Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°7 : PRODUIT SCALAIRE

Exercice1 : (*) Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs tels que : $AB=\frac{\sqrt{3}}{4}$ et $AC=\sqrt{3}$ et $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv-\frac{5\pi}{6}[2\pi]$

Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Solution : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\cos BAC=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\sqrt{3}\times\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\sqrt{3}\times\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\frac{3}{4}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{3\sqrt{3}}{8}$

Exercice 2 : (**) Soit EFG un triangle tel que : $EF=5$ $EG=3$ et $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}=-6$ calculer : $\cos\left(FEG\right)$

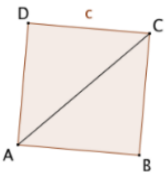
Solution : $\overrightarrow{EF}\bullet\overrightarrow{EG}=\left\|\overrightarrow{EF}\right\|\times\left\|\overrightarrow{EG}\right\|\cos\left(FEG\right)=-6$

Equivalent à : $EF\times EG\cos\left(FEG\right)=-6$ Equivalent à $5\times3\cos\left(FEG\right)=-6$

Equivalent à $\cos\left(FEG\right)=-\frac{6}{15}=-\frac{2}{5}$

Exercice 3 : (**) Soit un carré ABCD de côté c.

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

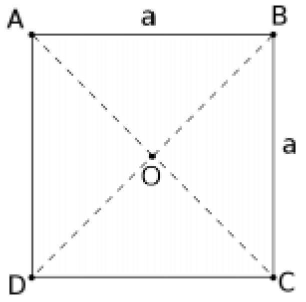


Solution : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=c^2$

Exercice 4 : (**) Soit le carré ABCD de centre O et de côté a .

Calculer, en fonction de : a les produits scalaires suivants.

1) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$ 2) $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC}$ 3) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB}$ 4) $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CO}$ 5) $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OB}$ 6) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CA}$



Solution :1) Calculons : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$

On sait que dans un carré les diagonales sont à supports perpendiculaires et se coupent en leurs milieux ainsi, (AO) ⊥ (BD).

(AO) ⊥ (BD) donc le point O est le projeté orthogonal de du point A sur la droite (BD).

Par conséquent : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BD}$ Or : $\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}^2=\frac{1}{2}BD^2$

Déterminons BD.

Considérons le triangle BAD rectangle en A, d'après la propriété de Pythagore on a:

$BD^2 = AB^2 + AD^2$

Donc : $BD^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

Donc : $BD = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$

Par suite, on obtient : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2}2a^2 = a^2$

Donc : $\boxed{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD} = a^2}$

2) Calculons : $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC}$

Les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{BC}$ étant colinéaire et de sens contraire :

Donc : $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} = -DA \times BC = -a \times a = -a^2$

3) Calculons : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB}$

Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{DB}$ ont respectivement pour droite d'action (CA) et (DB) qui sont perpendiculaires comme étant les diagonales du carrée, ainsi les vecteurs

Ainsi Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont orthogonaux.

D'où : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB} = 0$

4) Calculons : $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CO}$

Le projeté du point D sur la droite (CO) est le point O et la droite (CO) est la droite d'action du vecteur $\overrightarrow{CO}$

Donc on a : $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CO}.\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CO}^2 = CO^2$

Déterminons CO:

On a : $CO = \frac{1}{2}CA$

D'après la réponse de la question 1), la diagonale du carrée a pour longueur : $BD = a\sqrt{2} = CA$

Donc on a : $CO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Par conséquent : $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CO} = CO^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$

D'où : $\boxed{\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CO} = \frac{a^2}{2}}$

5) Calculons : $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OB}$

Les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OB}$ étant colinéaire et de sens contraire

Donc : $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OB} = -OD \times OB$ or $OD = OB$

Donc : $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OB} = -OD \times OD = -OD^2$

De la question précédente on a : $CO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ or $OD = CO$ alors :

$\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OB} = -\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\frac{2a^2}{4} = -\frac{a^2}{2}$

D'où : $\boxed{\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OB} = -\frac{a^2}{2}}$

6) Calculons : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CA}$

Le projeté orthogonal du point D sur la droite (AC) est le point O et la droite (AC) est la droite d'action du vecteur $\overrightarrow{AD}$ alors :

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{CA}$ or $\overrightarrow{AO}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

Alors : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}^2=-\frac{1}{2}CA^2$

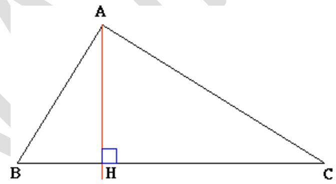
$CA=a\sqrt{2}$ donc : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CA}=-\frac{1}{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2=-\frac{2}{2}a^2=-a^2$

D'où : $\boxed{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CA}=-a^2}$

Exercice 5 : (**) (***) Soit ABC un triangle rectangle en A et H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) et $BC=5cm$ et $CH=3cm$

Calculer $\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}\right)^2$

Solution : $\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}\right)^2=\overrightarrow{CB}^2+\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{CB}\bullet\overrightarrow{AB}$



$\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}\right)^2=CB^2+AB^2+2CB\times AB$

Or : $AB^2=BH\times BC=2\times 5=10$ et

$\overrightarrow{CB}\bullet\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{BH}=BC\times BH=5\times 2=10$

Par suite : $\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}\right)^2=25+10+2\times 10=55$

Exercice 6 : (**) Soit ABC un triangle isocèle en B tel que :

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=12$ et $\cos(A\hat{B}C)=\frac{1}{3}$ et J un point tel que : $\overrightarrow{BJ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}$ et I le milieu du segment $[AC]$

Et soit la droite (Δ) qui passe par J et perpendiculaire à la droite (AB) et soit E un point tel que : $E\in(\Delta)$ et soit $M\in(\Delta)$

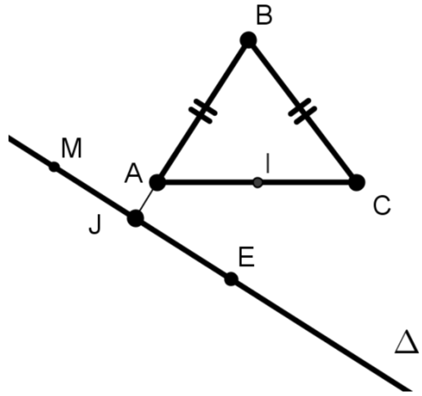
1) Montrer que : $AB=6$ et calculer AC

2) Calculer : $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BA}$

3) Montrer que : $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AB}=45$

4) Calculer : BI

Solution : 1) on a : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=12$ donc : $\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\times\cos\hat{B}=12$



Donc : $BA\times BC\times\cos\hat{B}=12$ donc : $AB^2\times\frac{1}{3}=12$

Donc : $AB^2=36$ donc : $AB=6$

b) D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC on a :

Donc : $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\cos B$

Donc : $AC^2=36+36-2\times 36\times\frac{1}{2}$

Donc : $AC^2=54$ donc : $AC=\sqrt{54}$

3) $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}^2=\frac{5}{4}BA^2=\frac{5}{4}\times 36=45$

4) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{JB}\cdot\overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ car $\overrightarrow{MJ}\perp\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-\overrightarrow{BJ}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BA}=45$

5) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a :

$AB^2+BC^2=2BI^2+\frac{1}{2}AC^2$ Donc : $6^2+6^2=2BI^2+\frac{1}{2}\sqrt{54}^2$

Donc : $72=2BI^2+27$ donc : $BI^2=\frac{45}{2}$ Donc : $BI=\sqrt{\frac{45}{2}}$

Exercice 7 : (**) Soit ABC un triangle tel que et $AB=3$ et $BC=4\sqrt{3}$ et $ABC=\frac{\pi}{6}$

I le milieu du segment $[BC]$

1) Calculer AC .

2) Montrer que $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=18$

3) Montrer que $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

4) Calculer : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}$ et en déduire la nature du triangle AIB

Solution : 1) Calculons AC

D'après le Théorème d'Al Kashi on a :

$AC^2=BA^2+BC^2-2BA\times BC\cos ABC$

$AC^2=9+48-24\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $AC^2=21$

Par suite : $AC=\sqrt{21}$.

b) Montrons que : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=18$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=BA\times BC\times\cos ABC=3\times4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=18$

3) Montrons que : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Nous avons : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}$

Puisque I est le milieu du segment $[BC]$

Nous obtenons : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

4) Calculons $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}$:

$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ Donc : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=9-\frac{1}{2}\times18=0$

On a : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ Nous en déduisons que la droite (AI) est perpendiculaire à la droite (AB)

Et par conséquent le triangle AIB est rectangle en A

Exercice 8 : (**) Soit ABC un triangle isocèle en A tel que : $\cos(B\hat{A}C)=\frac{1}{4}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$.

I un point tel que : $\overrightarrow{BI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$ et J le milieu du segment $[BC]$

Et soit la droite (Δ) qui passe par I

et perpendiculaire à la droite (AB) et soit E un point tel que : $E\in(\Delta)$

1) Construire une figure.

2) Montrer que : $AB=8$ et calculer BC .

3) Calculer : $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}$

4) Montrer que : $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=48$

5) Calculer : AJ

Solution :1)

2) On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$

Donc : $AB\times AB\times\cos\hat{A}=16$ Donc : $AB^2\times\frac{1}{4}=16$ Donc : c'est-à-dire : $AB^2=64$

Donc : $AB=8$

b) D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC

On a : $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos A$

Donc : $BC^2=64+64-2\times 64\times\frac{1}{4}$

Donc : $BC^2=96$ c'est-à-dire : $BC=\sqrt{96}$

3) $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}^2=\frac{3}{4}BA^2=\frac{3}{4}BA^2=\frac{3}{4}\times 64=48$

4) $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{IB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ car $\overrightarrow{EI}\perp\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-\overrightarrow{BI}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}=48$

5) D'après le théorème de la médiane dans ABC

On a : $AB^2+AC^2=2AJ^2+\frac{1}{2}BC^2$

Donc : $8^2+8^2=2AJ^2+\frac{1}{2}\sqrt{96}^2$

Donc : $128=2AJ^2+48$ c'est-à-dire : $40=AJ^2$

Donc : $AJ=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

Exercice 9 (****) Soit A et B deux points dans le plan tel que : $AB=4$

Et soit k un réel ; on note $\left(C_k\right)$ l'ensemble des points M dans le plan tel que : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k$

1) Déterminer et représenter les ensembles : $\left(C_0\right)$ et $\left(C_5\right)$ et $\left(C_{12}\right)$ et $\left(C_{-6}\right)$

2) Déterminer (E) l'ensemble des points M du plan tel que : $0\le\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}\le 5$

Solution : Soit M un point dans le plan et soit I le milieu du segment $[AB]$on a donc : d'après le théorème de la médiane dans MAB : $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{1}{4}AB^2$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=MI^2-4$ car $AB=4$

Déterminons l'ensemble$\left(C_0\right)$:

1ier méthode : $M\in\left(C_0\right)$Signifie que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ C'est-à-dire : $\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}$

C'est-à-dire : $(MA)\perp(MB)$ et par suite l'ensemble$\left(C_0\right)$ est le cercle de de diamètre $[AB]$

2ier méthode : $M\in\left(C_0\right)$Signifie que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

Signifie que $MI^2-4=0$

Signifie que $MI^2=4$ c'est-à-dire : $MI=2$

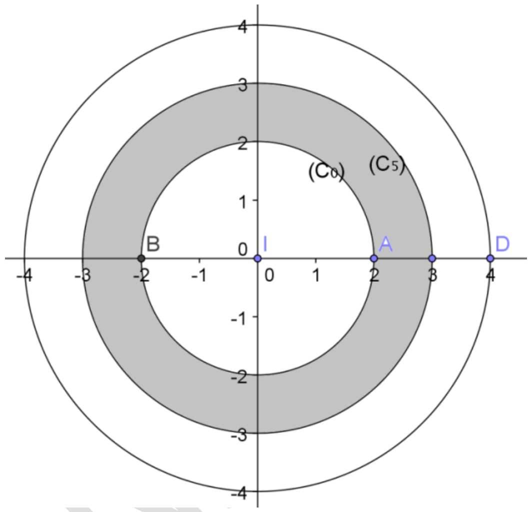
Par suite l'ensemble$\left(C_0\right)$ est le cercle de centre I et de rayon $R=2$

Déterminons l'ensemble$\left(C_5\right)$:

• $M \in (C_5)$ Signifie que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=5$ Signifie que $MI^2-4=5$

Signifie que $MI^2=9$ C'est-à-dire : $MI=3$

Par suite l'ensemble (C_5) est le cercle de centre I et de rayon $R=3$



• Déterminons l'ensemble (C_{12}) :

$M \in (C_{12})$ Signifie que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=12$ Signifie que $MI^2-4=12$

Signifie que $MI^2=16$ C'est-à-dire : $MI=4$

Par suite l'ensemble (C_{12}) est le cercle de centre I et de rayon $R=4$

• Déterminons l'ensemble (C_{-6}) : $M \in (C_{-6})$

Signifie que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-6$ c'est-à-dire : $MI^2-4=-6$

Signifie que $MI^2=-2$ impossible.

Par suite l'ensemble (C_{-6}) est l'ensemble vide : $(C_{-6})=\varnothing$

2) Déterminons (E) : $M \in (E)$ Signifie que $0 \le \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} \le 5$

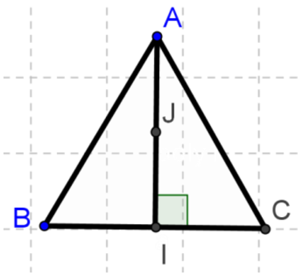
Signifie que $0 \le MI^2-4 \le 5$

Signifie que $4 \le MI^2 \le 9$ C'est-à-dire : $2 \le MI \le 3$

Par suite l'ensemble (E) est La couronne circulaire limitée par les cercles (C_0) est (C_5)

Exercice 10 : (****) Soit ABC un triangle équilatéral tel que : $AB=3cm$

I le milieu du segment $[BC]$ et J le milieu du segment $[AI]$



1) Calculer : $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{JC}$ et la distance AI

2) Montrer que : pour tout point M du plan on a :

$$2MA^2+MB^2+MC^2=4MJ^2+\frac{45}{4}$$

3) Déterminer : l'ensemble (C) des points M du plan tel que :

$$2MA^2+MB^2+MC^2=18$$

Solution : a) Calcul de : $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{JC}$

ABC Un triangle équilatéral et I le milieu du segment $[BC]$ donc : $(BC)\perp(IJ)$

Et donc : I est la projection orthogonale de J sur segment (BC)

Donc : $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{IC}=-\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{IC}=-\overrightarrow{IC}^2=-IC^2=-2^2=-4$

b) Calcul de : AI

D'après le théorème de la médiane dans ABC on a : $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$

Nous obtenons donc : $AI^2=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\frac{1}{2}BC^2\right)$

Donc : $AI^2=\frac{1}{2}\left(3^2+3^2-\frac{1}{2}3^2\right)=\frac{3}{4}\times 3^2=\frac{27}{4}$ Par suite : $AI=\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}cm$

1) Montrons que : pour tout point M du plan on a : $2MA^2+MB^2+MC^2=4MJ^2+\frac{45}{4}$

Soit M un point dans le plan et I le milieu du segment $[BC]$

Donc d'après le théorème de la médiane dans MBC on a : $MB^2+MC^2=2MI^2+\frac{1}{2}BC^2$

$2MA^2+MB^2+MC^2=2MA^2+2MI^2+\frac{1}{2}BC^2$ donc : $2MA^2+MB^2+MC^2=2\left(MA^2+MI^2\right)+\frac{1}{2}BC^2$

D'autre part on a : J le milieu du segment $[AI]$ donc d'après le théorème de la médiane dans MAI

On a : $MA^2 + MI^2 = 2MJ^2 + \frac{1}{2}AI^2$ donc : $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2\left(2MJ^2 + \frac{1}{2}AI^2\right) + \frac{1}{2}BC^2$

Donc : $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4MJ^2 + AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$

Donc : $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4MJ^2 + \frac{27}{4} + \frac{9}{2}$ car $AI = \frac{3\sqrt{3}}{2}cm$

Donc : $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4MJ^2 + \frac{45}{4}$

2) Déterminons l'ensemble (C) ? $M \in (C)$ Signifie que : $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 18$

Signifie que $4MJ^2 + \frac{45}{4} = 18$ c'est-à-dire : $4MJ^2 = 18 - \frac{45}{4}$ qui signifie que $MJ^2 = \frac{27}{16}$

C'est-à-dire : $MJ = \sqrt{\frac{27}{16}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ Par suite l'ensemble (C) est le cercle de centre J et de rayon

$R = \frac{3\sqrt{3}}{4}cm$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien