$ si $x \in \mathbb{R}$

b) Est ce que 2 est une valeur minimale de f. ?

Solution : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0\}$

$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$: pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$

2) a) Soit $x \in \mathbb{R}$: $f(x) - 3 = \frac{2x^2+3}{x^2+1} - 3 = \frac{2x^2+3-3(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{2x^2+3-3x^2-3}{x^2+1}$

Donc $f(x) - 3 = \frac{-x^2}{x^2+1} \leq 0$ par suite $f(x) \leq 3$ si $x \in \mathbb{R}$

b) On remarque que : $f(0)=3$ donc $f(x)\leq f(0)$ si $x\in\mathbb{R}$

Donc 3 est une valeur maximale de f

3) a) soit $x\in\mathbb{R}$; $f(x)-2=\frac{2x^2+3}{x^2+1}-2=\frac{2x^2+3-2(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{2x^2+3-2x^2-2}{x^2+1}$

Donc $f(x)-2=\frac{1}{x^2+1}>0$ par suite : $0<f(x)$ si $x\in\mathbb{R}$

b) On remarque que : $f(x)>2$ $\forall x\in\mathbb{R}$

2 n'est pas donc une valeur minimale de f

Conclusion : $2\prec f(x)\leq 3$ si $x\in\mathbb{R}$

Puisque : $f(x)\neq\frac{\sqrt{2}}{4}$ $\forall x\in\left]1;+\infty\right[$ alors $\frac{\sqrt{2}}{4}$ n'est pas une valeur maximale de f

Exercice 6 : (***) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=-x^2-2x+1$

1)Préciser le domaine de définition de f

2)Calculer le taux d'accroissement de fonction de f entre x_1 et x_2 tel que : $x_1\neq x_2$

3)Etudier la monotonie de f sur : $I=\left[-1;+\infty\right[$ et sur $J=\left]-\infty;-1\right]$

4)Dresser le tableau de variation de f

5) a) En déduire que : pour tout $x\in\mathbb{R}$ On a : $f(x)\leq 2$

b) En déduire que : pour tout $x\in\left[-1;\frac{1}{2}\right]$ On a : $-\frac{1}{4}\leq f(x)\leq 2$

c) En déduire que : pour tout $x\in[-3;-1]$ On a : $-2\leq f(x)\leq 2$

6)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

7)Soit g la fonction définie sur R par : $g(x)=-x-1$

Tracer Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

8)Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x)=g(x)$

9) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $g(x)<f(x)$

10) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $-x^2-2x+m-1=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Solution : $f(x)=-x^2-2x+1$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

2)Soient : $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(-x_2^2-2x_2+1)-(-x_1^2-2x_1+1)}{x_2-x_1}=\frac{-x_2^2-2x_2+1+x_1^2+2x_1-1}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{-x_2^2+x_1^2-2(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{-(x_2^2-x_1^2)-2(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{-(x_2-x_1)(x_2+x_1)-2(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-x_1)(-(x_2+x_1)-2)}{x_2-x_1}$$

Par suite : $T(x_1;x_2)=-(x_1+x_2)-2$

3)a) Etude de la monotonie de f sur : $I=\left[-1;+\infty\right[$

Soient : $x_1 \in [-1;+\infty[$ et $x_2 \in [-1;+\infty[$ alors $x_1 \geq -1$ et $x_2 \geq -1$ implique $x_1 + x_2 \geq -2$

Donc $-(x_1 + x_2) \leq 2$ par suite : $-(x_1 + x_2) - 2 \leq 0$

Donc $T(x_1; x_2) \leq 0$ d'où : f est décroissante sur $I = [-1;+\infty[$

3)b) Etude de la monotonie de f sur : $J =]-\infty;-1]$

Soient : $x_1 \in]-\infty;-1]$ et $x_2 \in]-\infty;-1]$ alors : $x_1 \leq -1$ et $x_2 \leq -1$ cela implique $x_1 + x_2 \leq -2$

Donc $-(x_1 + x_2) \geq 2$ par suite : $-(x_1 + x_2) - 2 \geq 0$

Donc $T(x_1; x_2) \geq 0$

D'où : f est croissante sur $J =]-\infty;-1]$

4) Tableau de variation : On a : $f(-1) = -(-1)^2 - 2\times(-1) + 1 = -1 + 2 + 1 = 2$

Donc :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$

5) a) D'après le tableau de variation de f on a : $f(-1) = 2$ est un maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) \leq f(-1)$

Par suite : $f(x) \leq 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

b) Soit : $x \in \left[-1;\frac{1}{2}\right]$ alors : $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement décroissante sur $I = [-1;+\infty[$

Par suite : f est strictement croissante sur $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$

Alors : $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(x) \leq f(-1)$ et comme : $f(-1) = 2$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\times\frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{4} - 1 + 1 = -\frac{1}{4}$

Par suite : $-\frac{1}{4} \leq f(x) \leq 2$

b) Soit : $x \in [-3;-1]$ On a alors : $-3 \leq x \leq -1$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement croissante sur $J =]-\infty;-1]$

Par suite : f est strictement croissante sur $[-3;-1]$

Alors : $f(-3) \leq f(x) \leq f(-1)$ et comme :

$f(-3) = -(-3)^2 - 2\times(-3) + 1 = -9 + 6 + 1 = -2$ Et $f(-1) = 2$

Par suite : $-2 \leq f(x) \leq 2$

6)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x) = 0$.

$f(x) = 0$ Signifie $-x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\times(-1)\times 1 = 4 + 4 = 8 > 0$

$$x_1=\frac{-(-2)+\sqrt{8}}{2\times(-1)}=\frac{-(-2)+2\sqrt{2}}{-2}=\frac{2+2\sqrt{2}}{-2}=-1-\sqrt{2} \text{ et } x_2=\frac{-(-2)-\sqrt{8}}{2\times(-1)}=\frac{-(-2)-2\sqrt{2}}{-2}=\frac{2-2\sqrt{2}}{-2}=-1+\sqrt{2}$$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$A\left(-1-\sqrt{2};0\right)$ et $B\left(-1+\sqrt{2};0\right)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

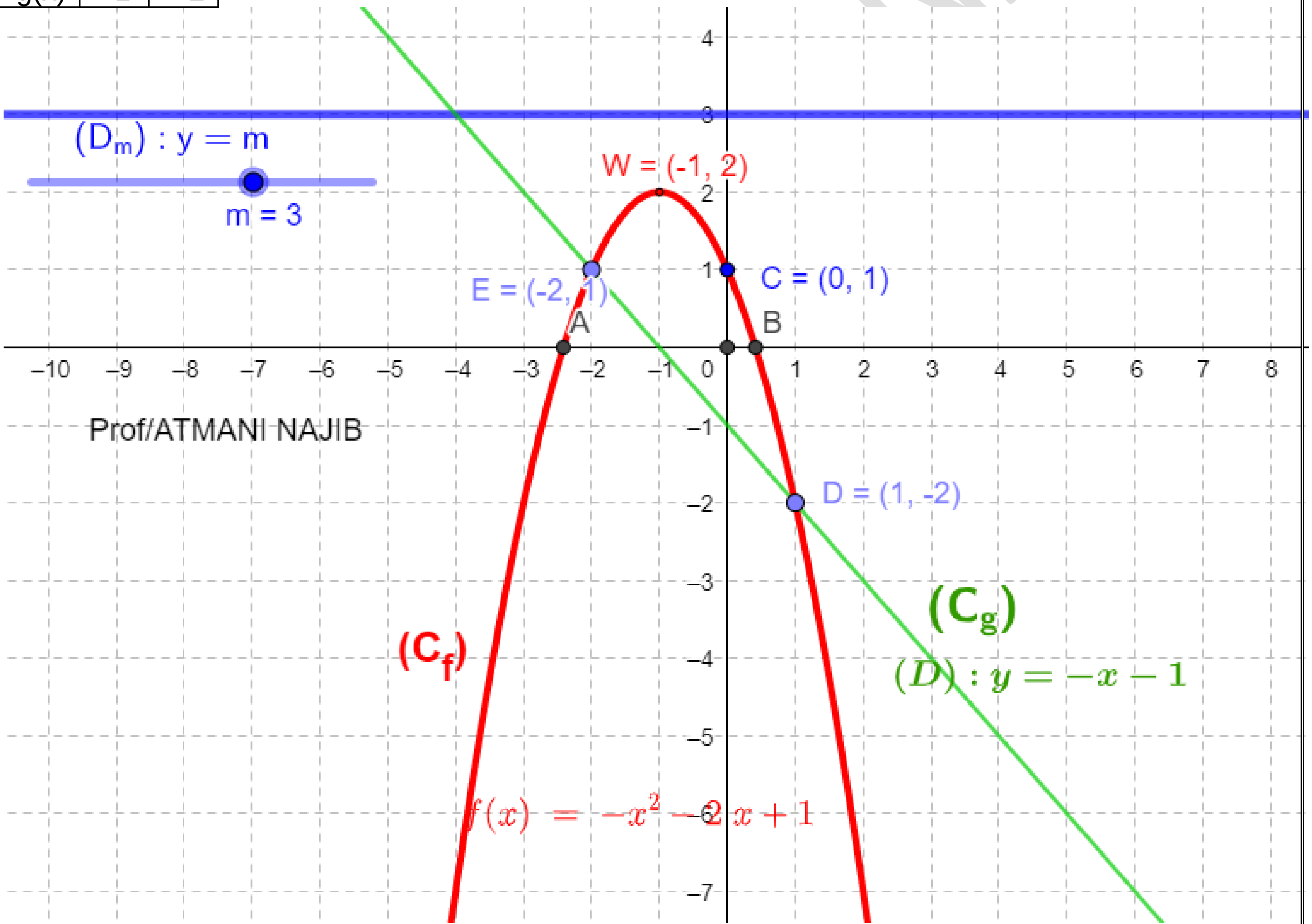
Et on a $f(0)=-0^2-2\times0+1=1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $C(0;1)$

7) la courbe représentative (C_f) dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	-7	-2	1	2	1	-2	-7

x	-2	1
g(x)	1	-2



8) a) Résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x=-2$ et $x=1$ donc $S=\{-2;1\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ Signifie : $-x^2-2x+1=-x-1$ c'est-à-dire : $-x^2-x+2=0$ c'est-à-dire :
$x^2+x-2=0$
$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times(-2)\times1=1+8=9>0$
$x_1=\frac{-1+\sqrt{9}}{2\times1}=\frac{-1+3}{2}=\frac{2}{2}=1$ et $x_2=\frac{-1-\sqrt{9}}{2\times1}=\frac{-1-3}{2}=\frac{-4}{2}=-2$
Donc : $S=\{-2;1\}$
9) a) Résolution graphique de l'inéquation $g(x)\geq f(x)$:
La courbe (C_g) est au-dessus de (C_f) si $x\in]-\infty;-2]\cup[1;+\infty[$
Donc $S=]-\infty;-2]\cup[1;+\infty[$
b) Résolution algébrique de l'inéquation : $g(x)\geq f(x)$:
$g(x)\geq f(x)$ Signifie $-x-1\geq -x^2-2x+1$
C'est-à-dire : $x^2+x-2\geq 0$
Les racines sont : $x_1=1$ et $x_2=-2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S=]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$
10) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $-x^2-2x+1-m=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$
$-x^2-2x+1-m=0$ Signifie $m=-x^2-2x+1$
Signifie : $m=f(x)$
Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) et la droite : $y=m$
Si : $m>2$ l'équation n'admet pas de solution
Si : $m=2$ il y'a une solution c'est : x = -1
Si : $m<2$ il y'a deux solutions
Exercice 7 : (***) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=4x^2-8x+6$
1)Déterminer D_f et déterminer α et β tel que : $f(x)=2(x+\alpha)^2+\beta$ pour tout $x\in\mathbb{R}$
2) Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ses éléments caractéristiques
3) Déterminer le Tableau de variations de f
4) Soient : (D) la droite d'équation $(D): y=x-3$ et deux points : $A(1;-1)$ et $B(0;-2)$ et $M(x;y)\in(D)$
a) Tracer la courbe représentative de (C_f) et la droite (D) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$
b) Déterminer les coordonnées de M pour que : MA^2+MB^2 soit minimale
Solution :1) f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$
$f(x)=4x^2-8x+6=4(x^2-2x)+6=4(x^2-2\times x\times1+1^2-1^2)+6$
$f(x)=4((x-1)^2-1)+6=4(x-1)^2-4+6$
Donc ; $f(x)=4(x-1)^2+2$ (la forme canonique : $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$)
Par suite : $\alpha=-1$ et $\beta=2$ et $a=4$
2)Les éléments caractéristiques de (C_f) :

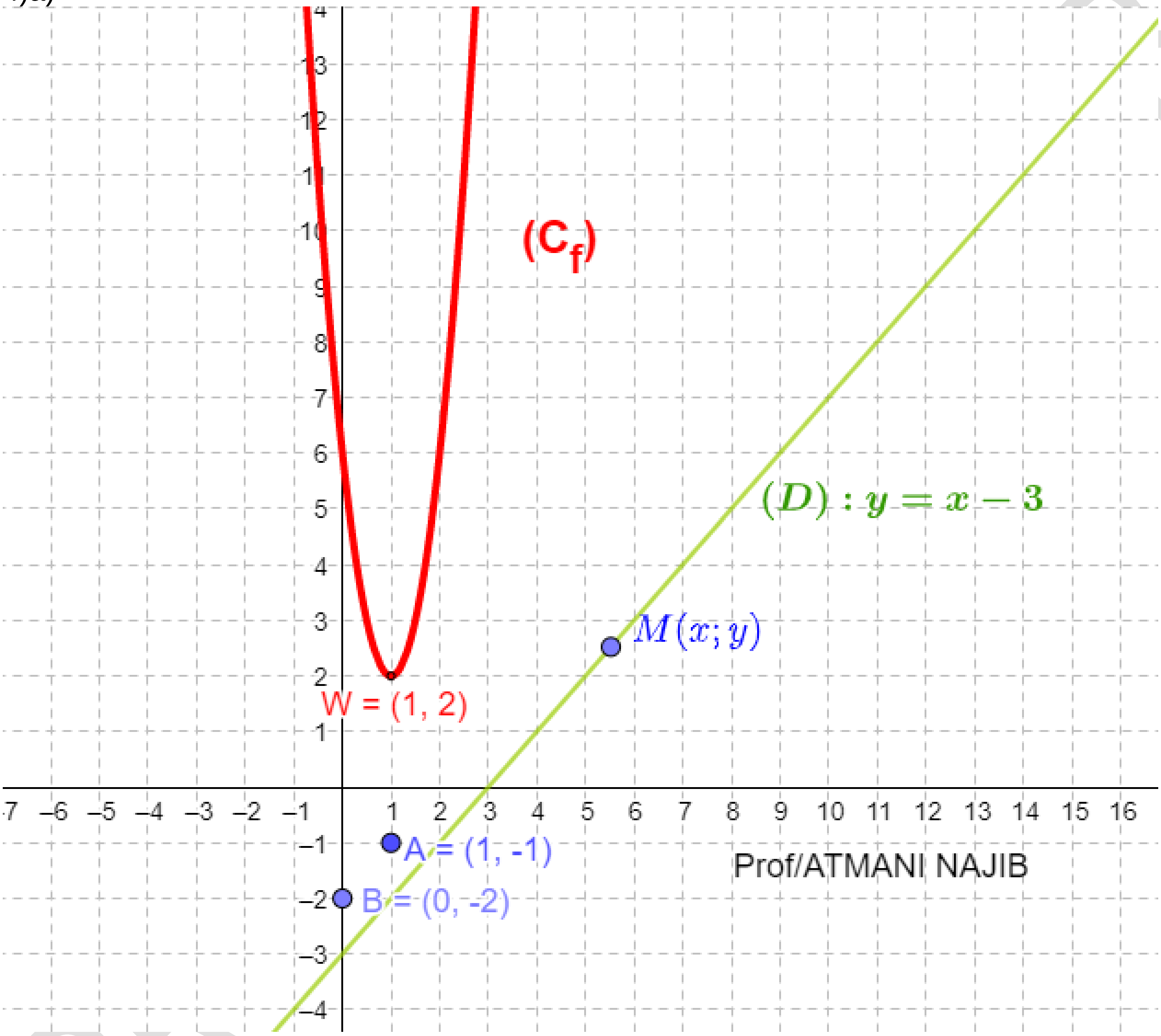
La courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta):W(1;2)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$.

3)Le Tableau de variations de f : On a $a=4>0$

Donc :

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$f(x)$	$\searrow$ 2 $\nearrow$

4)a)



4)b) $M(x;y)\in(D)$ signifie que : $y=x-3$

Donc : $M(x\,;\,x-3)$

Donc : $\overrightarrow{AM}(x-1\,;\,x-3+1)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{AM}(x-1\,;\,x-2)$

Et $\overrightarrow{BM}(x-0\,;\,x-3+2)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{BM}(x;\,x-1)$

$$MA^2+MB^2=\sqrt{(x-1)^2+(x-2)^2}^{\,2}+\sqrt{x^2+(x-1)^2}^{\,2}$$

Donc : $MA^2+MB^2=(x-1)^2+(x-2)^2+x^2+(x-1)^2$

Donc : $MA^2+MB^2=x^2-2x+1+x^2-4x+4+x^2+x^2-2x+1$

Donc : $MA^2+MB^2=4x^2-8x+6$

Donc : $MA^2+MB^2=f(x)$

MA^2+MB^2 est minimale si et seulement si $f\left(x\right)$ est minimale

D'après le tableau de variation de f on a : $f\left(1\right)=2$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : MA^2+MB^2 est minimale si $x=1$ et $y=2$

Par suite : $M\left(1\,;\,2\right)$

Exercice 8 : (***) Soit f une fonction tel que : $f\left(x\right)=\dfrac{x}{x-1}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

2) a) Soient $x_1\in D_f$ et $x_2\in D_f$ tel que : $x_1\neq x_2$

Montrer que : $T\left(x_1;x_2\right)=\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}=\dfrac{-1}{\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)}$

b) En déduire la monotonie de la fonction f sur les intervalles $I=\left]-\infty;1\right[$ et $J=\left]1;+\infty\right[$.

3) Dresser le tableau de variation de f

4) Comparer les deux nombres : $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

Solutions : 1) $D_f=\left\{x\in E\,/\,f\left(x\right)\in\mathbb{R}\right\}$

$D_f=\left\{x\in E\,/\,x-1\neq 0\right\}$

$D_f=\left\{x\in E\,/\,x\neq 1\right\}$

Par suite : $D_f=\mathbb{R}-\left\{1\right\}$

2) a) Soient $x_1\in\mathbb{R}-\left\{1\right\}$ et $x_2\in\mathbb{R}-\left\{1\right\}$ tel que : $x_1\neq x_2$

Montrons que : $T\left(x_1;x_2\right)=\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}=\dfrac{-1}{\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)}$

$$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=\frac{x_1}{x_1-1}-\frac{x_2}{x_2-1}=\frac{x_1\left(x_2-1\right)-x_2\left(x_1-1\right)}{\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)}=\frac{x_1x_2-x_1-x_2x_1+x_2}{\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)}=\frac{-\left(x_1-x_2\right)}{\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)}$$

Donc : $T\left(x_1;x_2\right)=\dfrac{\dfrac{-\left(x_1-x_2\right)}{\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)}}{x_1-x_2}=\dfrac{-\left(x_1-x_2\right)}{\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)}\dfrac{1}{\left(x_1-x_2\right)}=\dfrac{-1}{\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)}$

b)

• Déduction de la monotonie de la fonction f sur l'intervalle $I=\left]-\infty;1\right[$

Soient : $x_1\in\left]-\infty;1\right[$ et $x_2\in\left]-\infty;1\right[$ tel que : $x_1\neq x_2$

Donc : $\begin{cases}x_1<1\\x_2<1\end{cases}$ alors : $\begin{cases}x_1-1<0\\x_2-1<0\end{cases}$

Donc : $\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)>0$

Donc : $\dfrac{-1}{\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)}<0$

Et par suite f est strictement décroissante sur : $I=\left]-\infty;1\right[$

• Déduction de la monotonie de la fonction f sur l'intervalle $J=\left]1;+\infty\right[$

Soient : $x_1\in\left]1;+\infty\right[$ et $x_2\in\left]1;+\infty\right[$ tel que : $x_1\neq x_2$

Donc : $\begin{cases} x_1 > 1 \\ x_2 > 1 \end{cases}$ alors : $\begin{cases} x_1 - 1 > 0 \\ x_2 - 1 > 0 \end{cases}$

Donc : $(x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0$

Donc : $\dfrac{-1}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} < 0$

Et par suite f est strictement décroissante sur : $J =]1;+\infty[$

5) Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$ $\quad$ 1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$

4) Comparons les deux nombres : $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

On a : $\sqrt{2} \in]1;+\infty[$ et $\sqrt{3} \in]1;+\infty[$ et $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ et f est strictement décroissante sur : $J =]1;+\infty[$

Donc : $f\left(\sqrt{2}\right) > f\left(\sqrt{3}\right)$

Donc : $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} > \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

Exercice 9 : (**) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = \dfrac{-2x+1}{2x-4}$

(C_f) Sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer D_f

2) Ecrire $f(x)$ sous la forme : $f(x) = \beta + \dfrac{k}{x+\alpha}$ (déterminer α et β et k)

3) En déduire la nature de (C_f) et ses éléments caractéristiques

4) Dresser le Tableau de variations de f

5) Tracer la courbe représentative (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Solution :1) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = \dfrac{-2x+1}{2x-4}$

On a $f(x) \in \mathbb{R}$ signifie que : $2x - 4 \neq 0$ c'est-à-dire : $x \neq 2$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

2) Si $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ on a :

$$\begin{array}{r|l} -2x+1 & 2x-4 \\ \cline{2-2} -2x+4 & -1 \\ \cline{1-1} -3 & \end{array}$$

$$f(x) = \frac{-(2x-4)-3}{2x-4} = \frac{-(2x-4)}{2x-4} + \frac{-3}{2x-4} = -1 + \frac{-3/2}{x-2}$$

Puisque : $f(x) = \beta + \dfrac{k}{x+\alpha}$ Alors : $\alpha = -2$ et $\beta = -1$ et $k = -3/2$

3) On a : $f(x)=-1+\dfrac{-3/2}{x-2}$ avec $\alpha=-2$ et $\beta=-1$

Donc : (C_f) est une hyperbole de centre $W(-\alpha;\beta)$; $W(2;-1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=2$ et $y=-1$

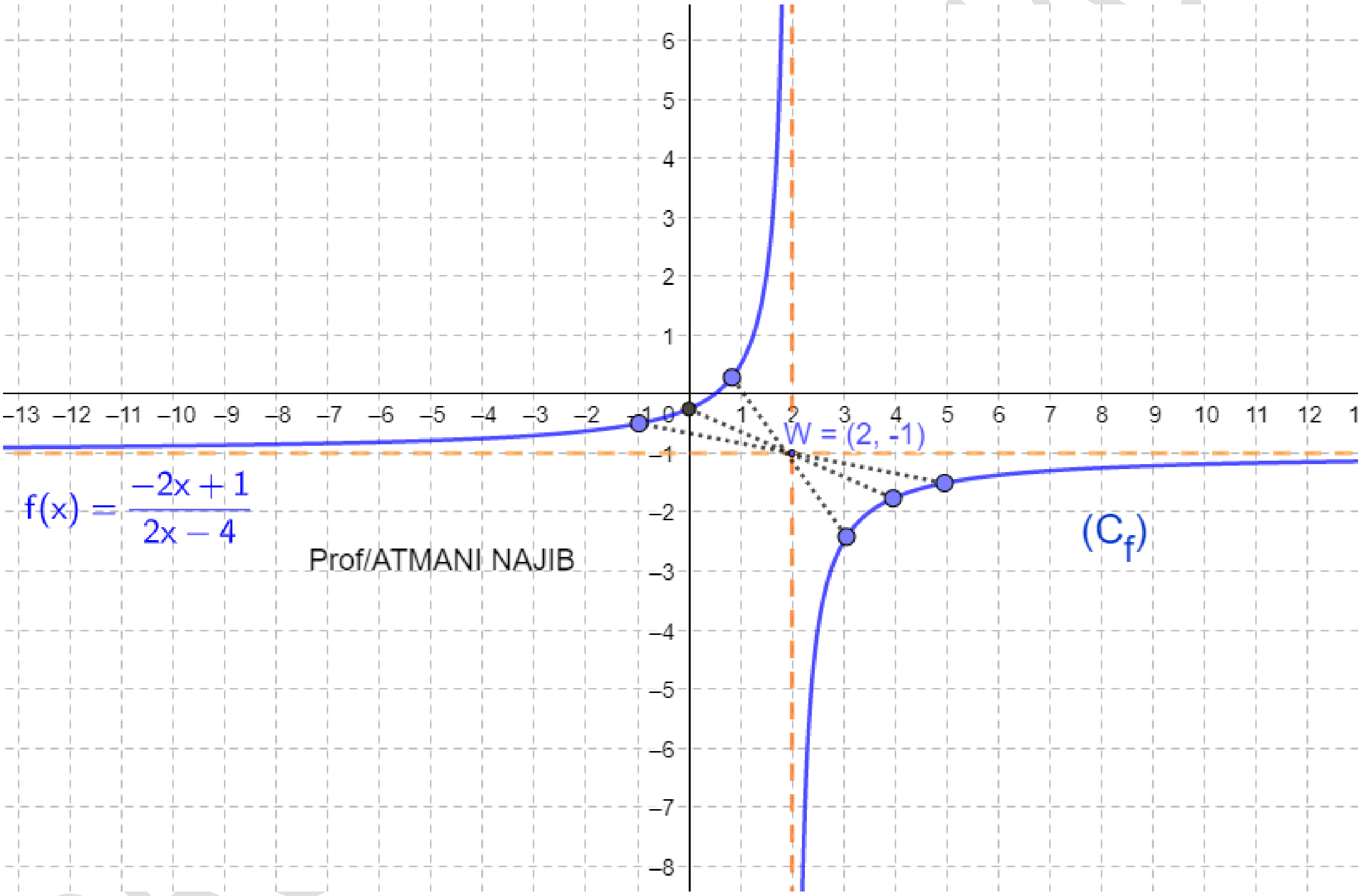
4) $k=-3/2<0$

Le tableau de variations de f :

x	$-\infty$ 2 $+\infty$	
$f(x)$	↗	↗

5)

-1	0-	1	2	3	4	5
-1/2	-1/4	1/2		-5/2	-7/4	-3 /2



Exercice 10 : (***) Soient f et g les deux fonctions définies par :

$f(x)=-x^2-2x+3$ et $g(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$ et (C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f et g

2) a) Vérifier que : $f(x)=-(x+1)^2+4$ si $x\in D_f$

b) Vérifier que : $g(x)=1-\dfrac{3}{x+2}$ si $x\in D_g$

3)a) Donner la nature de la courbe de f et ces éléments caractéristique

b) Dresser le tableau de variation de f

4)a) Donner la nature de la courbe de g et ces éléments caractéristique

b) Dresser le tableau de variation de g

5)a) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

b) Trouver le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

6)Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère

7)a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geq g(x)$

Solution : 1) $f(x)=-x^2-2x+3$ et $g(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$

Dans l'expression de $f(x)$, x peut prendre n'importe quelle valeur réelle

Donc $D_f=\mathbb{R}$

Tandis que pour : $g(x)$, x ne doit pas prendre de valeur telle que : $x+2=0$ soit $x=-2$

Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{-2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$

2) a) Vérifions que : $f(x)=-(x+1)^2+4$ si $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=-x^2-2x+3=-(x^2+2x)+3=-(x^2+2x+1^2-1^2)+3=-((x+1)^2-1)+3=-(x+1)^2+1+3=-(x+1)^2+4$$

Donc : $f(x)=-(x+1)^2+4$ (la forme canonique)

b) Vérifions que : $g(x)=1-\dfrac{3}{x+2}$ si $x\in\mathbb{R}-\{-2\}$

Soit : $x\in\mathbb{R}-\{-2\}$; $1-\dfrac{3}{x+2}=\dfrac{1(x+2)-3}{x+2}=\dfrac{x+2-3}{x+2}=\dfrac{x-1}{x+2}=g(x)$ (La forme réduite)

3)a) On utilisant un résumé de notre cours :

Rappelle : $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$ (forme canonique)

Dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\alpha$

Dans notre exercice on a : $f(x)=-(x+1)^2+4$ (la forme canonique) : $\alpha=1$ et $\beta=4$

Dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta)$ c'est-à-dire :

$W(-1;4)$ et d'axe de symétrie la droite : $x=-\alpha=1$

b) Le tableau de variations de f :

Dans notre exercice on a : $-\alpha=-1$ et $\beta=4$ et $a=-1<0$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f		$\nearrow$	4	$\searrow$	

4)a) On utilisant un résumé de notre cours :

Rappelle : Si : $g(x)=\beta+\dfrac{k}{x+\alpha}$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(-\alpha;\beta)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\alpha$ et $y=\beta$

Dans notre exercice on a : $g(x)=1-\frac{3}{x+2}$ si $x\in\mathbb{R}-\{-2\}$ donc : $\alpha=2$ et $\beta=1$ et $k=-3<0$

Donc (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(-2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations :

$x=-2$ et $y=1$

b)Et puisque : $k=-3<0$ alors : g est strictement croissante sur les intervalles :

$]-\infty;-2[$ et $]-2;+\infty[$

Donc le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

5)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l''équation $f(x)=0$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow -x^2-2x+3=0$ $\qquad \Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times3\times(-1)=4+11=16>0$

$x_1=\frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2\times(-1)}=\frac{2+4}{-2}=\frac{6}{-2}=-3$ et $x_2=\frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\times(-1)}=1$

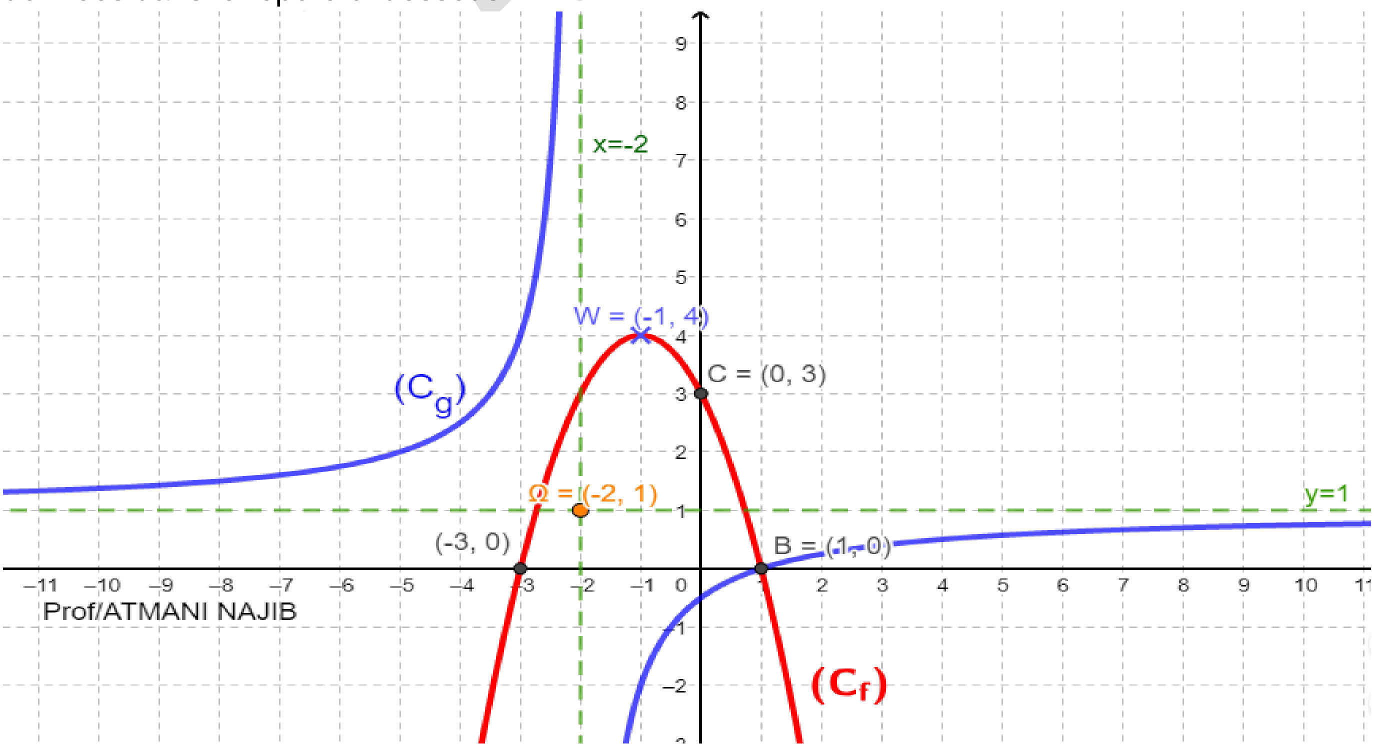
Donc : les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont : $A(-3;0)$ et $B(1;0)$

b) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses :

$g(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses est : $C(1;0)$

6)Représentation graphique : Les courbes représentatives (C_f) (en rouge) et (C_g) (en bleu) sont données dans le repère ci-dessous



7) a) Résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$:

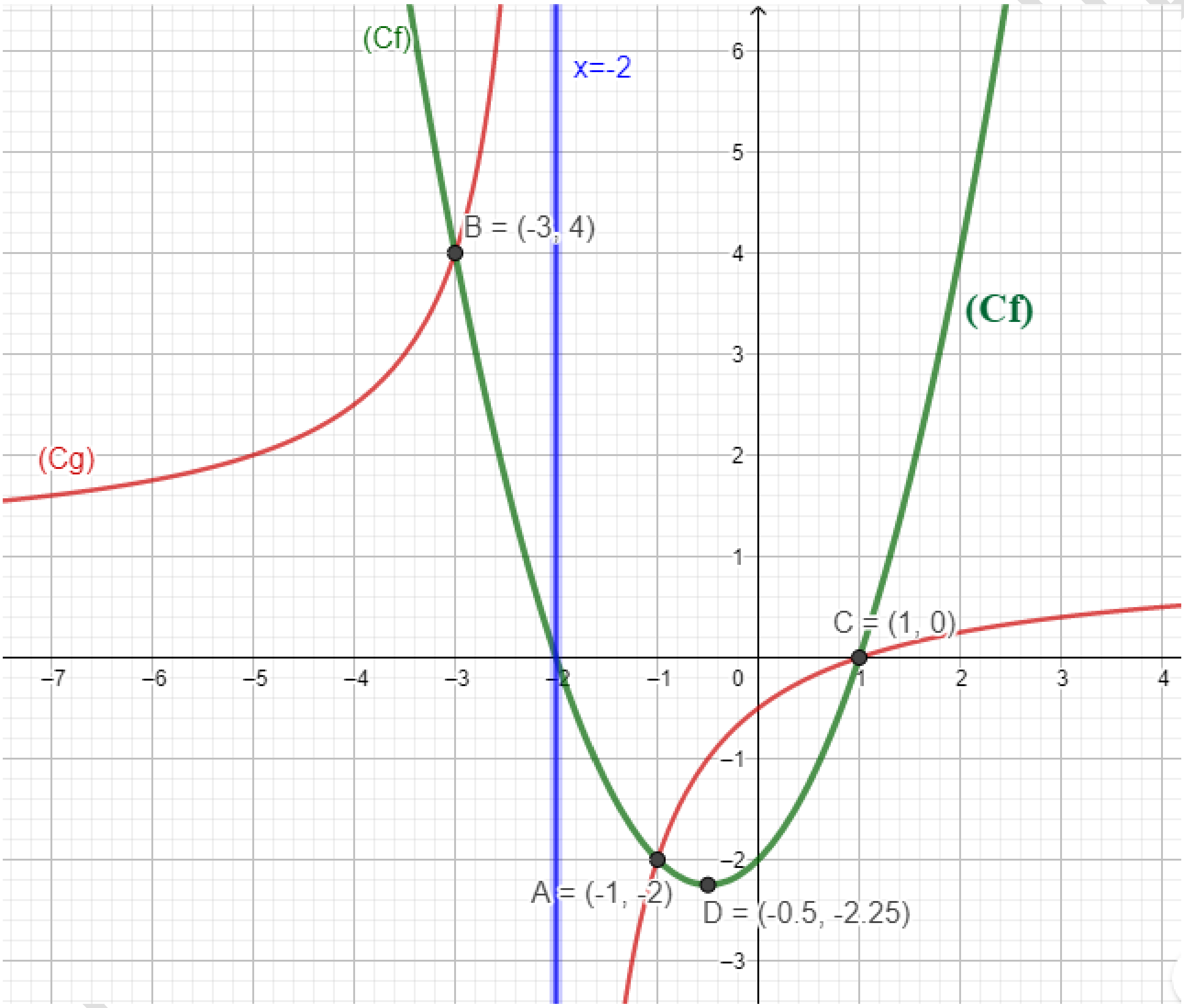
Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc : $x=1$ par suite : $S=\{1\}$

7)b) Résolution graphique de l'inéquation $f(x)\geq g(x)$:

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in]-2;1]$ Donc $S=]-2;1]$

Exercice 11 : (***)**:** Soient f et g deux fonctions définies par Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) si dessous :



1) Déterminer D_f et D_g

2) On pose : $f(x)=ax^2+bx+c$ et $g(x)=\frac{x+\alpha}{x+2}$

Graphiquement :

a) Déterminer les points d'intersections de (C_f) et (C_g)

b) Résoudre l'équation $f(x)=g(x)$

c) Résoudre l'inéquation $f(x)>g(x)$

d) Dresser les tableaux de variations de f et g

3) a) Montrer que : $f(x)=x^2+x-2$

b) Montrer que : $g(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$

Solution : 1) a) $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}-\{-2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$

2) a) Graphiquement les points d'intersections de (C_f) et (C_g) sont : $A(1;0);B(-1;-2);B(-3;4)$

2) b) Pour déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc : $x=1$ et $x=-1$ et $x=-3$ par suite : $S=\{-3;-1;1\}$

c) Résolution graphique de l'inéquation $f(x)>g(x)$:

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in]-\infty;-3[\cup]-2;-1[\cup]1;+\infty[$

Donc : $S=]-\infty;-3[\cup]-2;-1[\cup]1;+\infty[$

d) Déterminons les variations de f et g :

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$-9/4$	$\nearrow$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$

3)a) Montrons que : $f(x)=x^2+x-2$

Puisque : $f(0)=-2$ alors : $c=-2$

Puisque : $f(1)=0$ et $f(-2)=0$ alors : $\begin{cases}a+b-c=0\\4a-2b-c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2\\4a-2b=2\end{cases}\Leftrightarrow a=b=1$

D'où : $f(x)=x^2+x-2$

b) Montrons que : $g(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$

On a : $g(x)=\dfrac{x+\alpha}{x+2}$ et puisque : $g(1)=0$ alors : $\dfrac{1+\alpha}{3}=0\Leftrightarrow\alpha=-1$

D'où : $g(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien