Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°7 : FONCTIONS - *Généralités*

Exercice 1 : (*) (**) (***) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{6x^3+|2x|}{|x-3|-|x+5|}$ 2) $f(x)=\dfrac{-x^2+2006}{|x+2|+1}$ 3) $f(x)=\sqrt{x^2+27}-5\sqrt{3x}$

4) $f(x)=\dfrac{-2x+6}{|x^2-2x+3|-2}$ 5) $f(x)=\dfrac{x-2}{2x^2-3x-2}-\dfrac{x^2}{2x^2+13x+6}$

6) $f(x)=\dfrac{x^3-2x-2021}{2x^2-3|x|-2}$ 7) $f(x)=\dfrac{5x^5-5x-1}{2x^4-3x^2-2}$

Solution : 1) $f(x)=\dfrac{6x^3+|2x|}{|x-3|-|x+5|}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / |x-3|-|x+5|\neq 0\}$

$|x-3|-|x+5|=0$ Signifie que : $|x-3|=|x+5|$

Signifie que : $x-3=x+5$ ou $x-3=-(x+5)$

Signifie que : $-3=5$ (impossible) ou $x-3=-x-5$

Signifie que : $2x=-2$

Signifie que : $x=-1$ Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

2) $f(x)=\dfrac{-x^2+2006}{|x+2|+1}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / |x+2|+1\neq 0\}$

$|x+2|+1=0$ Signifie que : $|x+2|=-1$ pas de solutions Car $|x+2|\geq 0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\sqrt{x^2+27}-5\sqrt{3x}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / x^2+27\geq 0 \text{ et } 3x\geq 0\}$ Or $x^2+27\geq 0$ et $3>0$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / x\geq 0\}$

$D_f=[0;+\infty[$

4) $f(x)=\dfrac{-2x+6}{|x^2-2x+3|-2}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / |x^2-2x+3|-2\neq 0\}$

$|x^2-2x+3|-2=0$ Signifie que : $|x^2-2x+3|=2$

Signifie que : $x^2-2x+3=2$ ou $x^2-2x+3=-2$

• Résolution de $x^2-2x+3=2$

$x^2-2x+3=2$ Signifie que : $x^2-2x+1=0$

Signifie que : $(x-1)^2=0$

Signifie que : $x-1=0$

Signifie que : $x=1$

La seule solution de $x^2-2x+3=2$ est 1.

• Résolution de $x^2-2x+3=-2$.
$x^2-2x+3=-2$ Signifie que : $x^2-2x+5=0$
On calcule son discriminant : $\Delta=-16$.
Ainsi l'équation $x^2-2x+5=0$ n'a aucune solution réelle
Au final, seule solution : $x=1$
D'où : $D_f=\{x\in\mathbb{R} / x\neq 1\}=\mathbb{R}-\{1\}$

5) $f(x)=\dfrac{x-2}{2x^2-3x-2}-\dfrac{x^2}{2x^2+13x+6}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / 2x^2-3x-2\neq 0 \;\; et \;\; 2x^2+13x+6\neq 0\}$

Le discriminant de $2x^2-3x-2$ est : $\Delta=(-3)^2-4 \times 2 \times (-2)=25$ et ses racines sont :

$x_1=\dfrac{3-\sqrt{25}}{2\times 2}=-\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{3+\sqrt{25}}{2\times 2}=2$

Le discriminant de $2x^2+13x+6$ est :$\Delta'=13^2-4 \times 2 \times 6=121$ et ses racines sont :

$x_1'=\dfrac{-13-\sqrt{121}}{2\times 2}=-6$ et $x_2'=\dfrac{-13+\sqrt{121}}{2\times 2}=-\dfrac{1}{2}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-6;-\dfrac{1}{2};2\right\}$

6) $f(x)=\dfrac{x^3-2x-2021}{2x^2-3|x|-2}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / 2x^2-3|x|-2\neq 0\}$

$2x^2-3|x|-2=0$ Equivalent à : $2|x|^2-3|x|-2=0$ car $|x|^2=x^2$

Faisons un changement de variable en posant : $X=|x|$ nous obtenons l'équation : $2X^2-3X-2=0$

a = 2, b = -3 et c = - 2

Donc : $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4 \times 2 \times (-2)=25$.

Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$X_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times 2}=-\dfrac{1}{2}$ et $X_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times 2}=2$

Qui est équivalent à : $|x|=-\dfrac{1}{2}$ ou $|x|=2$

Mais l'équation : $|x|=-\dfrac{1}{2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$|x|=2$ Signifie : $x=2$ ou $x=-2$

Par suite : $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

7) $f(x)=\dfrac{5x^5-5x-1}{2x^4-3x^2-2}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / 2x^4-3x^2-2\neq 0\}$

$2x^4-3x^2-2=0$ Equivalent à : $2\left(x^2\right)^2-3x^2-2=0$

Faisons un changement de variable en posant : $X=x^2$ nous obtenons donc : l'équation : $2X^2-3X-2=0$

a = 2, b = -3 et c = - 2 et $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4 \times 2 \times (-2)=25$.

Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$X_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times 2}=-\frac{1}{2}$ et $X_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times 2}=2$

Qui est équivalent à : $X=-\frac{1}{2}$ ou $X=2$ et par suite : $x^2=-\frac{1}{2}$ ou $x^2=2$

Mais l'équation : $x^2=-\frac{1}{2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$x^2=2$ Signifie : $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

Par suite : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$

Exercice 2 : (**) Etudier la parité de la fonction suivante définie par : $h(x)=\frac{\tan^4 x}{1+\sin^2 x}$

Solution : $h(x)=\frac{\tan^4 x}{1+\sin^2 x}$ $\quad D_h=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ et } 1+\sin^2 x\neq 0/k\in\mathbb{Z}\right\}$

Et puisque : $1+\sin^2 x\neq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ alors : $D_h=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

Donc : $D_h=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$ alors $-x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

- $h(-x)=\frac{\tan^4(-x)}{1+\sin^2(-x)}=\frac{(-\tan x)^4}{1+(-\sin x)^2}=\frac{(\tan x)^4}{1+(\sin x)^2}=h(x)$

Car $\tan(-x)=-\tan x$ et $\sin(-x)=-\sin x$ si $x\in\mathbb{R}$

Donc g est une fonction paire

Exercice 3 : (**) (***) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\frac{1}{4}x^2+x$

1)Déterminer D_f

2) a) Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

Montrer que : $T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{1}{4}(x_1+x_2)+1$

b) Montrer que f est strictement croissante sur $[-2;+\infty[$

c) Montrer que f strictement décroissante sur $]-\infty;-2]$

3)a) Déterminer α et β tel que : $f(x)=\frac{1}{4}(x+\alpha)^2+\beta$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

b) Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ses éléments caractéristiques

c) Dresser le Tableau de variations de f

4) a) En déduire que : pour tout $x\in\mathbb{R}$ On a : $f(x)\geq -1$

b) En déduire que : pour tout $x\in\left[-2;\frac{1}{2}\right]$ On a : $5\leq f(x)\leq\frac{9}{16}$

c) En déduire que : pour tout $x\in[-5;-2]$ On a : $-1\leq f(x)\leq\frac{5}{4}$

5)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f)avec les axes du repère

6)Soit g la fonction définie sur R par : $g(x)=2x$

Tracer Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

7)Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x)=g(x)$

8) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $g(x)<f(x)$

9)Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $x^2+4x=4m$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Solution : $f(x)=\frac{1}{4}x^2+x$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

2)Soient : $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\left(\frac{1}{4}x_2^{\ 2}+x_2\right)-\left(\frac{1}{4}x_1^{\ 2}+x_1\right)}{x_2-x_1}=\frac{\frac{1}{4}x_2^{\ 2}+x_2-\frac{1}{4}x_1^{\ 2}-x_1}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{\frac{1}{4}\left(x_2^{\ 2}-x_1^{\ 2}\right)+(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{\frac{1}{4}(x_2-x_1)(x_2+x_1)+(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-x_1)\left(\frac{1}{4}(x_2+x_1)+1\right)}{x_2-x_1}$$

Par suite : $T(x_1;x_2)=\frac{1}{4}(x_2+x_1)+1$

3)a) Etude de la monotonie de f sur : $I=[-2;+\infty[$

Soient : $x_1\in[-2;+\infty[$ et $x_2\in[-2;+\infty[$ alors : $x_1\geq-2$ et $x_2\geq-2$ et $x_1\neq x_2$ donc : $x_1+x_2>-4$

Donc : $\frac{1}{4}(x_2+x_1)>-1$

Par suite : $\frac{1}{4}(x_2+x_1)+1>0$.

Donc : $T(x_1;x_2)>0$ d'où : f est strictement croissante sur $I=[-2;+\infty[$

3)b) Etude de la monotonie de f sur : $J=]-\infty;-2]$

Soient : $x_1\in]-\infty;-2]$ et $x_2\in]-\infty;-2]$ alors : $x_1\leq-2$ et $x_2\leq-2$ et $x_1\neq x_2$

Cela implique : $x_1+x_2<-4$

Donc : $\frac{1}{4}(x_2+x_1)<-1$

Par suite : $\frac{1}{4}(x_2+x_1)+1<0$.

Donc $T(x_1;x_2)<0$

D'où : f est strictement décroissante sur $J=]-\infty;-2]$

3)a) Déterminons : α et β tel que : $f(x)=\frac{1}{4}(x+\alpha)^2+\beta$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2+x=\frac{1}{4}\left(x^2+4x\right)=\frac{1}{4}\left(x^2+2\times2x+2^2-4\right)=\frac{1}{4}\left((x+2)^2-4\right)=\frac{1}{4}(x+2)^2-1$$

b) On a : $f(x)=\frac{1}{4}(x+2)^2-1$ donc : $\alpha=2$ et $\beta=-1$ car : $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$

Ainsi : dans le repère $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $\left(C_f\right)$ c'est une parabole de sommet : $W\left(-\alpha;\beta\right)$

C'est-à-dire : $W\left(-2;-1\right)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-2$

c) Tableau de variation : On a : $a=\frac{1}{4}>0$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

4) a) D'après le tableau de variation de f on a : $f\left(-2\right)=-1$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f\left(-2\right)\leq f\left(x\right)$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $-1\leq f\left(x\right)$

b) Soit : $x\in\left[-2;\frac{1}{2}\right]$ alors : $-2\leq x\leq\frac{1}{2}$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement croissante sur $I=\left[-2;+\infty\right[$

Par suite : f est strictement croissante sur $\left[-2;\frac{1}{2}\right]$

Alors : $f\left(-2\right)\leq f\left(x\right)\leq f\left(\frac{1}{2}\right)$ et comme : $f\left(-2\right)=-1$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{16}+\frac{1}{2}=\frac{9}{16}$

Par suite : $5\leq f\left(x\right)\leq\frac{9}{16}$ si $x\in\left[-2;\frac{1}{2}\right]$

b) Soit : $x\in\left[-5;-2\right]$ On a alors : $-5\leq x\leq-2$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement décroissante sur $J=\left]-\infty;-2\right]$

Par suite : f est strictement décroissante sur $\left[-5;-2\right]$

Alors : $f\left(-2\right)\leq f\left(x\right)\leq f\left(-5\right)$ et comme :

$f\left(-2\right)=-1$ Et $f\left(-5\right)=\frac{1}{4}\times\left(-5\right)^2-5=\frac{25}{4}-5=\frac{5}{4}$ Par suite : $-1\leq f\left(x\right)\leq\frac{5}{4}$

6)a) Intersection de la courbe $\left(C_f\right)$ avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection de la courbe $\left(C_f\right)$ avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f\left(x\right)=0$.

$f\left(x\right)=0$ Signifie $\frac{1}{4}x^2+x=0$

Signifie $x\left(\frac{1}{4}x+1\right)=0$ Signifie $x=0$ ou $\frac{1}{4}x+1=0$

Signifie $x=0$ ou $x=-4$

Donc les points d'intersection de la courbe $\left(C_f\right)$ avec l'axe des abscisses sont :

$O\left(0;0\right)$ et $A\left(-4;0\right)$

b) Intersection de la courbe $\left(C_f\right)$ avec l'axe des ordonnées

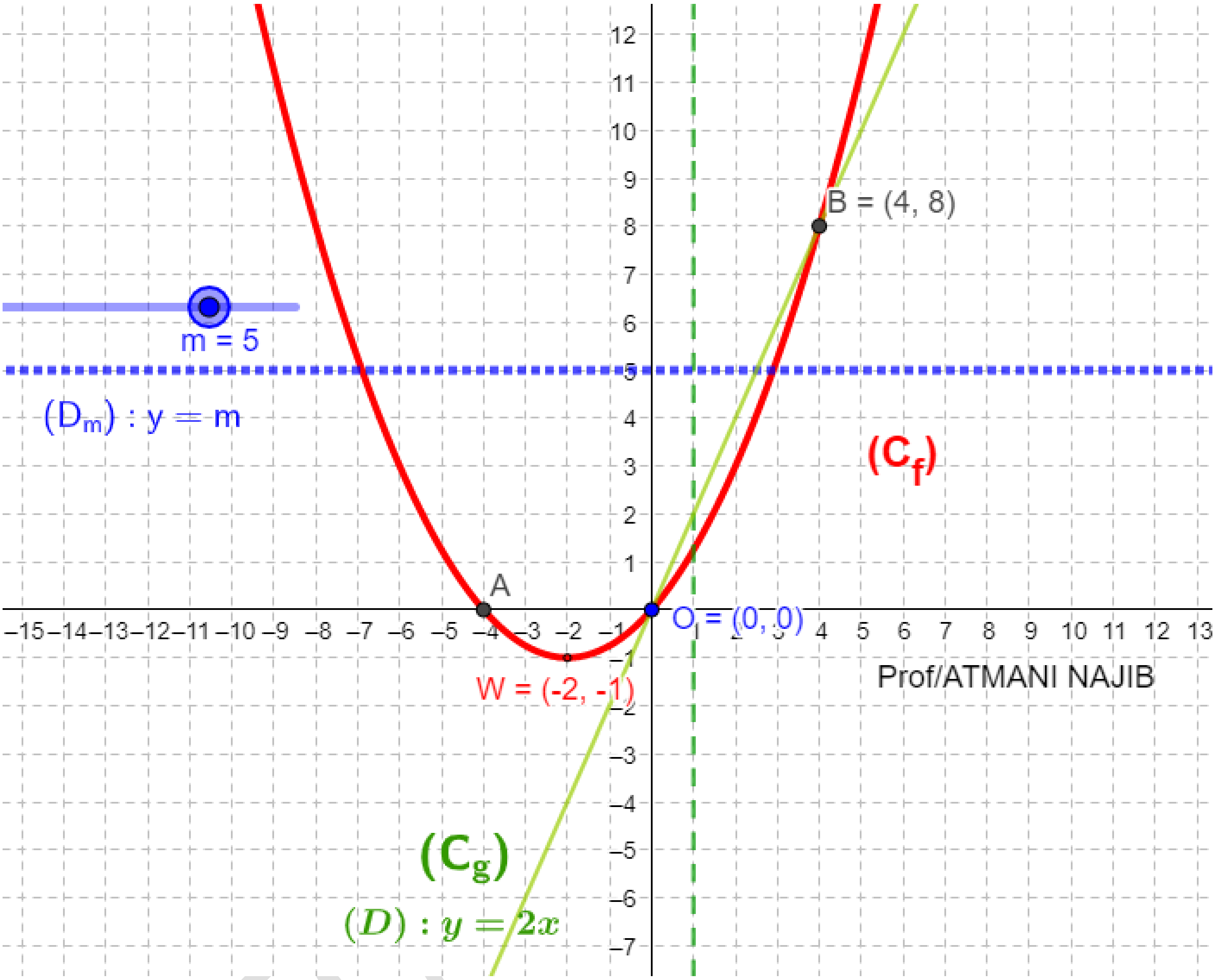
Le point d'intersection de la courbe $\left(C_f\right)$ avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $f\left(0\right)=\frac{1}{4}\left(0\right)^2+0=0$

Donc le point d'intersection de la courbe $\left(C_f\right)$ avec l'axe des ordonnées est : $O\left(0;0\right)$

6)Soit g la fonction définie sur R par : $g(x)=2x$

Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$:



7) a) Résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x=0$ et $x=4$ donc $S=\{0;4\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ Signifie : $\frac{1}{4}x^2+x=2x$ c'est-à-dire : $\frac{1}{4}x^2-x=0$ Signifie $x\left(\frac{1}{4}x-1\right)=0$

Signifie $x=0$ ou $\frac{1}{4}x-1=0$

Signifie $x=0$ ou $x=4$

Donc : $S=\{0;4\}$

9) a) Résolution graphique de l'inéquation $g(x)\geq f(x)$:

La courbe (C_g) est au-dessus de (C_f) si $x\in[0;4]$

Donc $S=[0;4]$

b) Résolution algébrique de l'inéquation : $g(x)\geq f(x)$:

$g(x) \geq f(x)$ Signifie $\frac{1}{4}x^2 + x \leq 2x$

C'est-à-dire : $\frac{1}{4}x^2 - x \leq 0$

C'est-à-dire : $x^2 - 4x \leq 0$

Les racines sont : $x_1 = 0$ et $x_2 = 4$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x^2-4x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S = [0;4]$

10) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $x^2 + 4x = 4m$ avec : $m \in \mathbb{R}$

$x^2 + 4x = 4m$ Signifie $m = \frac{x^2 + 4x}{4}$

Signifie $m = \frac{1}{4}x^2 + x$ Signifie : $m = f(x)$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) et la droite : $y = m$

Si : $m > -1$ il y'a deux solutions
Si : $m = -1$ il y'a une solution c'est : x = -1
Si : $m < -1$ l'équation n'admet pas de solution

Exercice 4 : (***) Soit f une fonction tel que : $f(x) = \frac{-10x}{x^2+1}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer D_f .

2) Montrer que la fonction f est impaire

3) Calculer $f(-1)$ et Montrer que 5 est une valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$

4) a) Soient $x_1 \in D_f$ et $x_2 \in D_f$ tel que : $x_1 \neq x_2$

Montrer que : $T(x_1;x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{10(x_1x_2 - 1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$

b) En déduire la monotonie de la fonction f sur les intervalles $I = [0;1]$ et $J = [1;+\infty[$.

5) Donner le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

Solution :1) $D_f = \{x \in E \,/\, f(x) \in \mathbb{R}\}$

$D_f = \{x \in E \,/\, x^2 + 1 \neq 0\}$

$x^2 + 1 = 0$ Signifie $x^2 = -1$
Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$
Donc : $x^2 + 1$ ne s'annule jamais
Par suite : $D_f = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \frac{-10x}{x^2+1}$

- si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$

- $f(-x) = \frac{-10(-x)}{(-x)^2+1} = -\frac{-10x}{x^2+1}$ Donc : $f(-x) = -f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

3) Calculons $f(-1)$:

$$f(-1)=\frac{-10\times(-1)}{(-1)^2+1}=\frac{10}{2}=5$$

Montrons que 5 est une valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$

$f(x)=\dfrac{-10x}{x^2+1}$: Soit $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)-5=\frac{-10x}{x^2+1}-5=\frac{-10x-5(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{-10x-5x^2-5}{x^2+1}=-5\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}=-5\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$$

Puisque : $-5\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}\leq 0$ alors : $f(x)\leq 5$ et on a aussi : $f(-1)=5$

Alors : $f(x)\leq f(-1)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

On conclut que : $f(-1)=5$ est une valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$

4) a) Soient $x_1\in D_f$ et $x_2\in D_f$ tel que : $x_1\neq x_2$

Montrons que : $T(x_1;x_2)=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{10(x_1x_2-1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\frac{-10x_1}{x_1^2+1}+\frac{10x_2}{x_2^2+1}}{x_1-x_2}=\frac{\frac{-10x_1(x_2^2+1)+10x_2(x_1^2+1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{-10x_1(x_2^2+1)+10x_2(x_1^2+1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{-10x_1x_2^2-10x_1+10x_2x_1^2+10x_2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}\times\frac{1}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{10(-x_1x_2^2-x_1+x_2x_1^2+x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{10(x_2-x_1+x_1x_2(x_1-x_2))}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}\times\frac{1}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{10(x_1x_2(x_1-x_2)-(x_1-x_2))}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{10(x_1-x_2)(x_1x_2-1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}\times\frac{1}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{10(x_1x_2-1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$

b)

• Déduction de la monotonie de la fonction f sur l'intervalle $I=[0;1]$

Soient : $x_1\in[0;1]$ et $x_2\in[0;1]$ tel que : $x_1\neq x_2$

On a : $(1+x_1^2)(1+x_2^2)>0$ et $10>0$

Donc : $\begin{cases}0\leq x_1\leq 1\\ 0\leq x_2\leq 1\end{cases}$ alors : $0\leq x_1x_2\leq 1$

Donc : $x_1x_2-1\leq 0$ et puisque $x_1\neq x_2$ alors : $0\leq x_1x_2<1$

D'où : $T(x_1;x_2)=\dfrac{10(x_1x_2-1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}<0$

Et par suite f est strictement décroissante sur $I=[0;1]$

• Déduction de la monotonie de la fonction f sur l'intervalle $J=[1;+\infty[$

On a : $\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)>0$ et $10>0$

Soient : $x_1\in[1;+\infty[$ et $x_2\in[1;+\infty[$ tel que : $x_1\neq x_2$

Donc : $\begin{cases} x_1\geq 1 \\ x_2\geq 1 \end{cases}$ alors : $x_1x_2\geq 1$

Donc : $x_1x_2-1\geq 0$ et puisque $x_1\neq x_2$ alors : $x_1x_2-1>0$

D'où : $T\left(x_1;x_2\right)=\dfrac{10\left(x_1x_2-1\right)}{\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)}>0$

Et par suite f est strictement croissante sur $J=[1;+\infty[$

5) Le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$:
On a f est une fonction impaire

⊳ Puisque f est strictement décroissante sur $I=[0;1]$ alors f l'est aussi sur $I'=[-1;0]$

⊳ Puisque f est strictement croissante sur $J=[1;+\infty[$ alors f l'est aussi sur $J'=]-\infty;1]$

D'où, le tableau de variation de f

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-5	$\nearrow$

Exercice 5 : (**) Soit f une fonction numérique tel que : $g\left(x\right)=\dfrac{-x}{x-2}$

$\left(C_g\right)$ Sa courbe représentative dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1) Déterminer D_g

2) Ecrire $g\left(x\right)$ sous la forme : $g\left(x\right)=\beta+\dfrac{k}{x+\alpha}$ (déterminer α et β et k)

3) En déduire la nature de $\left(C_g\right)$ et ses éléments caractéristiques

4) Dresser le Tableau de variations de g

5) Tracer la courbe représentative $\left(C_g\right)$ dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

Solution :1) $g\left(x\right)=\dfrac{-x}{x-2}$

On a $g\left(x\right)\in\mathbb{R}$ signifie que : $x-2\neq 0$ c'est-à-dire : $x\neq 2$

Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{2\}$

2) Si $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ on a

$$\begin{array}{r|l} -x & x-2 \\ \cline{2-2} x-2 & -1 \\ \cline{1-1} -2 & \end{array}$$

$$g\left(x\right)=\frac{-x}{x-2}=\frac{-1(x-2)-2}{x-2}=\frac{-1(x-2)}{x-2}+\frac{-2}{x-2}=-1+\frac{-2}{x-2}$$

Puisque : $g\left(x\right)=\beta+\dfrac{k}{x+\alpha}$ Alors : $\alpha=-2$; $\beta=-1$ et $k=-2$

3) On a : $g\left(x\right)=-1+\dfrac{-2}{x-2}$ avec $\alpha=-2$; $\beta=-1$

Donc : (C_f) est une hyperbole de centre $W(-\alpha;\beta)$; $W(2;-1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=2$ et $y=-1$

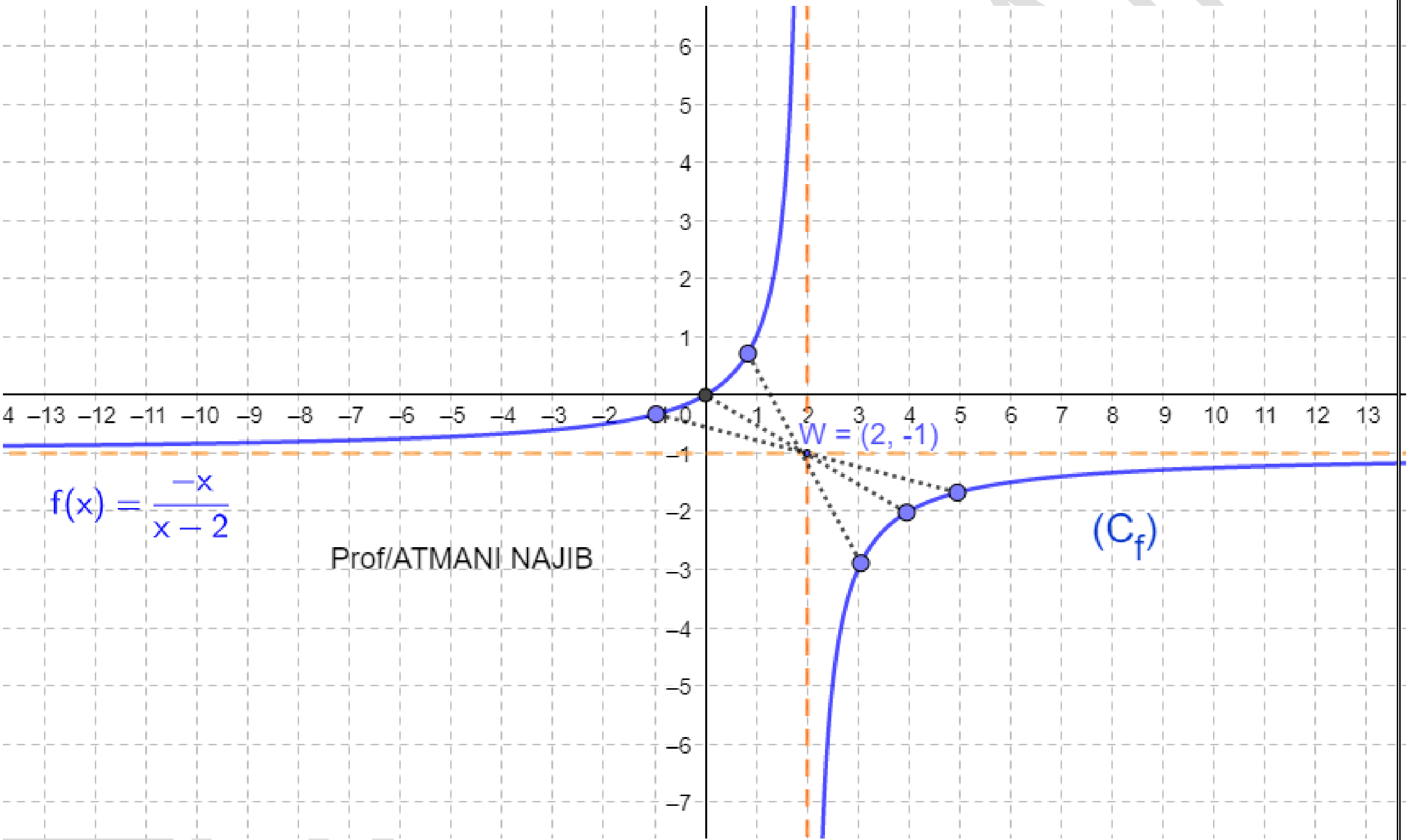
4) $k=-2<0$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$	
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

Methode2 : $\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{vmatrix}=2\succ 0$

<u>4) Représentation graphique</u>

-1	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	5
-1/ 3	0	1		-3	-2	-5/ 3



Exercice 6 : (*) (**) Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=\frac{1}{4}x^3$

1) Déterminer D_f

2) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation

3) Tracer la dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) de f

Solution : 1) f est une fonction polynôme donc un réel a toujours une image.

Donc $D_f=\mathbb{R}$

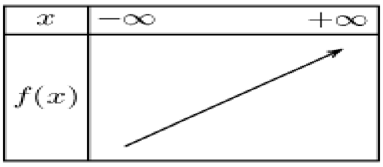
2) Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1<x_2$

Donc : $x_1^3<x_2^3$

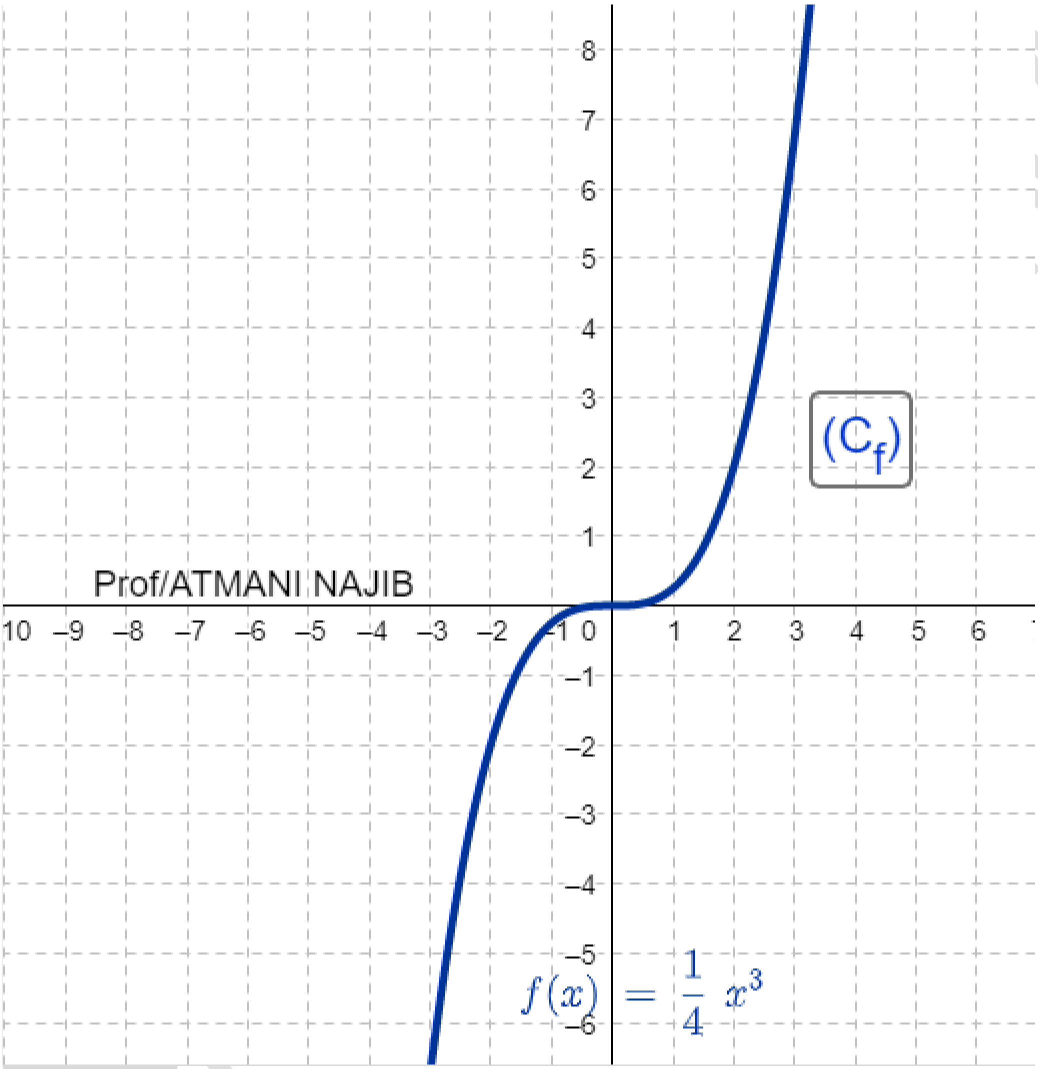
Donc : $\frac{1}{4}x_1^3<\frac{1}{4}x_2^3$ c'est à dire : $f(x_1)<f(x_2)$

Donc : f est strictement croissante

Tableau de variation :



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.5	-2	-1/4	0	1/4	2	6.5

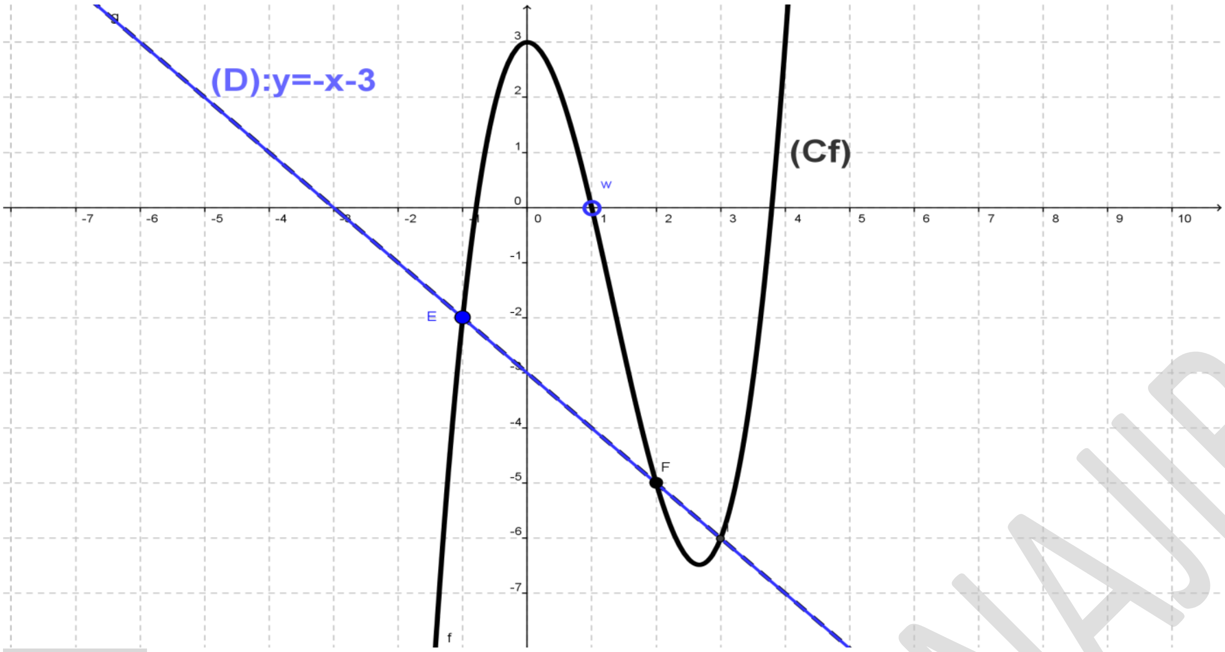


Exercice 7 : (***) Soit la courbe (C_f) représentative de f telle que $f(x)=x^3-4x^2+3$ et la droite (D) d'équation $y=-x-3$ (voir la figure)

1)Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=3$ puis l'inéquation $f(x)<3$.

2)Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=0$ et l'inéquation $f(x)\geq 0$

3)Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=-x-3$ puis l'inéquation $f(x)\leq -x-3$



Solution :1) $f(x)=3$ La solution est l'ensemble des antécédents de 3 : $S=\{0;4\}$

2- $f(x)=0$ La solution est l'ensemble des antécédents de 0 :

$S=\{a;1;b\}$ Avec $-1\prec a\prec -0.5$ et $3.5\prec b\prec 4$

$f(x)\geq 0 \quad S=[a;1]\cup[b;+\infty[$

3- $f(x)=-x-3$ La solution l'ensemble des abscisses des points d'intersection de (C_f) et de D :

$y=-x-3$ donc $S=\{-1;2;3\}$

$f(x)\leq -x-3 \quad S=]-\infty;-1]\cup[2;3]$

Exercice 8 : (**) On considère les fonctions : $f:x\to f(x)=\frac{1}{2}x^2$ et $g:x\to g(x)=\frac{1}{x+1}$.

Le but de l'exercice est d'étudier la position relative de (C_f) et (C_g) les courbes représentatives des fonctions f et g

1) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f et g

2) Montrer que, pour tout nombre x réel : $x^3+x^2-2=(x-1)(x^2+2x+2)$

3) Montrer que pour tout nombre x réel : $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$

En déduire le signe de l'expression : x^2+2x+2

4) A l'aide de ce qui précède, déterminer la position relative des courbes (C_f) et (C_g)

Solution :1) Dans l'expression de $f(x)$, x peut prendre n'importe quelle valeur réelle

Donc $D_f=\mathbb{R}$

Tandis que pour : $g(x)$, x ne doit pas prendre de valeur telle que : $x+1=0$ soit $x=-1$ et donc, $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$

2) Pour tout x réel : $(x-1)(x^2+2x+2)=x^3+2x^2+2x-x^2-2x-2=x^3+x^2-2$

3) Pour tout x réel : $(x+1)^2+1=x^2+2x+1+1=x^2+2x+2$

Pour tout nombre x réel : $(x+1)^2 \geq 0$ et donc $x^2+2x+2=(x+1)^2+1\geq 1 \succ 0$

Ainsi x^2+2x+2 est toujours strictement positif.

4) Pour comparer les positions des courbes (C_f) et (C_g), on étudie le signe de : $f(x)-g(x)$:

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x+1}=\frac{x^3+x^2-2}{2(x+1)}$$

Donc : $f(x)-g(x)=\dfrac{(x-1)(x^2+2x+2)}{2(x+1)}$

Donc, d'après de ce qui précède on a :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	$\mid$	$-$	0	$+$	
x^2+2x+2		$+$	$\mid$	$+$	$\mid$	$+$	
$2(x+1)$		$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	
$\frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{2(x+1)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Ainsi (C_f) est au-dessus de (C_g) lorsque : $x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left[1;+\infty\right[$

Et (C_f) au-dessous de (C_g) lorsque : $x\in\left]-1;1\right]$ et Les deux courbes se coupent en : $x=1$

Exercice 9 : (**) (***) Soient f et g les deux fonctions définies par :

$g(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$ et $f(x)=x^2+2$

1)a) Déterminer D_g

b) Déterminer la nature de la courbe (C_g) de g et ses éléments caractéristiques

c) Déterminer le Tableau de variations de g

2) a) Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ses éléments caractéristiques

b) Déterminer le Tableau de variations de f

3) Trouver le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

4)Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère

5) a) Etudier graphiquement le signe de la fonction g

b) Etudier algébriquement le signe de la fonction g

6) (On admet que (C_g) coupe (C_f) en un point d'abscisse : $\lambda=2,11$

Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geq g(x)$

Solution :1) $g(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$; on a $g(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$

Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$

Soit $x \in \mathbb{R} - \{1\}$; On a :

$$g(x) = \frac{2x+3}{x-1} = \frac{(2x-2)+2+3}{x-1} = \frac{2(x-1)+5}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1} = 2 + \frac{5}{x-1}$$

On utilisant un résumé de notre cours :

Rappelle : Si : $g(x) = \beta + \frac{k}{x+\alpha}$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(-\alpha;\beta)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x = -\alpha$ et $y = \beta$

Dans notre exercice on a : $g(x) = 2 + \frac{5}{x-1}$ si $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ donc : $\alpha = -1$ et $\beta = 2$ et $k = 5 > 0$

Donc (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations :
$x = 1$ et $y = 2$

Puisque : $k = 5 > 0$ alors : g est strictement décroissante sur les intervalles : $]-\infty;1[$ *et* $]1;+\infty[$

Donc le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g	$\searrow$	‖	$\searrow$

2) On a f est une fonction polynôme donc : $D_f = \mathbb{R}$

On utilisant un résumé de notre cours :

Rappelle : $f(x) = a(x+\alpha)^2 + \beta$ (forme canonique)

Dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta)$ et d'axe de symétrie la droite : $x = -\alpha$

Dans notre exercice on a : $f(x) = x^2 + 2 = 1(x-0)^2 + 2$ (la forme canonique) : $\alpha = 0$ et $\beta = 2$

Dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta)$ c'est-à-dire : $W(0;2)$ et d'axe de symétrie la droite : $x = -\alpha = 0$

Le tableau de variations de f :

Dans notre exercice on a : $-\alpha = 0$ et $\beta = 2$ et $a = 1 > 0$

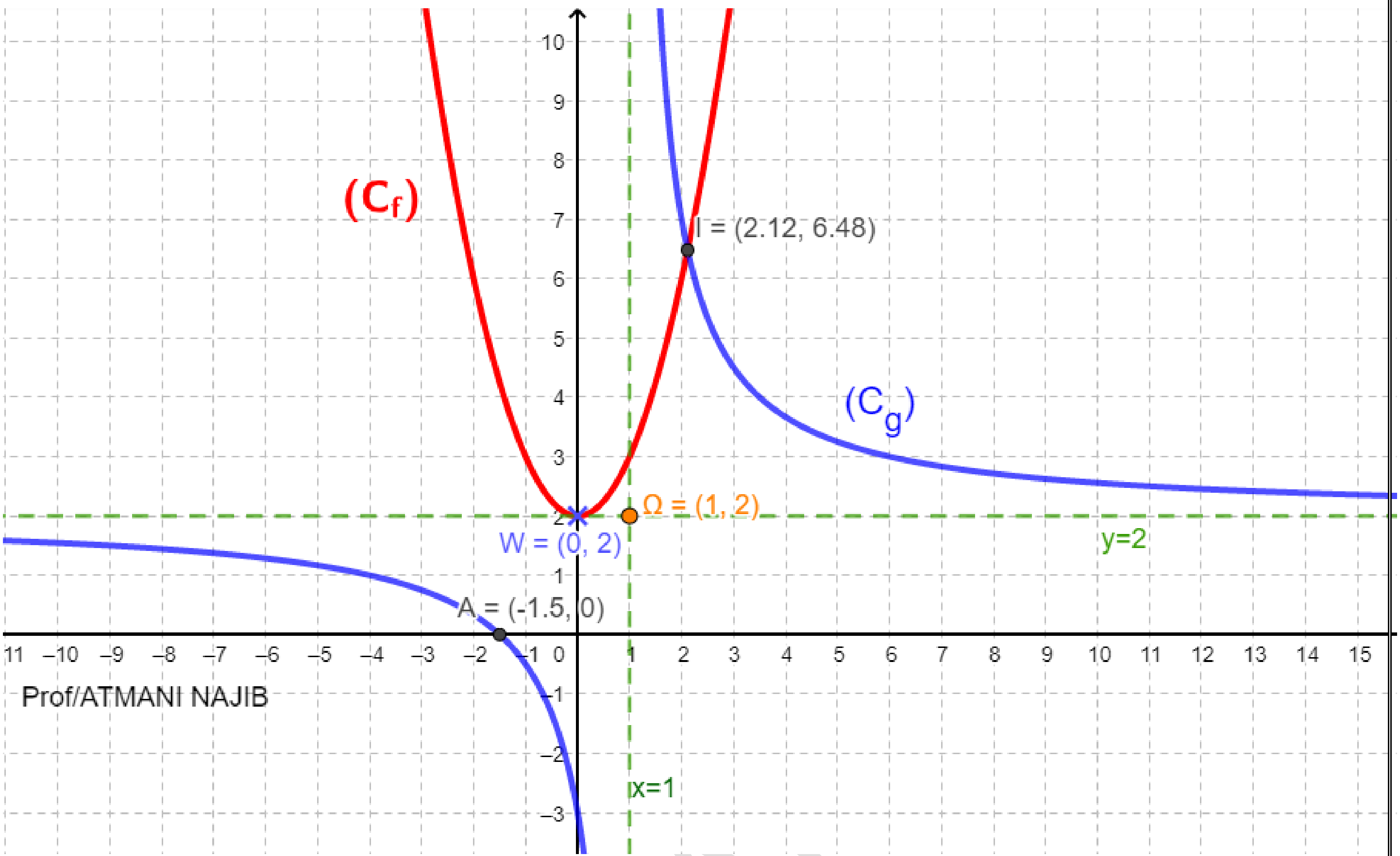
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

3) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x-1} = 0 \Leftrightarrow 2x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

Le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses est : $A\left(-\frac{3}{2};0\right)$

4) Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère



5) a) Etude graphique du signe de la fonction g sur $\mathbb{R}-\{1\}$

$g(x)\geq 0$ si et seulement si la courbe (C_g) est au-dessus de l'axe des abscisses

$g(x)\geq 0$ Signifie que $x\in\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup\left]1;+\infty\right[$

$g(x)\leq 0$ Signifie que $x\in\left[-\frac{3}{2};1\right[$

b) Etudions algébriquement le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}-\{1\}$

Voici le tableau de signe qui résume le signe de g sur $\mathbb{R}-\{1\}$

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		1		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2x+3}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

7) a) Résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$:

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc : $x=1$ par suite : $S=\{1\}$

7)b) Résolution graphique de l'inéquation $g(x)\geq f(x)$:

La courbe (C_g) est au-dessus de (C_f) si $x\in\left]1;\lambda\right]$ c'est-à-dire : $x\in\left]1\ ;\ 2{,}12\right]$

Donc $S=]1;\lambda]=]1\ ;\ 2{,}12]$

Exercice 10 : (*) (**) (***) Soit g la fonction définie par : $g(x)=\dfrac{1}{2-x}$ et (C_g) La courbe représentative de g

1) a) Déterminer la nature de (C_g) et ses éléments caractéristiques.

b) Déterminer le tableau de variation de g

c) Tracer la courbe (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $g(x)=x$ et $g(x)=1+x$

b) Donner une interprétation graphique des résultats

c) Déterminer le signe de : m^2+4m

d) Déterminer les valeurs de m ou la courbe (C_g) coupe la droite d'équation : $y=x+m$ en deux points

3) On considère la fonction f tel que : $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-x+1}$

a) Déterminer D_f

b) Montrer : $f(x)-f(y)=2(x-y)\dfrac{1-xy}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}$ $si\ x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

c) En déduire la monotonie de f dans : $[-1;1]$ et $[1;+\infty[$

d) Calculer : $f(x)+\dfrac{2}{3}$ puis en déduire que $-\dfrac{2}{3}\le f(x)$; si $x\in\mathbb{R}$

e) Montrer que : si $x\in\mathbb{R}$ alors : $-\dfrac{2}{3}\le f(x)\le 2$

Solution :1) a) Déterminons la nature de (C_g) et ses éléments caractéristiques : $g(x)=\dfrac{1}{2-x}$

On a $g(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow 2-x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$

Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{2\}=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

En générale si : $g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $W\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\dfrac{d}{c}$ et $y=\dfrac{a}{c}$

Dans notre exercice on a : $g(x)=\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{0x+1}{(-1)x+2}$ donc (C_g) est une hyperbole de centre $W(2;0)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x=2$ et $y=0$

b) $g(x)=\dfrac{1}{2-x}$ on a : $\Delta=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=1\succ 0$ g est strictement croissante sur les intervalles :

$]2\ ;\ +\infty[$ et $]-\infty\ ;\ 2[$

x	$-\infty$ 2	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

2) a) Résolution dans $\mathbb{R}$ des équations : $g(x)=x$ et $g(x)=1+x$

$$g(x)=x \Leftrightarrow \frac{1}{2-x}=x \Leftrightarrow x(2-x)=1 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$$

Donc : $S_1=\{1\}$

$$g(x)=1+x \Leftrightarrow \frac{1}{2-x}=1+x \Leftrightarrow (1+x)(2-x)=1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0$$

$\Delta=b^2-4ac=1^2+4=5>0$ et $x_1=\frac{-(-1)+\sqrt{5}}{2\times1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\frac{-(-1)-\sqrt{5}}{2\times1}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Donc : $S_2=\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

b) interprétation graphique des résultats :

- Pour l'équation : $g(x)=x$

La courbe (C_g) coupe la droite d'équation : $y=x$ en un point c'est : $A(1;1)$

- Pour l'équation : $g(x)=1+x$

La courbe (C_g) coupe la droite d'équation : $y=x+1$ en deux points : $B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)$ et $C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)$ c'est-à-dire : $B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ et $C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

c) Détermination du signe de : m^2+4m

m	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$m2+4m$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d) Détermination des valeurs de m pour que la courbe $\left(C_g\right)$ coupe la droite d'équation : $y=x+m$ en deux points : Résolution algébrique de l'équation $g(x)=x+m$

$$g(x)=x+m \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1}=x+m \Leftrightarrow 2m+2x-x^2-xm=1 \Leftrightarrow x^2+(m-2)x-2m+1=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(m-2)^2-4\times1\times(-2m+1)=m^2+4m$$

Donc : $\Delta=m^2+4m>0$ signifie que : $m\in\left]-\infty;-4\right[\cup\left]0;+\infty\right[$

Donc : l'équation $g(x)=x+m$ admet 2 solutions si et seulement si : $m\in\left]-\infty;-4\right[\cup\left]0;+\infty\right[$

Donc : les valeurs de m pour que la courbe $\left(C_g\right)$ coupe la droite d'équation : $y=x+m$ en deux points sont : $m\in\left]-\infty;-4\right[\cup\left]0;+\infty\right[$

3) On considère la fonction f tel que : $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-x+1}$

a) Détermination de D_f

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x^2-x+1\neq 0\right\}$$

Le discriminant est $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times1\times1=1-4=-3<0$

Donc : Pas de racines par suite : $D_f=\mathbb{R}$

b) Calculons : $f(x)-f(y)$ *si* $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

$$f(x)-f(y)=\frac{2x}{x^2-x+1}-\frac{2y}{y^2-y+1}=\frac{2x\left(y^2-y+1\right)-2y\left(x^2-x+1\right)}{\left(x^2-x+1\right)\left(y^2-y+1\right)}=2\frac{xy^2-xy+x-yx^2+xy-y}{\left(x^2-x+1\right)\left(y^2-y+1\right)}$$

$$=2\frac{xy^2-yx^2+x-y}{\left(x^2-x+1\right)\left(y^2-y+1\right)}=2\frac{xy\left(y-x\right)-\left(y-x\right)}{\left(x^2-x+1\right)\left(y^2-y+1\right)}=2\left(y-x\right)\frac{xy-1}{\left(x^2-x+1\right)\left(y^2-y+1\right)}$$

Donc : $f(x)-f(y)=2(x-y)\dfrac{1-xy}{\left(x^2-x+1\right)\left(y^2-y+1\right)}$

c) En déduire la monotonie de f dans: $[-1;1]$ et $\left[1;+\infty\right[$

On a : $f(x)-f(y)=2(x-y)\dfrac{1-xy}{\left(x^2-x+1\right)\left(y^2-y+1\right)}$ donc : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=2\dfrac{1-xy}{\left(x^2-x+1\right)\left(y^2-y+1\right)}$

Pour : x^2-x+1 et y^2-y+1 ; $\Delta=1-4\prec0$ donc : $x^2-x+1\succ0$ et $y^2-y+1\succ0$

Si : $x\in[-1;1]\Rightarrow-1\le x\le1\Rightarrow|x|\le1 \quad (1)$ et $y\in[-1;1]\Rightarrow-1\le y\le1\Rightarrow|y|\le1 \quad (2)$

(1) et $(2)\Rightarrow|x||y|\le1\Rightarrow|xy|\le1\Rightarrow-1\le xy\le1\Rightarrow0\le1-xy$

Donc : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\ge0$ par suite f est croissante sur $[-1;1]$

Si : $x\in\left[1;+\infty\right[\Rightarrow x\ge1 \quad (1)$ et $y\in\left[1;+\infty\right[\Rightarrow y\ge1 \quad (2)$

(1) et $(2)\Rightarrow xy\ge1\Rightarrow1-xy\le0$

Donc : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\le0$ par suite f est décroissante sur $\left[1;+\infty\right[$

d) Calcul de : $f(x)+\frac{2}{3}$ puis l'étude de son signe :

$$f(x)+\frac{2}{3}=\frac{2x}{x^2-x+1}+\frac{2}{3}=\frac{6x+2x^2-2x+2}{3(x^2-x+1)}=\frac{2x^2+4x+2}{3(x^2-x+1)}=\frac{2(x^2+2x+1)}{3(x^2-x+1)}=\frac{2(x+1)^2}{3(x^2-x+1)}\geq 0$$

Car : $x^2-x+1\succ 0$ et $(x+1)^2\geq 0$

Par suite : $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x)+\frac{2}{3}\geq 0$ c'est-à-dire : $-\frac{2}{3}\leq f(x)$ ❶ ; $\forall x\in\mathbb{R}$

e) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$ $-\frac{2}{3}\leq f(x)\leq 2$

On a : $-\frac{2}{3}\leq f(x)$ ❶ ; $\forall x\in\mathbb{R}$. Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x)\leq 2$

$$2-f(x)=2-\frac{2x}{x^2-x+1}=2\left(1-\frac{x}{x^2-x+1}\right)=2\frac{x^2-x+1-x}{(x^2-x+1)}=2\frac{x^2-2x+1}{(x^2-x+1)}=\frac{2(x-1)^2}{(x^2-x+1)}\geq 0$$

Car : $x^2-x+1\succ 0$ et $(x-1)^2\geq 0$

Par suite : $\forall x\in\mathbb{R}$: $2-f(x)\geq 0$ c'est-à-dire : $f(x)\leq 2$ ❷ ; $\forall x\in\mathbb{R}$

❶ et❷ $\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}$; $-\frac{2}{3}\leq f(x)\leq 2$

Exercice 11 : (**) (***) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

1) Déterminer D_f

2) Démontrer que : $0\leq f(x)$ si $x\in\mathbb{R}^+$

3) Démontrer que : $f(x)<\frac{1}{2}$ si $x\in\mathbb{R}^+$

Solution :1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq 0\}=\mathbb{R}^+$

2) soit $x\in\mathbb{R}^+$ on a $x+\sqrt{x}\geq x$

Donc : $\sqrt{x+\sqrt{x}}\geq\sqrt{x}$ donc $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\geq 0$

Donc : $0\leq f(x)$ si $x\in\mathbb{R}^+$

2) Soit $x\in\mathbb{R}^+$: $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}\geq 0$

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{x}-x}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x}}+1\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}$$

Si $x \in \mathbb{R}^{*+}$: $\frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ donc $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} > 1$

Donc : $\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} > 1$ donc $\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1 > 2$

Donc : $\frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1\right)} < \frac{1}{2}$ par suite : $f(x) < \frac{1}{2}$ et on a : $f(0) = 0 < \frac{1}{2}$

Donc : si $x \in \mathbb{R}^{+}$: $f(x) < \frac{1}{2}$

Conclusion : $0 < f(x) < \frac{1}{2}$ si $x \in \mathbb{R}^{+}$

Exercice 12 : (**) (***) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = x^2 + 2x\sqrt{x} + x - 4$

Démontrer que : -4 est une valeur minimale de f sur $\mathbb{R}^{+}$

Solution :1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = \mathbb{R}^{+}$

Soit $x \in \mathbb{R}^{+}$: $f(x) = x^2 + 2x\sqrt{x} + x - 4 = x^2 + 2x\sqrt{x} + \left(\sqrt{x}\right)^2 - 4$

$f(x) = \left(x + \sqrt{x}\right)^2 - 4$ Donc : $f(x) + 4 = \left(x + \sqrt{x}\right)^2 \geq 0$

Donc : $f(x) + 4 \geq 0$ par suite : $f(x) \geq -4$ et on a : $f(0) = -4$ donc $f(x) \geq f(0)$

Donc : $f(0) = -4$ est une valeur minimale de f au point $x_0 = 0$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien