Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°6 : PRODUIT SCALAIRE

Exercice1 : (*) Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs tels que : $AB=\frac{\sqrt{2}}{4}$ et $AC=\sqrt{8}$ et $BAC=\frac{5\pi}{4}$

Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

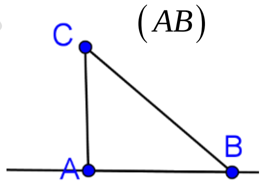
Solution : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\cos BAC=\frac{\sqrt{2}}{4}\times\sqrt{8}\times\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{16}}{4}\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\frac{4}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice2 : (**) Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A et $AB=2cm$

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CB}$

Solution : On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AA}$ car : A est le projeté orthogonales de A sur (AB) et B est le projeté orthogonales de B sur (AB) et A est le projeté orthogonales de C sur (AB)



Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AA}=AB\times AA=AB\times 0=0$

De même : par utilisation des projections orthogonales sur la droite : (AB)

On a : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}^2=BA^2=2^2=4$ Remarque : $\overrightarrow{MN}^2=MN^2$

De même : par utilisation des projections orthogonales sur la droite : (AB)

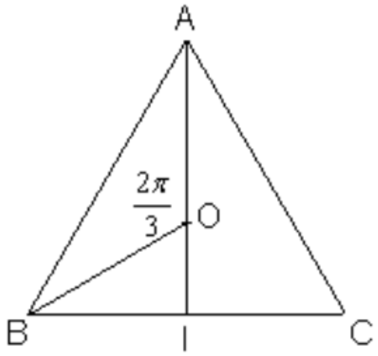
On a : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}^2=-AB^2=-4$

Exercice3 : (**) Soit un triangle équilatéral ABC de côté 2 et de centre O

1) Calculer : a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ c) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{OB}$

2) Montrer que : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CO}$

Solution :



1) a) Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\cos BAC=2\times 2\times\cos\frac{\pi}{3}=4\times\frac{1}{2}=2$

b) Calculons : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$

Puisque le triangle est équilatéral, la médiane [AI] est aussi hauteur

Donc : d'après le théorème de Pythagore : $AI^2=AB^2-BI^2$

Donc : $AI=\sqrt{AB^2-BI^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ et ainsi : $OA=\frac{2}{3}AI=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

On conclut donc que : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OB}\right\|\times\cos AOB=OA\times OB\times\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\frac{4}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{3}$

C) Calculons : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{OB}$

On a : O étant le centre de gravité du triangle équilatéral, il est aussi centre du cercle circonscrit au Triangle, donc (BO) est la hauteur issue de B dans le triangle, donc est orthogonale à (AC)

Donc : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{OB}=0$

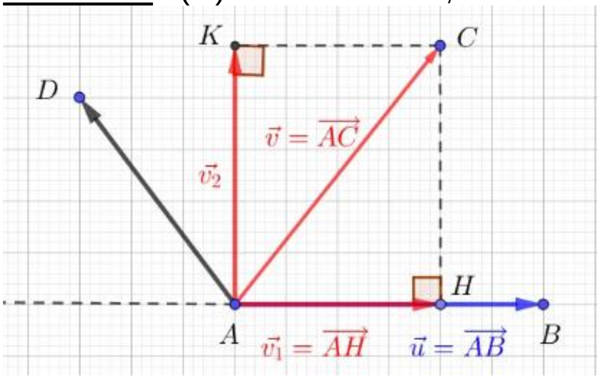
2) Montrons que : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CO}$

En utilisant la relation de Chasles, la distributivité du produit scalaire, et la question précédente, on obtient : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}.\left(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}\right)=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{OB}$

Puisque le triangle est équilatéral, la médiane [BO] est aussi hauteur donc : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{OB}=0$

Donc : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CO}$

<u>Exercice4</u> : (**) Soit le carré A ; B et C trois points du plan comme indiqué sur la figure ci-dessous



Avec : $AB=6$ et $AH=4$

Calculer les produits scalaires suivants : 1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ 2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

Solution :1) Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

H est Le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB)

Donc :H Le projeté du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sur la droite (AB) est le vecteur $\overrightarrow{AH}$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

Comme Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ étant colinéaire et de même sens alors :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=AB\times AH=6\times4=24$

2) Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

Soit P le projeté orthogonal du point D sur la droite (AB)

Donc : Le projeté du vecteur $\overrightarrow{AD}$ sur la droite (AB) est le vecteur $\overrightarrow{AP}$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}$

Comme Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AP}$ étant colinéaire et de sens contraires

Et comme : $AB=6$ et $AP=3$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}=-AB\times AP=-6\times3=-18$

<u>Exercice5</u> : (**) Soit CFG un triangle tels que : $CF=7$ et $CG=6$ et $FG=3$

Calculer : $\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF}$

Solution :Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs :On a : $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ et $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

Donc : $\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{CG}\|^2+\|\overrightarrow{CF}\|^2-\|\overrightarrow{CG}-\overrightarrow{CF}\|^2\right)$

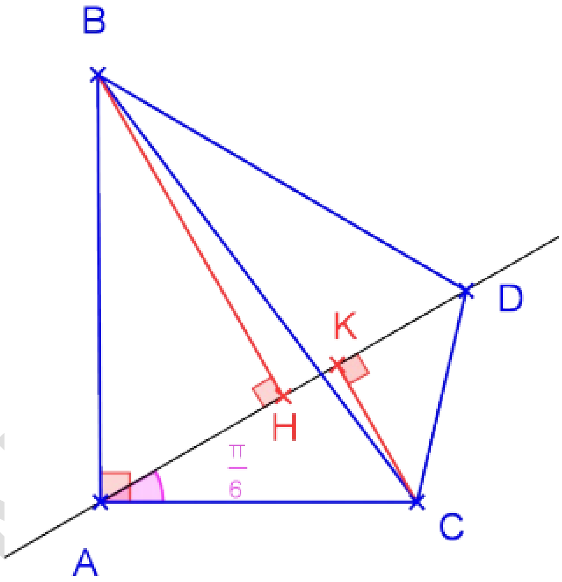
$\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\left(CG^2+CF^2-FG^2\right)=\frac{1}{2}\left(6^2+7^2-3^2\right)=38$

Exercice6 : (*)

Considérons un triangle ABC rectangle en A tel que AC=5 et AB=4 et $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Soit D le point du plan vérifiant AD=4 eT $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

H est le pied de la hauteur du triangle ABD issue de B et K est le pied de la hauteur du triangle ACD issue de C.



Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ 2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ 3) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK}$ 4) $\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH}\right)$ 5) $\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}\right)$ 6) $\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{HC}$

Solution :1) Calculons : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

Le triangle ABC est rectangle en A donc le pied de la hauteur du triangle ABC issue de C est A, Donc : A étant le projeté orthogonal de C sur la droite (AB)

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}^2=BA^2=AB^2=4^2=16$

2)Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

Le triangle ABH est rectangle en H donc le pied de la hauteur du triangle ABH issue de B est H, Donc : H étant le projeté orthogonal de B sur la droite (AH)

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AH}^2=AH^2$

Dans le triangle rectangle ABH : $BAH=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{AH}{AB}=\frac{1}{2}$

Donc : $AH=\frac{1}{2}AB=2$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=AH^2=2^2=4$

3) Calculons : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK}$

Le triangle ACK est rectangle en K donc le pied de la hauteur du triangle ACK issue de C est K, Donc : K étant le projeté orthogonal de C sur la droite (AK) = (AD)

Donc : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AK}^2=AK^2$

$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{AK}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc : $AK=\frac{\sqrt{3}}{2}AC=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

Donc : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK}=\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{75}{2}$

4) Calculons : $\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH}\right)$

$\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

Or, les vecteurs : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}=0$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=4$

5) Calculons : $\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}\right)$

$\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}\right)=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK}$ or : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA}=0$

Donc : $\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}\right)=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK}=\frac{75}{2}$

6) Calculons : $\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{HC}$

On a : $\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{HC}=\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}\right).\left(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HA}$ or : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

$\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{HA}=KA\times HA\cos\left(\overrightarrow{KA};\overrightarrow{HA}\right)=\frac{5\sqrt{3}}{2}\times 2\times 1=5\sqrt{3}$ car $\cos\left(\overrightarrow{KA};\overrightarrow{HA}\right)=\cos 0=1$

$\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AC}=-\frac{75}{2}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HA}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=-4$

$\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{HC}=5\sqrt{3}-\frac{75}{2}-4=\frac{10\sqrt{3}-75-8}{2}=\frac{10\sqrt{3}-83}{2}$

Exercice7 : (*) ABC est un triangle tel que AB=6 ; BC=4 et AC=5.

Déterminer une mesure en degré à 10^{-1} près de l'angle BAC

Solution : D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC nous obtenons :

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos BAC$

$16=25+36-2\times 5\times 6\cos BAC$

Donc : $\cos BAC=\frac{45}{60}=\frac{3}{4}$

D'où : $BAC=\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\simeq 41,4^\circ$

Exercice8 : (**) Soit ABC un triangle tel que et $AB=5$ et $BC=14$ et $AC=\sqrt{201}$

Soit I le milieu du segment $[BC]$

1) Montrer que : $AI=8$

2) Montrer que : $BAI=\frac{\pi}{3}$

3) Soit H un point du segment $[AB]$ tel que $AH=4$

Montrer que les droites : (AH) et (IH) sont perpendiculaires

Solution : 1) Montrons que : $AI=8$

On a : Soit I le milieu du segment $[BC]$

D'après le théorème de la médiane dans ABC on a : $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{BC^2}{2}$

Donc : $AI^2=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\frac{BC^2}{2}\right)$

Donc : $AI^2=\frac{1}{2}(25+201-98)=64$ Par suite : $AI=\sqrt{64}=8$

2) Montrons que : $BAI=\frac{\pi}{3}$

D'après le Théorème d'Al Kashi dans le triangle AIB on a :

$BI^2=AB^2+AI^2-2AB\times AI\cos\left(BAI\right)$

Donc : $\cos\left(BAI\right)=\dfrac{AB^2+AI^2-BI^2}{2AB\times AI}=\dfrac{25+64-49}{2\times5\times8}=\dfrac{1}{2}$ par suite : $\cos\left(BAI\right)=\dfrac{1}{2}=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

Donc : $BAI=\dfrac{\pi}{3}$

3) Montrons que les droites : (AH) et (IH) sont perpendiculaires

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{IH}=\overrightarrow{AH}\cdot\left(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AI}\right)=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AI}=AH^2-\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AI}$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{IH}=AH^2-AH\times AI\cos\left(HAI\right)$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{IH}=16-4\times8\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=16-32\times\dfrac{1}{2}=16-16=0$

Par suite : Les droites : (AH) et (IH) sont perpendiculaires

Exercice9 : (***) Soit ABC un triangle tel que et $AB=6$ et $AC=5$ et $BC=7$

1) Calculer $\cos BAC$

2) a) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

b) En déduire que : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=30$

3) Soit K la projection orthogonale du point A sur la droite (BC)

Calculer : BK

Solution : 1) Calculons $\cos BAC$?

D'après le Théorème d'Al Kashi dans le triangle ABC

On a : $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos BAC$

Donc : $\cos BAC=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\times AC}$

Donc : $\cos BAC=\dfrac{36+25-49}{60}=\dfrac{1}{5}$

2) a) Calculons $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos BAC$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\times5\times\dfrac{1}{5}=6$

b) déduction que : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=30$?

On a : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=BA^2-6=36-6=30$

3) Calculons : BK

On a : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=30$ et puisque K est la projection orthogonale du point A sur la droite (BC)

Alors : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BC}=30$

Exercice10 : (****) On considère un rectangle $ABCD$ tel que : $AB=4$ et $AD=3$

Et soit E un point tel que : $\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

1) a) Calculer : $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$ b) En déduire : $\left\|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right\|$

2) Calculer : $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}$

3) a) Calculer : $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}$

b) En déduire : $\cos\left(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}\right)$

c) En utilisant la calculatrice : déduire une mesure de l'angle : $\left(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}\right)$

Solution :1) a) Le point D est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AD)

Par conséquent : $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}^2=AD^2=9$

b) On sait d'après un théorème que : $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right)$

Dans le triangle ADC rectangle en D on applique le théorème de Pythagore.

$AC^2=AD^2+DC^2=9+16=25$

Par conséquent : $9=\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right\|^2-AC^2-AD^2\right)$

On en déduit que : $18=\left\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right\|^2-9-25$

Donc : $\left\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right\|^2=52$

Donc : $\left\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right\|=\sqrt{52}$

2) Calculons : $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}$

Le point B est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AE)

Donc : $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=AE\times AB$ car : $\overrightarrow{AB}$. et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires et de même sens

Donc : $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=6\times4=24$

3) a) Calculons : $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}$

$$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}+0+0+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}$$

$$=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AD}^2$$

$$=\frac{3}{4}BA^2+AD^2$$

$$=\frac{3}{4}\times4^2+3^2=\boxed{21}$$

b) On a : $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=EC\times ED\times\cos\left(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}\right)$

Dans le triangle EBC rectangle en B on applique le théorème de Pythagore :

$EC^2=EB^2+BC^2=4+9=13$

Donc : $EC=\sqrt{13}$

Dans le triangle AED rectangle en A on applique le théorème de Pythagore :

$ED^2=EA^2+AD^2=36+9=45$

Donc : $ED=\sqrt{45}$

On a donc : $21=\sqrt{13}\times\sqrt{45}\times\cos\left(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}\right)$

Donc : $\cos\left(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}\right)=\frac{21}{\sqrt{13}\times\sqrt{45}}=\frac{21}{\sqrt{13\times45}}=\frac{21}{3\sqrt{13\times5}}=\frac{7}{\sqrt{65}}=\frac{7\sqrt{65}}{65}$

c) On a : $\cos\left(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}\right)=\frac{7\sqrt{65}}{65}$ la calculatrice donne : $\left(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}\right)\simeq29,7^\circ$

Exercice11 : (****) Soient A et B deux points distincts du plan.

Déterminer l'ensemble (Δ) des points M du plan tel que : $\frac{MA}{MB}=1$

Solution : soit M un point du plan

$M\in(\Delta)$ Équivaut à : $\frac{MA}{MB}=1$ Équivaut à : $MA=MB$

Équivaut à dire que : (Δ) est la médiatrice du segment $[AB]$

Par conséquent : l'ensemble (Δ) des points M du plan tel que : $\frac{MA}{MB}=1$ est la médiatrice du segment $[AB]$

Exercice12 : (****) Soit A et B deux points dans le plan tel que : $AB=10$

Et soit I le milieu du segment $[AB]$

1) Déterminer (Δ) l'ensemble des points M du plan tel que : $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=10$

2) Déterminer (C) l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2+MB^2=68$

Solution : $AB=10$ et le milieu du segment $[AB]$

1) Déterminons (Δ) l'ensemble des points M du plan tel que : $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=10$

Soit : H la projection orthogonale du point M sur la droite (AB)

Donc : $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=IH.AB$

Equivaut à : $IH.AB=10$ Equivaut à : $IH=1$

Puisque $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens alors : $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{10}\overrightarrow{AB}$

Et par suite : (Δ) est la droite qui passe par le point H et tel que :

$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{10}\overrightarrow{AB}$ et perpendiculaire a (AB)

2) Déterminons (C) l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2+MB^2=68$

Donc : $MA^2+MB^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

Donc : $MA^2+MB^2=\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\,\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\,\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}^2$

Donc : $MA^2+MB^2=2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\left(\frac{AB}{2}\right)^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2$

Puisque I le milieu du segment $[AB]$ donc : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=0$

Donc : $MA^2+MB^2=2MI^2+2\overrightarrow{MI}\left(\vec{0}\right)+50$

Donc : $MA^2+MB^2=2MI^2+50$ par suite on a : $2MI^2+50=68$

Donc : $MI^2=9$ Cela équivaut à dire que $MI=3$

Par conséquent : l'ensemble (C) des points M du plan tel que : $MA^2+MB^2=68$ est le cercle de centre I et de rayon $R=3$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien