Tronc commun Sciences BIOF

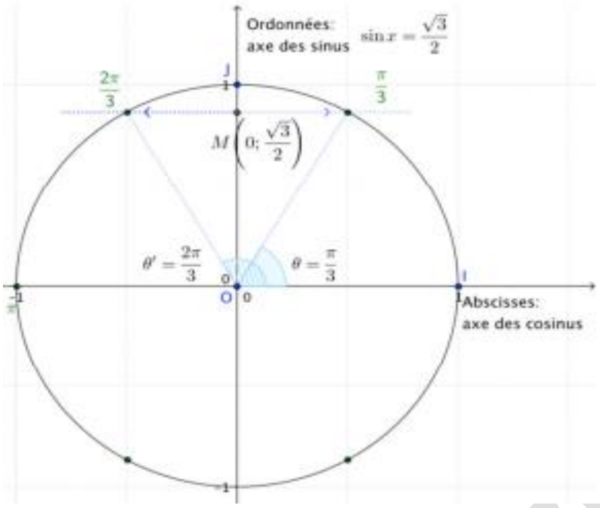
Correction Série N°6 : TRIGONOMÉTRIE2

Partie 2 : Equations et inéquations trigonométriques

Exercice1 : (*) Résoudre dans $\left[0,2\pi\right]$l'équation suivantes : $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution : $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

On utilise le cercle trigonométrique :

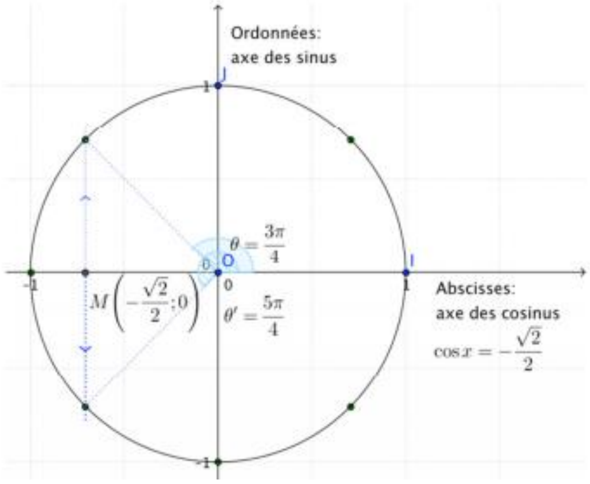


Donc $S_{[0,2\pi]}=\left\{\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right\}$

Exercice2 : (**) Résoudre dans $\left[0,2\pi\right]$l'équation suivantes : $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\cos x=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

On utilise le cercle trigonométrique :



Donc $S_{[0,2\pi]}=\left\{\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right\}$

Exercice3 : (*) (**) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

2) Résoudre dans $[0\,;\pi]$ l'équation suivante : $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

3) Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ l'équation suivante : $\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$

Solution : 1) on a : $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ équivaut à : $2x = x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = -\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$

Équivaut à : $2x - x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x + x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ équivaut à : $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ et $k \in \mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) On a $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

Équivaut à : $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} - x + 2k\pi$ ou $2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + x + 2k\pi$

Équivaut à : $3x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

Donc $x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$ ou $x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$

- Encadrement de $\frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$: $0 \le \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \le \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $0 \le \frac{7}{36} + \frac{2k}{3} \le 1$ c'est-à-dire : $-\frac{7}{24} \le k \le \frac{29}{36}$ cela signifie que : $-0,29 \le k \le 1,2$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ ou $k = 1$

Pour $k = 0$ on trouve $x_1 = \frac{7\pi}{36}$

Pour $k = 1$ on trouve $x_2 = \frac{7\pi}{36} + \frac{2\pi}{3} = \frac{31\pi}{36}$

- Encadrement de $x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$ $0 \le \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \le \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $0 \le \frac{13}{12} + 2k \le 1$ c'est-à-dire : $-\frac{13}{24} \le k \le -\frac{1}{24}$ cela signifie que : $-0,54 \le k \le 0,04$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc k n'existe pas

- Donc $S_{[0.\pi]} = \left\{\frac{7\pi}{36}; \frac{31\pi}{36}\right\}$

3) on a $\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$ est définie Équivaut à : $2x - \frac{\pi}{5} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ Équivaut à : $2x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + k\pi$

Équivaut à : $2x \neq \frac{7\pi}{10} + k\pi$ cela signifie que : $x \neq \frac{7\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}$ Donc $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{7\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$

Or on sait que : $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ Donc $\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Donc $2x-\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{4}+k\pi$ équivaut à : $2x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{5}+k\pi$

Équivaut à : $2x=\frac{9\pi}{20}+k\pi$ équivaut à : $x=\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}$

Encadrement de $\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2}\le\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}$ et $k\in\mathbb{Z}$ donc $-\frac{1}{2}\le\frac{9}{40}+\frac{k}{2}\le\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $-\frac{29}{40}\le\frac{k}{2}\le\frac{11}{40}$

Donc : $-\frac{29}{40}\le\frac{k}{2}\le\frac{11}{40}$ donc $-\frac{29}{20}\le k\le\frac{11}{20}$

Donc $-1,45\le k\le 0,55$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ ou $k=-1$

Pour $k=0$ on trouve : $x_1=\frac{9\pi}{40}$

Pour $k=-1$ on trouve : $x_2=\frac{9\pi}{40}-\frac{\pi}{2}=-\frac{11\pi}{40}$ Donc $S=\left\{-\frac{11\pi}{40};\frac{9\pi}{40}\right\}$

Exercice4: (**) Résoudre dans $[0;2\pi[$ l'inéquation suivante : $\cos x>\frac{\sqrt{3}}{2}$

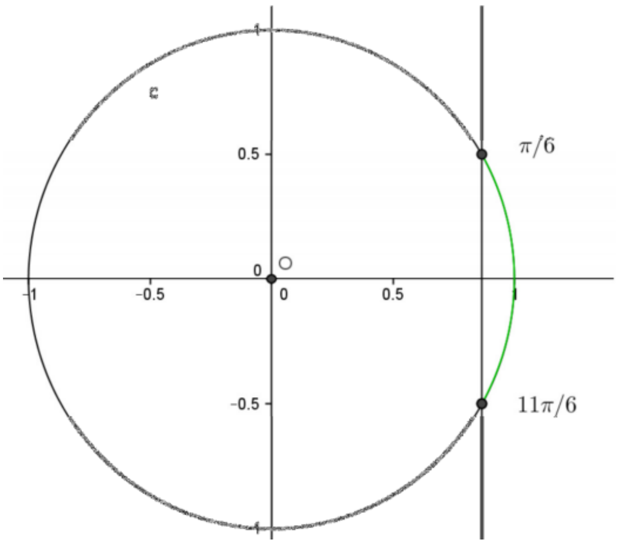
Solution : $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Et puisque : $x\in[0;2\pi[$ alors : $x=\frac{11\pi}{6}$ et $x=\frac{\pi}{6}$

$\cos x>\frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos x>\cos\frac{\pi}{6}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\cos x$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[0;2\pi[$



On trouve que : $S=\left[0;\frac{\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{11\pi}{6};2\pi\right[$

Exercice5 : (**) Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation suivante : $\sin x\ge-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\sin x = -\sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

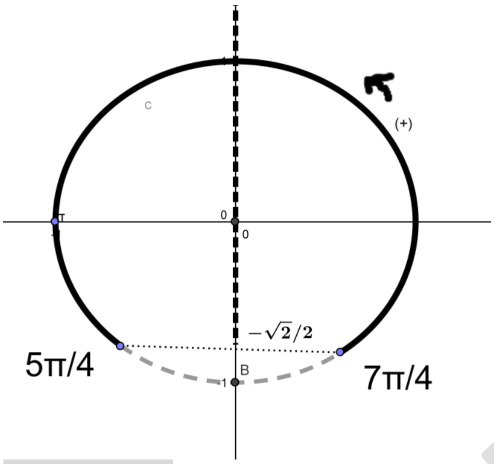
Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in [0;2\pi]$ alors : $x = \frac{5\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\sin x$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[0;2\pi]$

On trouve que : $\sin x \geq \frac{1}{2}$ Équivaut à : $x \in \left[0;\frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$

Donc : $S = \left[0;\frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$



Exercice6 : (***)1) a) Vérifier que : $5-2\sqrt{6} = \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$

b) Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ l'équation suivante : $4\cos^2 x - 2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cos x + \sqrt{6} = 0 \ (E)$

2) Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ les inéquations suivantes : $2\cos x - \sqrt{2} > 0$ et $2\cos x - \sqrt{3} < 0$

3) Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ l'inéquation suivante : $4\cos^2 x - 2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cos x + \sqrt{6} \geq 0$

Solution :1) a) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 3 - 2\sqrt{6} + 2 = 5 - 2\sqrt{6}$

b) $4\cos^2 x - 2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cos x + \sqrt{6} = 0$

On utilise un changement de variable : on pose $t = \cos x$

L'équation devienne : $4t^2 - 2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)t + \sqrt{6} = 0$

On cherche les racines du trinôme $t^2 - 2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)t + \sqrt{6}$:

Calcul du discriminant réduit : $\Delta' = \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2 - 4\sqrt{6} = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 - 4\sqrt{6}$

$\Delta' = 3 + 2\sqrt{6} + 2 - 4\sqrt{6} = 5 - 2\sqrt{6} = \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$

Les racines sont : $t_1 = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) + \sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}}{4} = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) + \left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right|}{4} = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

et $t_2 = \dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}}{4} = \dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right|}{4} = \dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Donc $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

• $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ Équivaut à : $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$

Avec $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in [0\,;2\pi]$

Après avoir encadré ces solutions on va trouver :

$x_1 = \dfrac{\pi}{6}$ et $x_1 = \dfrac{11\pi}{6}$

• $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ Équivaut à : $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$

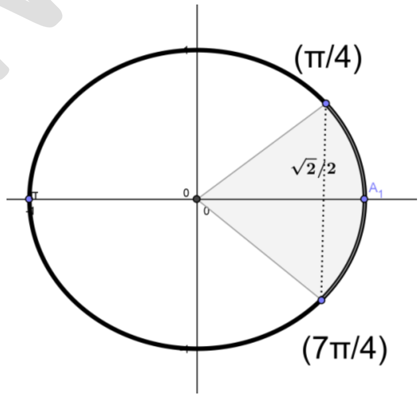
Avec : $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in [0\,;2\pi]$

Après avoir encadré ces solutions on va trouver :

$x_2 = \dfrac{\pi}{4}$ et $x_4 = \dfrac{7\pi}{4}$

Finalement on a : $S_{[0\,;2\pi]} = \left\{\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4};\dfrac{11\pi}{6};\dfrac{7\pi}{4}\right\}$

2) a) Résolution dans $[0\,;2\pi]$ de l'inéquation : $2\cos x - \sqrt{2} > 0$

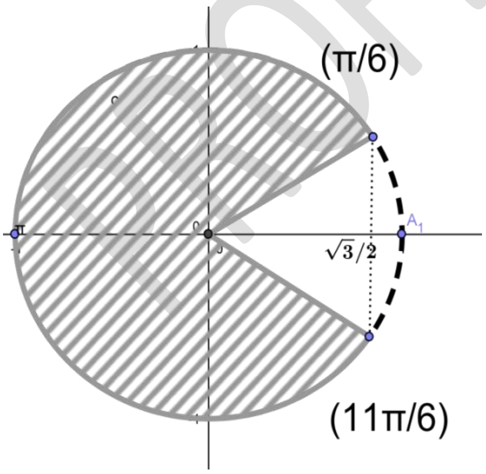


$2\cos x - \sqrt{2} > 0$ Équivaut à : $\cos x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Donc $S = \left[0;\dfrac{\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{7\pi}{4};2\pi\right]$

2) b) Résolution dans $[0\,;2\pi]$ de l'inéquation : $2\cos x - \sqrt{3} < 0$

$2\cos x - \sqrt{3} < 0$ Équivaut à : $\cos x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



Donc $S = \left]\dfrac{\pi}{6};\dfrac{11\pi}{6}\right[$

3) Résolution dans $[0\,;2\pi]$de l'inéquation : $4\cos^2 x - 2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cos x + \sqrt{6} \geq 0$

$4\cos^2 x-2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cos x+\sqrt{6}\geq 0$ Équivaut à : $4\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<0$

Équivaut à : $2\left(\cos x-\sqrt{3}\right)\left(2\cos x-\sqrt{2}\right)<0$

Et par suite le tableau suivant :

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$2cosx-\sqrt{2}$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$2cosx-\sqrt{3}$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$produit$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S=\left[0;\frac{\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{11\pi}{6};2\pi\right[$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien