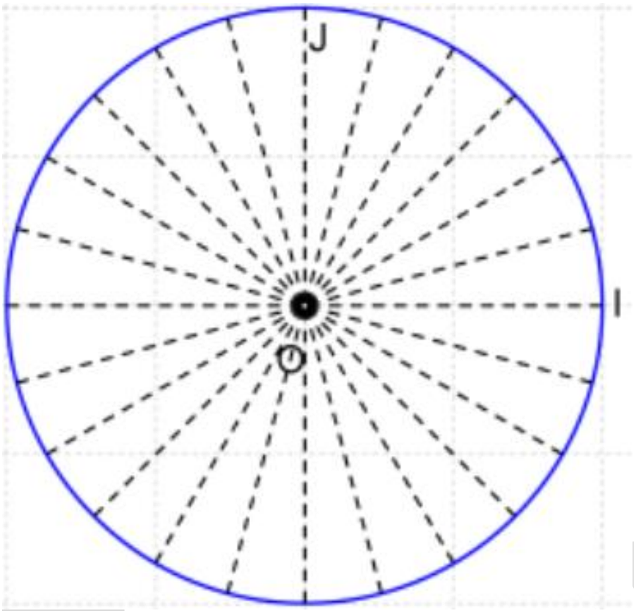
Correction Série N°6 : TRIGONOMÉTRIE1

Exercice1 : (*)
Convertir en degré et Placer les points suivants sur le cercle en fonction du réel qui leur est associé :

$A(\pi)$; $B\left(\frac{\pi}{12}\right)$; $C\left(\frac{\pi}{3}\right)$; $D\left(\frac{3\pi}{4}\right)$; $E\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; $F\left(\frac{2\pi}{3}\right)$; $G\left(\frac{\pi}{2}\right)$; $H\left(\frac{-3\pi}{2}\right)$

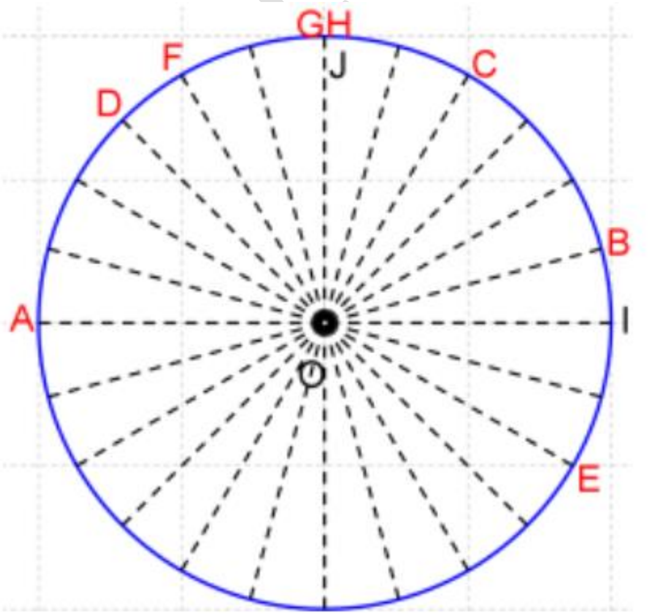


Solution :

$A\left(\pi rad = \frac{180}{3} = 60^\circ\right)$; $B\left(\frac{\pi}{12} rad = \frac{180}{12} = 15^\circ\right)$; $C\left(\frac{\pi}{3} rad = \frac{180}{3} = 60^\circ\right)$;

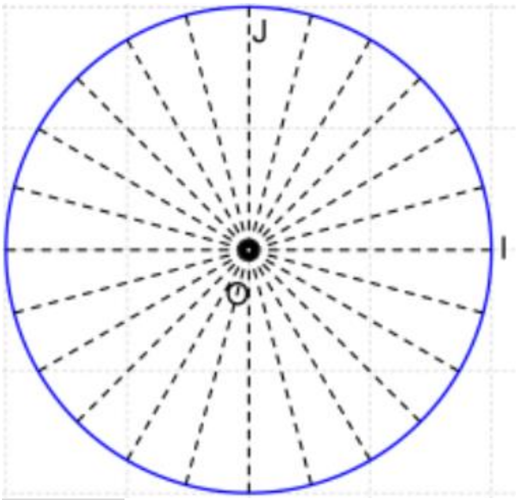
$D\left(\frac{3\pi}{4} rad = \frac{3\times180}{4} = 135^\circ\right)$; $E\left(-\frac{\pi}{6} rad = -\frac{180}{12} = -30^\circ\right)$; $F\left(\frac{2\pi}{3} rad = \frac{2\times180}{3} = 120^\circ\right)$

;$G\left(\frac{\pi}{2} rad = \frac{180}{2} = 90^\circ\right)$



Exercice2 : (*) Déterminer l'abscisse curviligne principale de chacune des points suivants et Placer les points sur le cercle trigonométrique :

$A(5\pi)$; $B\left(-\dfrac{5\pi}{2}\right)$; $C\left(\dfrac{11\pi}{3}\right)$; $D\left(-\dfrac{11\pi}{4}\right)$; $E\left(\dfrac{13\pi}{6}\right)$; $F\left(\dfrac{-5\pi}{3}\right)$; $G(-534\pi)$; $H\left(\dfrac{-99\pi}{2}\right)$



Solution : Déterminons les abscisses curvilignes principales

On va Trouver des mesures équivalentes « à un certain nombre de tours près :

$A(5\pi)$: $5\pi = \pi + 2\times 2\pi$ et $\dfrac{\pi}{2} \in]-\pi\,;\pi]$

$B\left(-\dfrac{5\pi}{2}\right)$: $-\dfrac{5\pi}{2} = \dfrac{-\pi-4\pi}{2} = \dfrac{-\pi}{2} - \dfrac{4\pi}{2} = \dfrac{-\pi}{2} - 1\times 2\pi$ et $-\dfrac{\pi}{2} \in]-\pi\,;\pi]$

$C\left(\dfrac{11\pi}{3}\right)$: $\dfrac{11\pi}{3} = \dfrac{12\pi-\pi}{3} = \dfrac{12\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{-\pi}{3} + 2\times 2\pi$ et $-\dfrac{\pi}{3} \in]-\pi\,;\pi]$

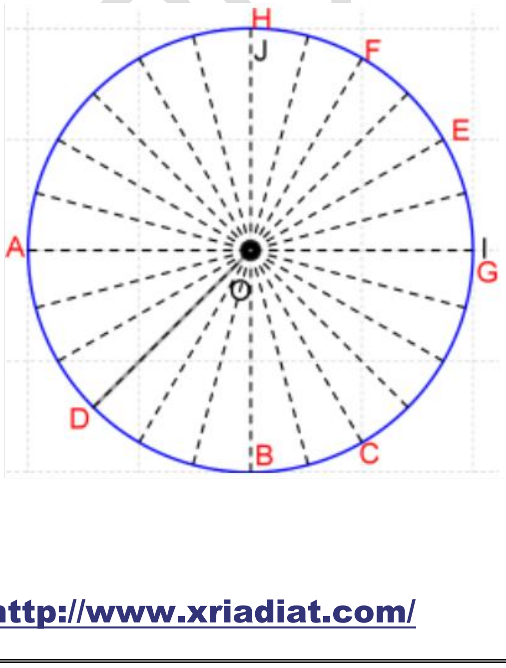
$D\left(-\dfrac{11\pi}{4}\right)$: $\dfrac{-11\pi}{4} = \dfrac{-8\pi-3\pi}{4} = \dfrac{-8\pi}{4} - \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{-3\pi}{4} - 1\times 2\pi$ et $-\dfrac{3\pi}{4} \in]-\pi\,;\pi]$

$E\left(\dfrac{13\pi}{6}\right)$: $\dfrac{13\pi}{6} = \dfrac{12\pi+\pi}{6} = \dfrac{12\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6} + 1\times 2\pi$ et $\dfrac{\pi}{6} \in]-\pi\,;\pi]$

$F\left(\dfrac{-5\pi}{3}\right)$: $\dfrac{-5\pi}{3} = \dfrac{-6\pi+\pi}{3} = \dfrac{-6\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} - 1\times 2\pi$ et $\dfrac{\pi}{3} \in]-\pi\,;\pi]$

$G(-534\pi)$: $-534\pi = 0 + -267\times 2\pi$ et $0 \in]-\pi\,;\pi]$

$H\left(\dfrac{-99\pi}{2}\right)$: $-\dfrac{99\pi}{2} = \dfrac{-100\pi+\pi}{2} = \dfrac{-100\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} - 25\times 2\pi$ et $\dfrac{\pi}{2} \in]-\pi\,;\pi]$



Exercice3 : (*) Associer entre eux les nombres qui correspondent au même point du cercle :

π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	6π	$-\frac{4\pi}{3}$	$\frac{9\pi}{4}$	$-\frac{14\pi}{3}$
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
14π	$-\frac{8\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	3π	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{3}$

Solution :

$3\pi = \pi + 1\times 2\pi$ Egalités à 2π près

$\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi+4\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 1\times 2\pi$ Egalités à 2π près

$\frac{-5\pi}{4} + 2\pi = \frac{-5\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ Egalités à 2π près

$\frac{7\pi}{4} - 2\pi = \frac{7\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$ Egalités à 2π près

$\frac{3\pi}{2} - 2\pi = \frac{3\pi}{2} - \frac{4\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ Egalités à 2π près

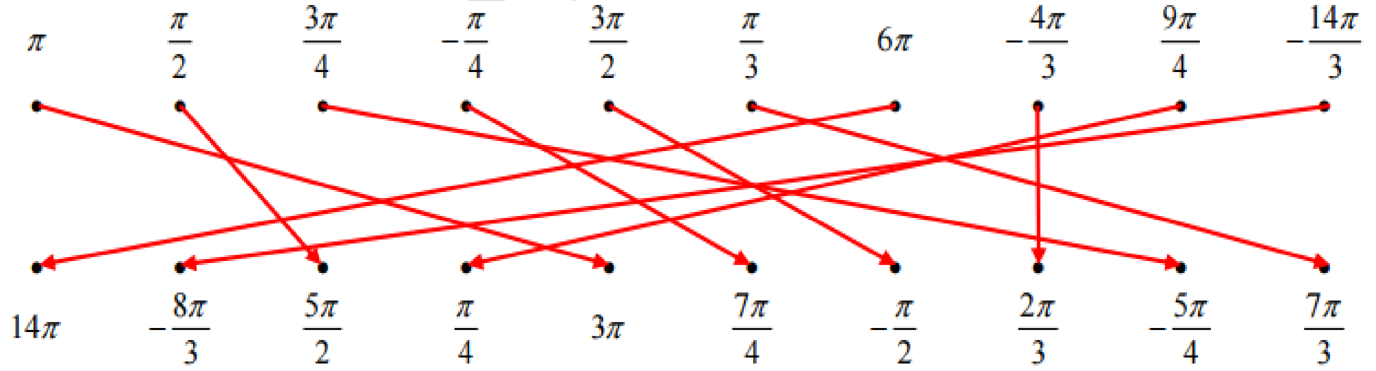
$\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$

$6\pi + 8\pi = 14\pi = 7\times 2\pi$ Egalités à 2π près

$\frac{-4\pi}{3} + 2\pi = \frac{-4\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ Egalités à 2π près

$\frac{9\pi}{4} - 2\pi = \frac{9\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ Egalités à 2π près

$\frac{-14\pi}{3} + 2\pi = \frac{-14\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = -\frac{8\pi}{3}$ Egalités à 2π près

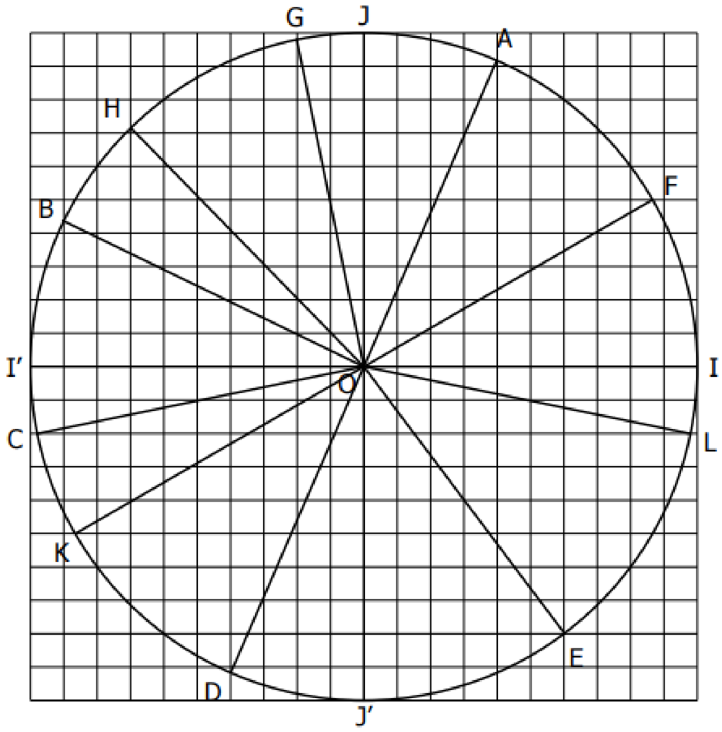


Exercice4 : (*)

Déterminer à l'aide du cercle trigonométrique (OI=1) les cosinus et sinus des angles Suivants :

$\cos(IOA)$; $\cos(IOB)$; $\sin(IOC)$; $\cos(IOD)$; $\sin(IOE)$;$\sin(IOL)$;$\sin(IOF)$; $\cos(IOJ)$;

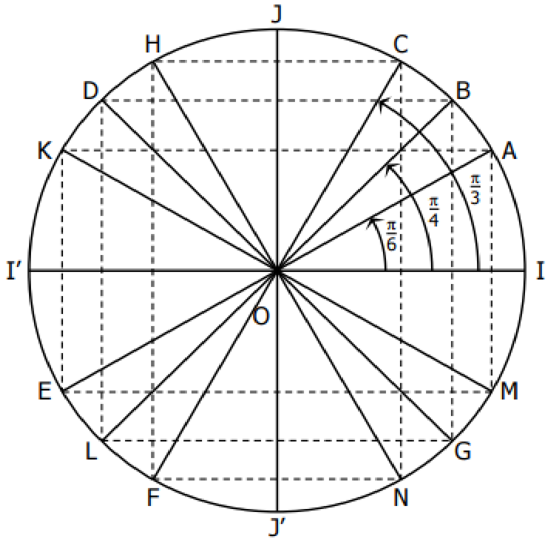
$\cos(IOG)$; $\cos(IOH)$;$\sin(IOI')$;$\sin(IOK)$;$\sin(IOJ')$;$\cos(IOI')$



Solution : $\cos\left(IOA\right)=0,4$; $\cos\left(IOB\right)=-0,9$; $\sin\left(IOC\right)=-0,2$; $\cos\left(IOD\right)=-0,4$;
$\sin\left(IOE\right)=-0,8$; $\sin\left(IOL\right)=-0,2$; $\sin\left(IOF\right)=0,5$; $\cos\left(IOJ\right)=0$; $\cos\left(IOG\right)=-0,2$;
$\cos\left(IOH\right)=-0,7$; $\sin\left(IOI'\right)=0$; $\sin\left(IOK\right)=-0,5$; $\sin\left(IOJ'\right)=-1$; $\cos\left(IOI'\right)=-1$

Exercice5 : (*)On a donné les valeurs exactes du sinus et cosinus de quelques angles remarquables entre 0 et 90°.

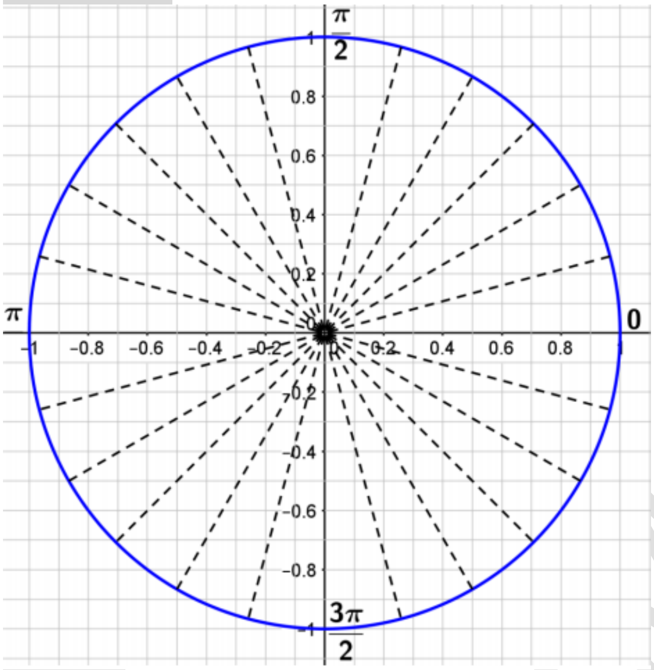
Point								I	A	B	C	J				
***x* (°)**								0	30	45	60	90				
***x* (rad)**	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cos *x*								1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0				
sin *x*								0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1				



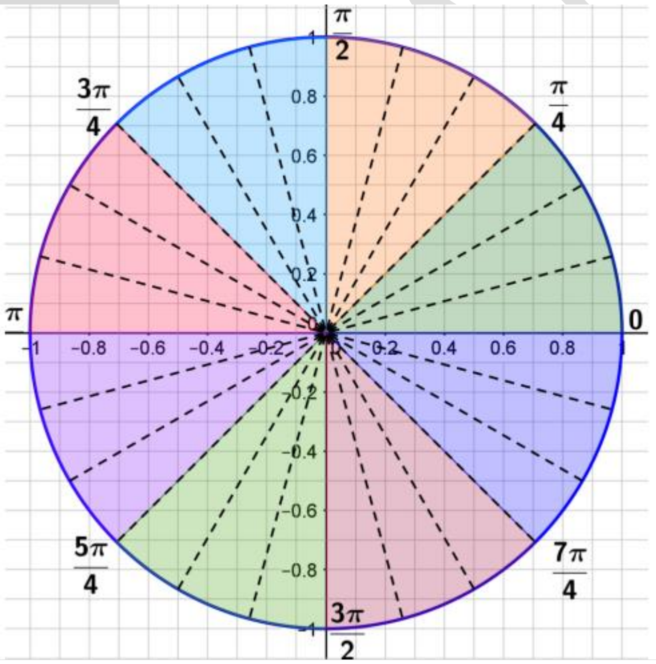
a) Retrouver le point qui correspond à chaque angle.
b) En déduire les valeurs exactes des cosinus et sinus de tous les angles du tableau
Solution :

Point	E	L	F	J'	N	G	M	I	A	B	C	J	H	D	K	I'
x (°)	−150	−135	−120	−90	−60	−45	−30	0	30	45	60	90	120	135	150	180
x (rad)	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1
$\sin x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

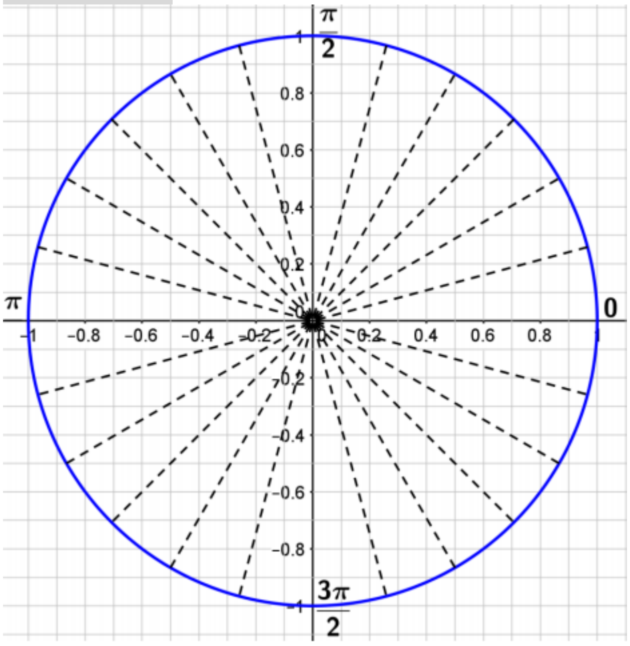
Exercice6 : (*) Placer les angles suivants sur le cercle trigonométrique : $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$



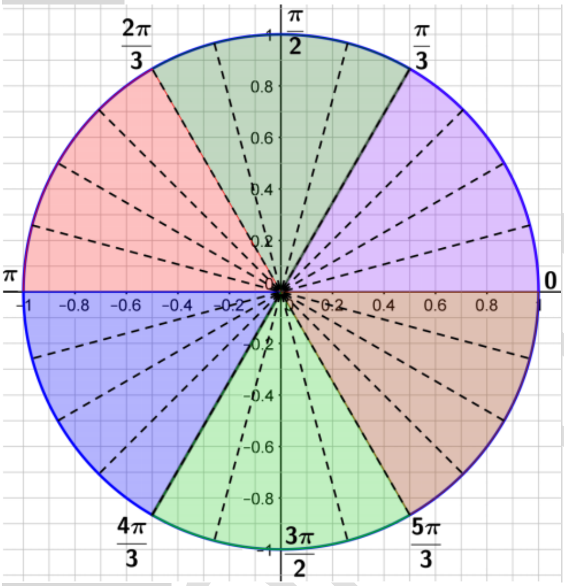
Solution :



Exercice7 : (*) Placer les angles suivants sur le cercle trigonométrique : $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$

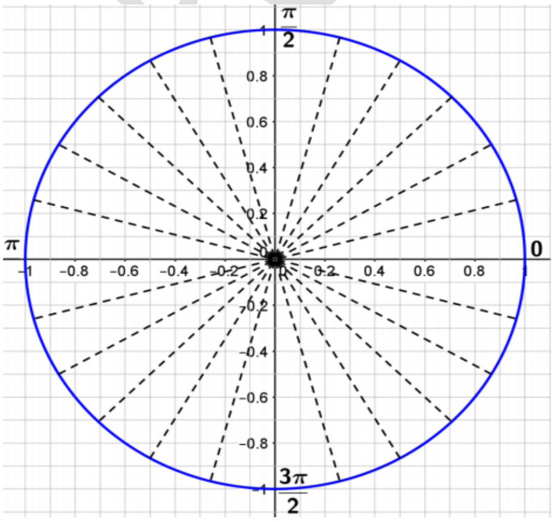


Solution :

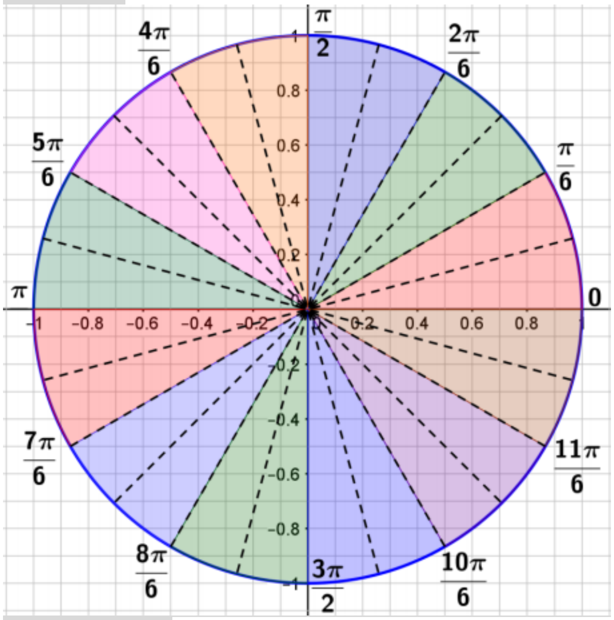


Exercice8 : (*) Placer les angles suivants sur le cercle trigonométrique :

$\frac{\pi}{6}$; $\frac{2\pi}{6}$; $\frac{4\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$;$\frac{7\pi}{6}$; $\frac{8\pi}{6}$; $\frac{10\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$

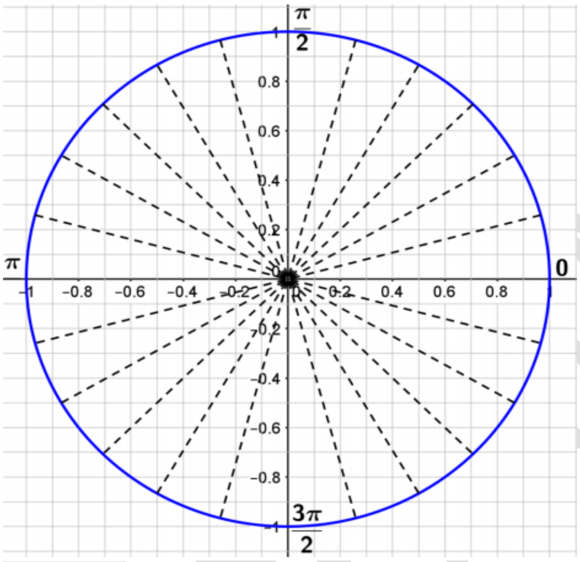


Solution :

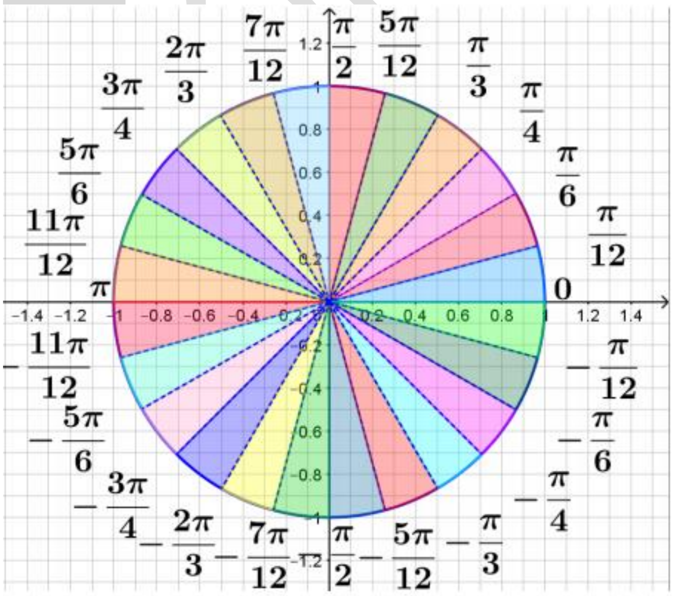


Exercice9 : (*) Placer les angles suivants sur le cercle trigonométrique :

$\frac{\pi}{12}$; $\frac{2\pi}{12}$; $\frac{3\pi}{12}$; $\frac{4\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{12}$; $\frac{8\pi}{12}$; $\frac{9\pi}{12}$; $\frac{10\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{12}$; $\frac{13\pi}{12}$; $\frac{14\pi}{12}$; $\frac{15\pi}{12}$; $\frac{16\pi}{12}$; $\frac{17\pi}{12}$; $\frac{19\pi}{12}$; $\frac{20\pi}{12}$; $\frac{21\pi}{12}$; $\frac{22\pi}{12}$; $\frac{23\pi}{12}$



Solution :



Exercice10 : (*) Déterminer l'abscisse curviligne principale de chacune des points suivants

$M_0\left(\frac{9\pi}{2}\right)$; $M_1\left(\frac{11\pi}{3}\right)$; $M_2\left(\frac{67\pi}{4}\right)$

Solution :

▪ $x=\frac{9\pi}{2}$ *Methode1:*

$\frac{9\pi}{2}=\frac{8\pi+\pi}{2}=\frac{8\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=4\pi+\frac{\pi}{2}=2\times 2\pi+\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc : l'abscisses curviligne principale du point M_0 est $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

Methode2: $-\pi<\frac{9\pi}{2}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-1<\frac{9}{2}+2k\leq 1$

C'est-à-dire : $-1-\frac{9}{2}<-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}+2k\leq 1-\frac{9}{2}$

Donc : $-\frac{11}{2}<2k\leq-\frac{7}{2}$ par suite : $-\frac{11}{4}<k\leq-\frac{7}{4}$

Donc : $-2,7\simeq-\frac{11}{4}<k\leq-\frac{7}{4}\simeq-1,7$ et $k\in\mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $k=-2$

Par suite : $\alpha=\frac{9\pi}{2}+2(-2)\pi=\frac{9\pi}{2}-4\pi=\frac{9\pi-8\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

Donc : l'abscisses curviligne principale du point M_0 est $\alpha=\frac{\pi}{2}$

▪ $M_1\left(\frac{11\pi}{3}\right)$

Methode1: On a $\frac{11\pi}{3}=\frac{12\pi-\pi}{3}=4\pi-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2\times 2\pi$ et $-\frac{\pi}{3}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc l'abscisses curviligne principale du point M_1 est: $\alpha=-\frac{\pi}{3}$.

Methode2: $k\in\mathbb{Z}$ et $-\pi<\frac{11\pi}{3}+2k\pi\leq\pi$

Donc $-1<\frac{11}{3}+2k\leq 1$

Par suite : $-1-\frac{11}{3}<-\frac{11}{3}+\frac{11}{3}+2k\leq 1-\frac{11}{3}$

Donc : $-\frac{14}{3}<2k\leq-\frac{8}{3}$ par suite : $-\frac{7}{3}<k\leq-\frac{4}{3}$

Donc : $-2,3\simeq-\frac{7}{3}<k\leq-\frac{4}{3}\simeq-1,3$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $k=-2$ par suite : $\alpha=\frac{11\pi}{3}+2(-2)\pi=\frac{11\pi}{3}-4\pi=\frac{11\pi-12\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$

Donc l'abscisse curviligne principale du point M_1 est : $\alpha=-\frac{\pi}{3}$.

▪ $M_2\left(\frac{67\pi}{4}\right)$

Methode1: On a $\frac{67\pi}{3}=\frac{64\pi+3\pi}{4}=\frac{64\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=16\pi+\frac{3\pi}{4}=2\times 8\pi+\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$ donc l'abscisses curviligne principale du point M_2 est $\alpha=\frac{3\pi}{4}$

Methode2: $k\in\mathbb{Z}$ et $-\pi<\frac{67\pi}{4}+2k\pi\le\pi$

Donc $-1<\frac{67}{4}+2k\le 1$

Donc $-1-\frac{67}{4}<-\frac{67}{4}+\frac{67}{4}+2k\le 1-\frac{67}{4}$

Donc $-\frac{71}{4}<2k\le-\frac{63}{4}$

C'est-à-dire : $-8{,}8\simeq-\frac{71}{8}<k\le-\frac{63}{8}\simeq-7{,}8$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=-8$ c'est à dire : $\alpha=\frac{67\pi}{4}+2(-8)\pi=\frac{67\pi}{4}-16\pi=\frac{67\pi-64\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

Donc l'abscisse curviligne principale du point M_2 est $\alpha=\frac{3\pi}{4}$

Exercice11 :

(*) Pour chaque mesure d'angle, en radians, donner la mesure principale α_i (i variant de 1 à 12)
Puis placer le point M_i correspondant sur un cercle trigonométrique :

$\frac{7\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{75\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{3}$;$\frac{-13\pi}{3}$; $\frac{19\pi}{5}$; -124π; 125π

1) $\frac{7\pi}{4}=\frac{8\pi-\pi}{4}=\frac{8\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2\pi$ et $\frac{-\pi}{4}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc : l'abscisses curviligne principale du point M_1 est : $\alpha_1=\frac{-\pi}{4}$

2) $\frac{5\pi}{4}=\frac{8\pi-3\pi}{4}=\frac{8\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}+2\pi$ et $\frac{-3\pi}{4}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc : l'abscisses curviligne principale du point M_2 est : $\alpha_2=\frac{-3\pi}{4}$

3) $\frac{75\pi}{4}=\frac{72\pi+3\pi}{4}=\frac{72\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+9\times 2\pi$ et $\frac{3\pi}{4}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc : l'abscisses curviligne principale du point M_3 est : $\alpha_3=\frac{3\pi}{4}$

4) $\frac{13\pi}{3}=\frac{12\pi+\pi}{3}=\frac{12\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2\times 2\pi$ et $\frac{\pi}{3}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc : l'abscisses curviligne principale du point M_4 est : $\alpha_4=\frac{\pi}{3}$

5) $-\frac{13\pi}{3}=\frac{-12\pi-\pi}{3}=\frac{-12\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}-2\times 2\pi$ et $-\frac{\pi}{3}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc : l'abscisses curviligne principale du point M_5 est : $\alpha_5=-\frac{\pi}{3}$

6) $\frac{19\pi}{5}=\frac{20\pi-\pi}{5}=\frac{20\pi}{5}-\frac{\pi}{5}=-\frac{\pi}{5}+2\times 2\pi$ et $-\frac{\pi}{5}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

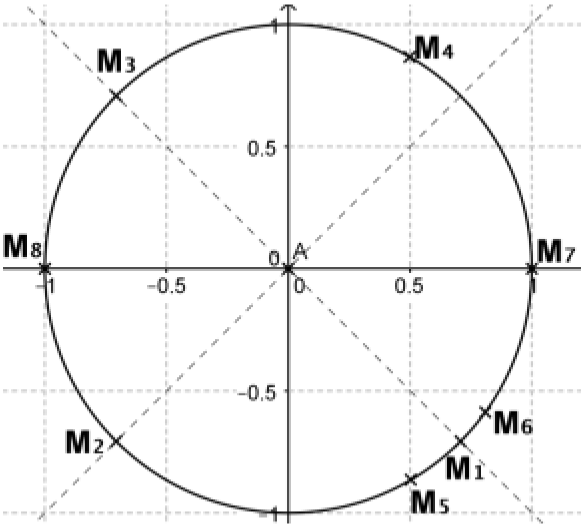
Donc : l'abscisses curviligne principale du point M_6 est : $\alpha_6=-\frac{\pi}{5}$

7) $-124\pi = 0 - 62\times 2\pi$ et $0 \in]-\pi\,;\pi]$

Donc : l'abscisses curviligne principale du point M_7 est : $\alpha_7 = 0$

8) $125\pi = \pi + 62\times 2\pi$ et $\pi \in]-\pi\,;\pi]$

Donc : l'abscisses curviligne principale du point M_8 est : $\alpha_8 = \pi$



Exercice12 : (*) Calculer : $A = \cos\left(\frac{29\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{18\pi}{4}\right)$

$B = \tan\left(\frac{21\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{7\pi}{3}\right)$ et $C = \sin\left(\frac{28\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{17\pi}{2}\right)$ $D = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

Solution :

Pour mémoire :

x (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

$A = \cos\left(\frac{29\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{18\pi}{4}\right) = \cos\left(7\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

$A = \cos\left(6\pi + \pi + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\frac{\pi}{2} = -\cos\frac{\pi}{4} + 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$B = \tan\left(\frac{21\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \tan\left(5\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{3} = 1 + \sqrt{3}$ + $C = \sin\left(\frac{28\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) = \sin\left(9\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(8\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

$C = \sin\left(8\pi + \pi + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = -\sin\frac{\pi}{3} + 1$ Donc : $C = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

$D = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

$D = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$ $D = \sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice13: (*) On a : $\sin x = -\frac{4}{5}$ et $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Calculer : $\cos x$ et $\tan x$

Solution : On a **:** $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Donc $(\cos x)^2+\frac{16}{25}=1$ c'est à dire : $(\cos x)^2=1-\frac{16}{25}$

C'est à dire : $(\cos x)^2=\frac{9}{25}$

Donc : $\cos x=\sqrt{\frac{9}{25}}$ ou $\cos x=-\sqrt{\frac{9}{25}}$

Donc : $\cos x=\frac{3}{5}$ ou $\cos x=-\frac{3}{5}$ or $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

Donc : $\cos x\geq 0$ et par suite : $\cos x=\frac{3}{5}$

Et on a : $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{-4}{3}$

Exercice14 : (*) Sachant que : $\sin x=\frac{2}{3}$ et $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; Calculer : $\cos x$ et $\tan x$

Solution : On a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Donc : $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ c'est à dire : $\cos^2 x=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2$

C'est à dire : $\cos^2 x=1-\frac{4}{9}$

C'est à dire : $\cos^2 x=\frac{5}{9}$

Donc : $\cos x=\sqrt{\frac{5}{9}}$ ou $\cos x=-\sqrt{\frac{5}{9}}$

Donc : $\cos x=\frac{\sqrt{5}}{3}$ ou $\cos x=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ or $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

La seule solution possible est : $\cos x=\frac{\sqrt{5}}{3}$

Et on a : $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Exercice15 : (*) Sachant que : $\cos x=-\frac{1}{5}$ et $x\in[-\pi;0]$

Calculer : $\sin x$ et $\tan x$

Solution : On a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Donc : $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ c'est à dire : $\sin^2 x=1-\left(\frac{1}{5}\right)^2$

C'est à dire : $\sin^2 x=1-\frac{1}{25}$

C'est à dire : $\sin^2 x=\frac{24}{25}$

Donc : $\sin x=\sqrt{\frac{24}{25}}$ ou $\sin x=-\sqrt{\frac{24}{25}}$

Donc : $\sin x=\frac{2\sqrt{6}}{5}$ ou $\sin x=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$ or $x\in[-\pi;0]$

La seule solution possible est : $\sin x=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$

Et on a : $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{-\frac{2\sqrt{6}}{5}}{-\frac{1}{5}}=2\sqrt{6}$

Exercice16 : (*) On donne : $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

1)Calculer la valeur exacte de : $\sin\frac{\pi}{5}$

2) En déduire les valeurs exactes du sinus et du cosinus des réels: $\frac{4\pi}{5}$ et $\frac{9\pi}{5}$

Solution : 1)On a **:** $\cos^2\frac{\pi}{5}+\sin^2\frac{\pi}{5}=1$

Donc **:** $\sin^2\frac{\pi}{5}=1-\cos^2\frac{\pi}{5}$ c'est à dire **:** $\sin^2\frac{\pi}{5}=1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$

C'est à dire **:** $\sin^2\frac{\pi}{5}=1-\frac{6+2\sqrt{5}}{16}$

C'est à dire **:** $\sin^2\frac{\pi}{5}=1-\frac{3+\sqrt{5}}{8}$

C'est à dire **:** $\sin^2\frac{\pi}{5}=\frac{5-\sqrt{5}}{8}$

Donc : $\sin\frac{\pi}{5}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ ou $\sin\frac{\pi}{5}=-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ or $\frac{\pi}{5}\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc : $\sin\frac{\pi}{5}>0$

La seule solution possible est : $\sin\frac{\pi}{5}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}=\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

2) On a : $\frac{4\pi}{5}=\frac{5\pi-\pi}{5}=\frac{5\pi}{5}-\frac{\pi}{5}=\pi-\frac{\pi}{5}$

Donc : $\sin\frac{4\pi}{5}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

On a : $\frac{9\pi}{5}=\frac{4\pi+5\pi}{5}=\frac{4\pi}{5}+\frac{5\pi}{5}=\frac{4\pi}{5}+\pi$

Donc : $\sin\frac{9\pi}{5}=\sin\left(\frac{4\pi}{5}+\pi\right)=-\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)=-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

Exercice17 : (*) On donne : $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

1)Calculer la valeur exacte de : $\sin\frac{\pi}{12}$

2) A l'aide du cercle trigonométrique, en déduire: $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

Solution : 1)On a **:** $\cos^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{\pi}{12}=1$

Donc **:** $\sin^2\frac{\pi}{12}=1-\cos^2\frac{\pi}{12}$ c'est à dire **:** $\sin^2\frac{\pi}{12}=1-\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2$

C'est à dire **:** $\sin^2\frac{\pi}{12}=1-\frac{8+2\sqrt{12}}{16}$

C'est à dire **:** $\sin^2\frac{\pi}{12}=1-\frac{8+4\sqrt{3}}{16}$

C'est à dire **:** $\sin^2\frac{\pi}{12}=1-\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

C'est à dire **:** $\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

Donc : $\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$ ou $\sin\frac{\pi}{12}=-\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$ or $\frac{\pi}{12}\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc : $\sin\frac{\pi}{12}>0$

La seule solution possible est : $\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

2) On a : $\frac{11\pi}{12}=\pi-\frac{\pi}{12}$

Donc : $\cos\frac{11\pi}{12}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

On a : $\sin\frac{11\pi}{12}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

Exercice18 : (*) Simplifier les expressions suivantes :

$A=\sin(\pi-x)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\times\cos(\pi-x)$ $\quad B=\frac{\sin x+\sin(\pi-x)}{\cos(\pi-x)}$

$C=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ $\quad D=\sin(11\pi-x)+\cos(5\pi+x)+\cos(14\pi-x)$

$E=\tan(\pi-x)+\tan(\pi+x)$

$F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$

$H=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

$K=\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{4\pi}{10}\right)$

Solution : $A=\sin(\pi-x)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\times\cos(\pi-x)$

$A=\sin(x)\times\sin(x)-\cos x\times(-\cos x)=\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$K=\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{4\pi}{10}\right)$

$B=\frac{\sin x+\sin(\pi-x)}{\cos(\pi-x)}=\frac{\sin x+\sin x}{-\cos x}=-\frac{2\sin x}{\cos x}=-2\tan x$

$C=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)$

$C=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$$C=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

$$D=\sin(11\pi-x)+\cos(5\pi+x)+\cos(14\pi-x)$$

$$D=\sin(10\pi+\pi-x)+\cos(4\pi+\pi+x)+\cos(2\times7\pi-x)$$

$$D=\sin(\pi-x)+\cos(\pi+x)+\cos(-x)$$

$$D=\sin(x)-\cos(x)+\cos(x)=\sin(x)$$

$$E=\tan(\pi-x)+\tan(\pi+x)=-\tan(x)+\tan(x)=0$$

$$F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$$

On a $\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}=\frac{2\pi}{10}+\frac{3\pi}{10}=\frac{5\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$ donc : $\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}$

$$F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1$$

$$H=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

On a $\frac{\pi}{8}+\frac{7\pi}{8}=\pi$ donc : $\frac{7\pi}{8}=\pi-\frac{\pi}{8}$

Et on a $\frac{3\pi}{8}+\frac{5\pi}{8}=\pi$ donc : $\frac{5\pi}{8}=\pi-\frac{3\pi}{8}$

$$H=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$H=+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+2\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

Et on a $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$ donc : $\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$

Donc on a : $H=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$

$$H=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)=2\times1=2$$

$$K=\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{4\pi}{10}\right)$$

Et on a : $\cos\left(\frac{4\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{10}\right)$

Donc : $\cos\left(\frac{4\pi}{10}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{10}\right)$

$$K=\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

$$K=\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)+\left(\cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)\right)$$

Donc : $K=1+1=2$

Exercice19 : (*) On pose : $A(x)=\sin x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)$

Calculer : $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $A\left(\frac{5\pi}{6}\right)$; $A\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Solution : Pour mémoire :

x (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

$$A\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$A\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$$

$$A\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$A\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=A\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}\quad A\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$A\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Exercice20 : (**) Simplifier et calculer les expressions suivantes :

$$A=\cos(0)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(3\frac{\pi}{4}\right)+\cos(\pi)$$

$$B=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin(\pi)$$

$$C=\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{9\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

Solution :

Pour mémoire :

x (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

$$A=1+\frac{\sqrt{2}}{2}+0-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-1=1+\frac{\sqrt{2}}{2}+0-\frac{\sqrt{2}}{2}-1=0$$

$$B=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin(\pi)$$

$$B=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\sin(\pi)$$

Donc : $B=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+0=2+\sqrt{3}$

$$C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\frac{7\pi}{12}+\sin^2\frac{9\pi}{12}+\sin^2\frac{11\pi}{12}$$

On remarque que : $\frac{\pi}{12}+\frac{11\pi}{12}=\pi$ donc : $\frac{11\pi}{12}=\pi-\frac{\pi}{12}$ Et on a : $\frac{3\pi}{12}+\frac{9\pi}{12}=\pi$ donc $\frac{9\pi}{12}=\pi-\frac{3\pi}{12}$

et $\frac{5\pi}{12}+\frac{7\pi}{12}=\pi$ donc $\frac{7\pi}{12}=\pi-\frac{5\pi}{12}$

Donc on a : $C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\left(\pi-\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{3\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)$

$C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$C=2\sin^2\frac{\pi}{12}+2\sin^2\frac{3\pi}{12}+2\sin^2\frac{5\pi}{12}=2\sin^2\frac{\pi}{12}+2\sin^2\frac{5\pi}{12}+2\sin^2\frac{\pi}{4}$

$C=2\sin^2\frac{\pi}{12}+2\sin^2\frac{3\pi}{12}+2\sin^2\frac{5\pi}{12}=2\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}\right)+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

Et on remarque que : $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$

$C=2\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\right)+1=2\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)+1=2\times1+1=3$

Exercice21 : (**) Démontrer que pour tout réel x, on a :

1) $(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2=2$ $\qquad B=\cos^4 x-\sin^4 x+\sin^2 x-\cos^2 x$

2) $(\cos x+\sin x)^2-(\cos x-\sin x)^2=4\cos x\sin x$

Solution :1)

$(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2=\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x-2\cos x\sin x+\sin^2 x$

$(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2=2\cos^2 x+2\sin^2 x=2(\cos^2 x+\sin^2 x)=2\times1=2$

2) $(\cos x+\sin x)^2-(\cos x-\sin x)^2=\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x-\cos^2 x+2\cos x\sin x-\sin^2 x$

$=4\cos x\sin x$

Exercice22 : (**) Simplifier les expressions suivantes :

$A=(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2$ $\qquad B=\cos^4 x-\sin^4 x+\sin^2 x-\cos^2 x$

$C=\sin^4 x-\cos^4 x+2\cos^2 x$ $\qquad D=\sin^6 x+\cos^6 x+\cos^4 x+\sin^4 x+5\cos^2 x\sin^2 x$

Solution : $A=(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2$

$A=\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x-2\cos x\sin x+\sin^2 x$ $A=2\cos^2 x+2\sin^2 x=2(\cos^2 x+\sin^2 x)=2\times1=2$

$B=\cos^4 x-\sin^4 x+\sin^2 x-\cos^2 x$

$B=\cos^4 x-\cos^2 x-\sin^4 x+\sin^2 x$

Donc : $B=\cos^2 x(\cos^2 x-1)-\sin^2 x(\sin^2 x-1)$

On a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Donc : $\cos^2 x-1=-\sin^2 x$ et $\sin^2 x-1=-\cos^2 x$

$B=\cos^2 x\times(-\sin^2 x)-\sin^2 x(-\cos^2 x)$

$B=-\cos^2 x\times\sin^2 x+\sin^2 x\cos^2 x=0$

$C=\sin^4 x-\cos^4 x+2\cos^2 x=(\sin^2 x)^2-(\cos^2 x)^2+2\cos^2 x$ $C=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)+2\cos^2 x=\sin^2 x-\cos^2 x+2\cos^2 x$

Donc : $C=\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$D=\sin^6 x+\cos^6 x+\cos^4 x+\sin^4 x+5\cos^2 x\sin^2 x$ $D=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3+\cos^4 x+\sin^4 x+5\cos^2 x\sin^2 x$

$D=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)+$ $\qquad +\cos^4 x+\sin^4 x+5\cos^2 x\sin^2 x$

$D=\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x+\cos^4 x+\sin^4 x+5\cos^2 x\sin^2 x$ $D=2\sin^4 x+4\sin^2 x\cos^2 x+2\cos^4 x$

$D=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2=2\times 1=2$

Exercice23 : (*) 1) Simplifier l'expression suivante : $A(x)=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos(-x+6\pi)+\cos(3\pi+x)+\sin\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)$ 2) Calculer $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $A\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$

3)a) Calculer en fonction de $\sin x$ le nombre : $A=\dfrac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cos(4\pi-x)}{\tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}$.

b) En déduire la valeur de A si $\tan x=3$

Solution : 1) $A(x)=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos(-x+6\pi)+\cos(3\pi+x)+\sin\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)$

$A(x)=\cos^2 x-\cos(-x)+\cos(2\pi+\pi+x)+\sin\left(x-4\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $A(x)=\cos^2 x-\cos(-x)+\cos(\pi+x)+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$A(x)=\cos^2 x-\cos x-\cos x+\cos x=\cos^2 x-\cos x$

2) Calcul de $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)$: on a : $A(x)=\cos^2 x-\cos x$

Donc : $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$A\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$A\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ Donc : $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

Calcul de $A\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$: $A\left(-\frac{10\pi}{3}\right)=\cos^2\left(-\frac{10\pi}{3}\right)-\cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$

$=\cos^2\left(\frac{10\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right)=\cos^2\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\cos^2\left(2\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(2\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos^2\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$A\left(-\frac{10\pi}{3}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

3)a)Calcul en fonction de : $\sin x$ le nombre : $A=\dfrac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cos(4\pi-x)}{\tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}$

$$A=\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cos(-x)}{\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}}=\frac{\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cos x}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}$$

$$A=\frac{\cos^2\left(\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)\cos x}{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos x}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

Donc : $A=\frac{\sin^2 x\cos x}{-\cos x}=-\sin^2 x$

b) Déduction de la valeur de A si $\tan x=3$

On sait que : $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ et $\cos^2 x\tan^2 x=\sin^2 x$

Donc : $\sin^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}\tan^2 x$

Et puisque : $\tan x=3$ alors :

$$A=-\sin^2 x=-\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=-\frac{9}{1+9}=-\frac{9}{10}.$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien