Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°8 : FONCTIONS - *Généralités*

Exercice 1 : (*) (**) (***) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{2-4x}$ 2) $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x}$ 3) $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{4-2x}}$

4) $f(x)=\sqrt{-5x^2+6x+8}-2x+1$ 5) $f(x)=\frac{3x^2+2x-1}{\sqrt{2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}}}-1$

6) $f(x)=\frac{3x^2+|x|-1}{\sqrt{16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}}}$ 7) $f(x)=(3x^2+2)\sqrt{-\frac{1}{2}x^2+x-4}$

8) $f(x)=\sqrt{3x^2+6x+5}+\frac{1}{x+1}$

Solution : 1) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{2-4x}$; $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2+1\geq 0 \;\; et \;\; 2-4x\neq 0\right\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\;2-4x\neq 0\}$ car $x^2+1\geq 0$ (toujours vraie)

Donc : $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,-4x\neq -2\}$ C'est-à-dire : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\;x\neq\frac{-2}{-4}\right\}$

Donc : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\;x\neq\frac{1}{2}\right\}$ D'où : $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

2) $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x+1\geq 0 \;\; et \;\; x\neq 0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq -1 \;\; et \;\; x\neq 0\}$ donc : $D_f=[-1;+\infty[-\{0\}=[-1;0[\cup]0;+\infty[$

3) $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{4-2x}}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x+1\geq 0 \;\; et \;\; 4-2x>0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq -1 \;\; et \;\; -2x>-4\}$ C'est-à-dire : $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq -1 \;\; et \;\; x<2\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,-1\leq x<2\}$ Donc $D_f=[-1,2[$

4) $f(x)=\sqrt{-5x^2+6x+8}-2x+1$; $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,-5x^2+6x+8\geq 0\right\}$

Calculons le discriminant du trinôme $-5x^2+6x+8$: $a=-5$; $b=6$; $c=8$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=6^2-4\times 8\times(-5)=36+160=196=14^2>0$

Comme $\Delta>0$, le trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6-\sqrt{196}}{2\times(-5)}=\frac{-6-14}{-10}=2$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6+\sqrt{196}}{2\times(-5)}=\frac{-6+14}{-10}=-\frac{4}{5}$

Le tableau de signe est :

x	$-\infty$		$-4/5$		2		$+\infty$
$-5x^2+6x+8$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $D_f=\left[-\frac{4}{5};2\right]$

5) $f(x)=\dfrac{3x^2+2x-1}{\sqrt{2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}}}-1$; $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}>0\right\}$

$2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}$: Calculons le discriminant du trinôme $2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}$:

$a=2$; $b=-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$; $c=\sqrt{6}$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=\left(-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)^2-4\times2\times\sqrt{6}=\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-8\times\sqrt{6}$

$\Delta=\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-8\times\sqrt{6}=\left(2\sqrt{2}\right)^2+2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2-8\sqrt{6}$

$\Delta=\left(2\sqrt{2}\right)^2+2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2-8\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\left(2\sqrt{2}\right)^2-2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2$

Donc : $\Delta=\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2>0$

Comme $\Delta>0$, le trinôme possède deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}}{2\times2}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\left|2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|}{4}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}}{2\times2}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\left|2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|}{4}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{4}=\frac{4\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$$

Le tableau de signe est :

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$2x^2-(2\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f=\left]-\infty;\frac{\sqrt{3}}{2}\right[\cup\left]\sqrt{2};+\infty\right[$

6) $f(x)=\dfrac{3x^2+|x|-1}{\sqrt{16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}\geq0\right\}$

Calculons le discriminant du trinôme $16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}$: $a=16$; $b=-\frac{8}{3}$; $c=\frac{1}{9}$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=\left(-\frac{8}{3}\right)^2-4\times16\times\frac{1}{9}=\frac{64}{9}-\frac{64}{9}=0$

Comme $\Delta=0$, trinôme possède une seule racine (dite double) : $x_0=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-\frac{8}{3}}{2\times16}=\dfrac{1}{12}$

Le tableau de signe est :

x	$-\infty$		$\frac{1}{12}$		$+\infty$
$16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}$		$+$	0	$+$	

Donc : $D_f=\left]-\infty;\frac{1}{12}\right[\cup\left]\frac{1}{12};+\infty\right[$

7) $f(x)=(3x^2+2)\sqrt{-\frac{1}{2}x^2+x-4}$; $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/-\frac{1}{2}x^2+x-4\geq 0\right\}$

$-\frac{1}{2}x^2+x-4$: Calculons son discriminant : $a=-\frac{1}{2}$; $b=1$; $c=-4$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=1^2-4\times(-4)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1-8=-7<0$ et $a=-\frac{1}{2}<0$

Le tableau de signe est :

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$-\frac{1}{2}x^2+x-4$	$-$

Donc : $D_f=\varnothing$

8) $f(x)=\sqrt{3x^2+6x+5}+\frac{1}{x+1}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/3x^2+6x+5\geq 0 \ \ et \ \ x+1\neq 0\right\}$ C'est-à-dire : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/3x^2+6x+5\geq 0 \ \ et \ \ x\neq -1\right\}$

Étudions le signe du trinôme $P(x)=3x^2+6x+5$; $a=3>0$; $\Delta=b^2-4ac=(6)^2-4\times 3\times 5=36-60=-24<0$

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$3x^2+6x+5$	$+$

Donc : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\ x\neq -1\right\}$ C'est-à-dire : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1;+\infty\right[$

Exercice 2 : (*) (**)

1) Etudier la parité de la fonction définie par : $f(x)=\frac{x^4}{x^2-1}$

2) Etudier la monotonie de la fonction g définie par : $g(x)=\frac{5}{x}+1$ sur $I=\left]0;+\infty\right[$

Solution :1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2-1\neq 0\right\}$

$x^2-1=0$ Signifie $x^2=1$

Équivaut à : $x=1$ ou $x=-1$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

☞ Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$ alors $-x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

☞ $f(-x)=\frac{(-x)^4}{(-x)^2-1}=\frac{x^4}{x^2-1}=f(x)$

$f(-x)=f(x)$ Donc f est une fonction paire

2)Soit $x_1\in\left]0;+\infty\right[$ et $x_2\in\left]0;+\infty\right[$ tels que : $x_1\prec x_2$

Donc $\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}$

Donc : $\frac{5}{x_1}>\frac{5}{x_2}$ car $5\succ 0$

Donc : $\frac{5}{x_1}+1>\frac{5}{x_2}+1$ c'est-à-dire : $f(x_1)>f(x_2)$

D'où f est strictement décroissante sur $I=\left]0;+\infty\right[$

Exercice 3 : (*) (**) (***) Soient f et g les deux fonctions définies par :
$f(x) = -x^2 + 4x + 3$ et $g(x) = 2x$

1)a) Déterminer la forme canonique de $f(x)$ ($f(x) = a(x+\alpha)^2 + \beta$)

b) Déterminer la nature de la courbe représentative (C_f) de f et ces éléments caractéristiques.

c) Déterminer le Tableau de variations de f

2)a) En déduire que : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) \leq 7$

b) En déduire que : pour tout $x \in \left[2; \frac{5}{2}\right]$ on a : $\frac{27}{4} \leq f(x) \leq 7$

c) En déduire que : pour tout $x \in [-1; 2]$ on a : $-2 \leq f(x) \leq 7$

3)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

4)Tracer Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g)

5) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x) = g(x)$

6) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x) > 0$

7) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $f(x) > g(x)$

8) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = m$ avec : $m \in \mathbb{R}$

Solution : $f(x) = -x^2 + 4x + 3$

1)a) f est une fonction polynôme donc : $D_f = \mathbb{R}$

Déterminons la forme canonique de $f(x)$ ($f(x) = a(x+\alpha)^2 + \beta$)

Méthode1 : $f(x) = -1\left(x^2 - 4x\right) + 3 = -1\left(x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2 - 2^2\right) + 3$

$f(x) = -1\left((x-2)^2 - 4\right) + 3 = -1(x-2)^2 + 4 + 3$

Donc : la forme canonique de $f(x)$ est $f(x) = -1(x-2)^2 + 7$ par suite : $\alpha = -2$; $\beta = 7$ et $a = -1$

Méthode2 : $\left(f(x) = ax^2 + bx + c\right)$ On a : $a = -1$ et $b = 4$ et $c = 3$

Donc $\alpha = \frac{b}{2a} = \frac{4}{2 \times (-1)} = -2$ et $\beta = f(-\alpha) = f(2) = -2^2 + 4 \times 2 + 3 = -4 + 8 + 3 = 7$

Donc : $f(x) = a(x+\alpha)^2 + \beta = -1(x-2)^2 + 7$

b) la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha; \beta)$; $W(2;7)$ et d'axe de symétrie la droite $x = -\alpha$. C'est-à-dire : $x = -1$

c)Le Tableau de variations de f : On a $a = -1 \prec 0$

Donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	7	$\searrow$

2)a) D'après le tableau de variation de f on a : $f(2) = 7$ est un maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) \leq f(2)$

Par suite : $f(x) \leq 7$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

b) Soit : $x \in \left[2; \frac{5}{2}\right]$ alors : $2 \leq x \leq \frac{5}{2}$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement décroissante sur $I = [2; +\infty[$

Par suite : f est strictement croissante sur $\left[2;\frac{5}{2}\right]$

Alors : $f\left(\frac{5}{2}\right)\leq f(x)\leq f(2)$ et comme : $f(2)=7$ et $f\left(\frac{5}{2}\right)=-\left(\frac{5}{2}\right)^2+4\times\frac{5}{2}+3=-\frac{25}{4}+10+3=13-\frac{25}{4}=\frac{27}{4}$

Par suite : $\frac{27}{4}\leq f(x)\leq 7$

b) Soit : $x\in[-1;2]$ On a alors : $-1\leq x\leq 2$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement croissante sur $J=]-\infty;2]$

Par suite : f est strictement croissante sur $[-1;2]$

Alors : $f(-1)\leq f(x)\leq f(2)$ et comme : $f(-1)=-(-1)^2+4\times(-1)+3=-2$ Et $f(2)=7$

Par suite : $-2\leq f(x)\leq 7$

3)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$.

$f(x)=0$ Signifie $-x^2+4x+3=0$

$\Delta=b^2-4ac=16-4\times(-1)\times 3=16+12=28>0$

$$x_1=\frac{-4+\sqrt{28}}{2\times(-1)}=\frac{-4+\sqrt{4\times 7}}{-2}=\frac{-4+2\sqrt{7}}{-2}=\frac{-2\left(2-\sqrt{7}\right)}{-2}=2-\sqrt{7}$$

$$x_2=\frac{-4-\sqrt{28}}{2\times(-1)}=\frac{-4-\sqrt{4\times 7}}{-2}=\frac{-4-2\sqrt{7}}{-2}=\frac{-2\left(2+\sqrt{7}\right)}{-2}=2+\sqrt{7}$$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$C\left(2-\sqrt{7};0\right)$ et $D\left(2+\sqrt{7};0\right)$

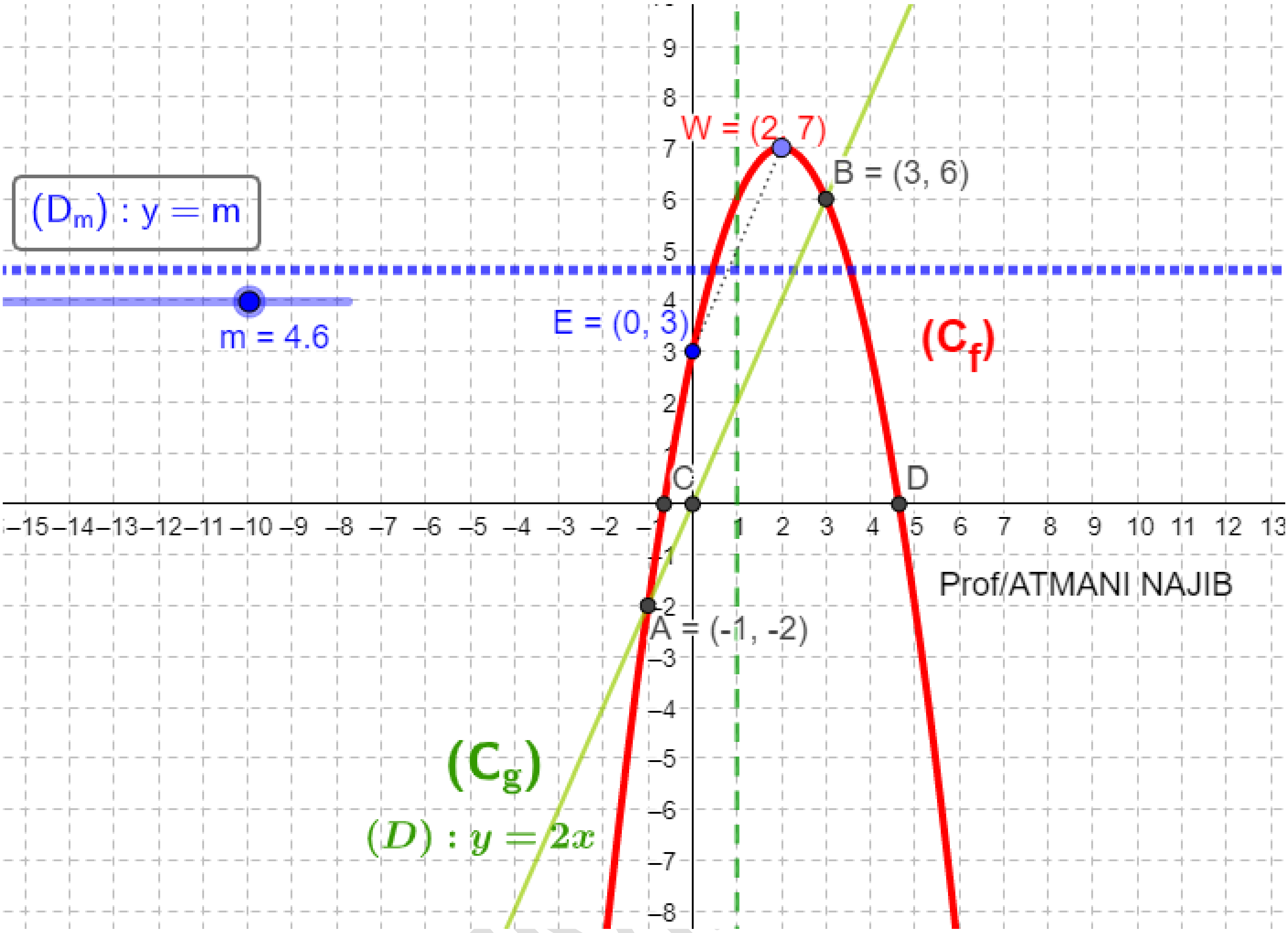
b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $f(0)=-0^2+4\times 0+3=3$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $E(0;3)$

4) Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) sont données dans le repère ci-dessous :



5) a) Résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x=-1$ et $x=3$ donc $S=\{-1;3\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ Signifie : $-x^2+4x+3=2x$ c'est-à-dire : $-x^2+2x+3=0$

$a=-1$; $b=2$ et $c=3$; $\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times(-1)\times 3=4+12=16>0$

Donc : $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

C'est-à-dire : $x_1=\dfrac{-2+\sqrt{16}}{2\times(-1)}=\dfrac{-2+4}{-2}=\dfrac{2}{-2}=-1$ et $x_2=\dfrac{-2-\sqrt{16}}{2\times(-1)}=\dfrac{-2-4}{-2}=\dfrac{-6}{-2}=3$

Donc : $S=\{-1;3\}$

6) a) Résolution graphique de l'inéquation $f(x)>0$:

La courbe (C_f) est au-dessus de (Ox) si $x\in\left]2-\sqrt{7};2+\sqrt{7}\right[$

Donc $S=\left]2-\sqrt{7};2+\sqrt{7}\right[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation $f(x)>0$:

$f(x)>0$ Signifie $-x^2+4x+3>0$

Les racines sont : $x_1=2-\sqrt{7}$ et $x_2=2+\sqrt{7}$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{7}$		$2+\sqrt{7}$		$+\infty$
$-x^2+4x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $S=\left]2-\sqrt{7};2+\sqrt{7}\right[$

7) a) Résolution graphique de l'inéquation $f(x)>g(x)$:

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in\left]-1;3\right[$

Donc $S=\left]-1;3\right[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation : $f(x)>g(x)$:

$f(x)>g(x)$ Signifie $-x^2+4x+3>2x$

C'est-à-dire : $-x^2+2x+3>0$

Les racines sont : $x_1=-1$ et $x_2=3$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $S=\left]-1;3\right[$

8) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $f(x)=m$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) et la droite : $y=m$

Si : $m>7$ l'équation n'admet pas de solution
Si : $m=7$ il y'a une solution c'est : x = 2
Si : $m<7$ il y'a deux solutions

Exercice 4 : (**) (***) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+3$ et (C_f) sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

A)1) Déterminer D_f

2) Mettre : $f(x)$ sous la forme canonique (déterminations de α et β tel que :

$f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$ pour tout $x\in\mathbb{R}$)

3) En déduire la nature de (C_g) et ses éléments caractéristiques

4) Déterminer le Tableau de variations de g

B) On considère la fonction numérique g tel que : $g(x)=\frac{1}{2}x^2-2|x|+3$ et (C_g) sa courbe représentative

1) Etudier la parité de g
2) que peut-on dire de la fonction f et de g sur $\mathbb{R}^+$
3) Dresser le Tableau de variations de g
4) Tracer les courbes représentative (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

5) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $g(x)=m$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Solution : A) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+3$

1)On a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

2) Méthode1 :

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+3=\frac{1}{2}(x^2-4x)+3=\frac{1}{2}\left((x-2)^2-4\right)+3=\frac{1}{2}(x-2)^2-2+3=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$$

Donc : $g(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ et si : $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$

Alors : $\alpha=-2$ et $\beta=1$ et $a=\frac{1}{2}$

Méthode2 : $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$ On a : $a=\frac{1}{2}$ et $b=-2$ et $c=3$

Donc : $\alpha=\frac{b}{2a}=\frac{-2}{2\times\left(\frac{1}{2}\right)}=-2$ et $\beta=f(-\alpha)=f(2)=\frac{1}{2}2^2-2\times2+3=1$

Donc : $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$

3) Donc dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta)$ c'est à dire $W(2;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\alpha$. C'est-à-dire : $x=2$

4)Tableau de variations de f

On a $a=\frac{1}{2}>0$ donc :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

B) $g(x)=\frac{1}{2}x^2-2|x|+3$

1) Etudions la parité de g

a) si $x\in\mathbb{R}$ alors $-x\in\mathbb{R}$

b) $g(-x)=\frac{1}{2}(-x)^2-2|-x|+3=\frac{1}{2}x^2-2|x|+3=g(x)$

Donc : g est une fonction paire

Graphiquement (C_g) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

2) Pour tout $x\in\mathbb{R}^+$: $g(x)=\frac{1}{2}x^2-2|x|+3=\frac{1}{2}x^2-2x+3=f(x)$ car $|x|=x$

Résultat : (C_g) et (C_f) coïncident sur $\mathbb{R}^+$

3) Tableau de variations de g :

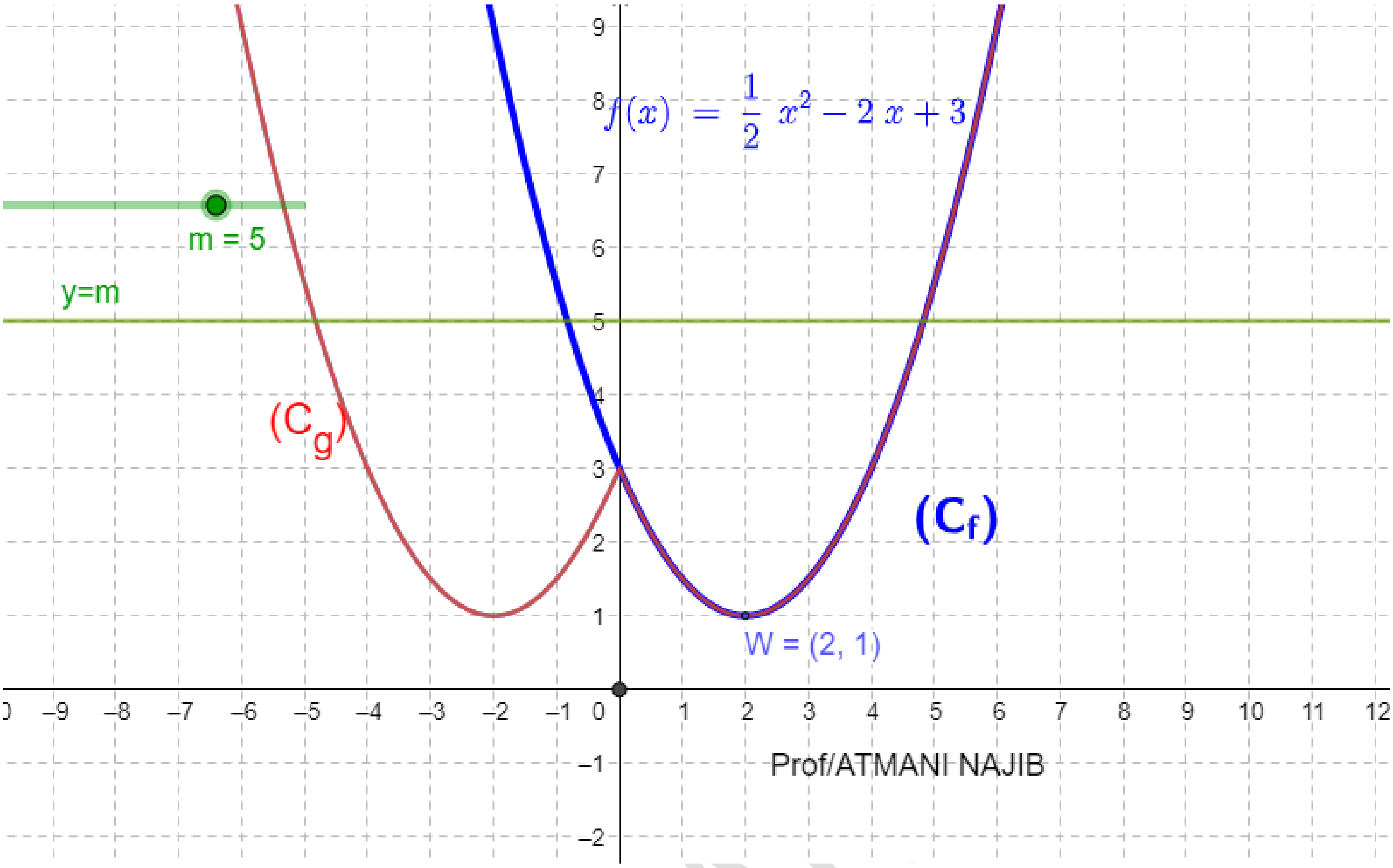
Du Tableau de variations de f et puisque g est paire on déduit le Tableau de variations de g :

t	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	

$g(0)=3$ et $g(-2)=1$ et $g(2)=1$

Puisque (C_g) et (C_f) coïncident sur $\mathbb{R}^+$ et (C_g) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

4)Alors on peut construire (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$



5) Résolution graphique de l'équation $m = g(x)$ avec $m \in \mathbb{R}$:

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_g) et la droite : $y = m$

Si: $m < 1$ il y'a pas de solution

Si: $m = 1$ il y'a deux solutions : 2 et -2

Si: $1 < m < 3$ il y'a une 4 solutions

Si: $m = 3$ il y'a trois solutions : 4 ;0 ;-4

Si: $m > 3$ il y'a deux solutions

Exercice 5 : (**) (***) Soient f et g les deux fonctions définies par : $f(x) = \frac{5x-11}{4x-4}$ et $g(x) = x^2 - 2x - 1$

(C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Déterminer D_f et D_g

2) a) Déterminer la nature de (C_g) et ses éléments caractéristiques.

b) Déterminer le tableau de variation de g

3) a) Déterminer la nature de (C_f) et ses éléments caractéristiques.

b) Déterminer le tableau de variation de f

4)a) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

b) Trouver les points d'intersections de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

5) a) Déterminer a ; b et c tel que : $x \in D_f$: $g(x) - f(x) = \frac{(x+1)(ax^2+bx+c)}{4x-4}$

b) Déterminer les points d'intersections de (C_f) et (C_g)

6)Tracer Les courbes représentatives (C_f)et (C_g)dans le même repère en précisant les points d'intersections

4)a) Résoudre graphiquement l'inéquation : $g(x) > f(x)$

b) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \times g(x) \geq 0$

7) Soit la fonction définie par : $h(x) = |g(x)|$

Tracer La courbes représentatives (C_h) de h dans le même repère $(o;\vec{i};\vec{j})$ (avec une autre couleur)

Solution :1) a) $f(x) = \frac{5x-11}{4x-4}$; on a $f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 4x-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

b) $g(x) = x^2 - 2x - 1$; g est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

2)a) On a : $g(x) = x^2 - 2x - 1$:

Méthode1 : $g(x) = x^2 - 2x - 1 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 1 = (x-1)^2 - 2 = 1(x-1)^2 - 2$

Donc : $g(x) = x^2 - 2x - 1 = 1(x-1)^2 - 2$ et $g(x) = a(x+\alpha)^2 + \beta$

Donc $\alpha = -1$ et $\beta = -2$ et $a = 1$

Méthode2 : $\left(g(x) = ax^2 + bx + c\right)$ On a : $a = 1$ et $b = -4$ et $c = -2$

Donc $\alpha = \frac{b}{2a} = \frac{-2}{2 \times 1} = -1$ et $\beta = f(-\alpha) = f(1) = (1)^2 - 2 \times (1) - 1 = -2$

Donc : $g(x) = a(x+\alpha)^2 + \beta = 1(x-1)^2 - 2$

la courbe (C_g) c'est une parabole de sommet $S(-\alpha;\beta)$; $S(1;-2)$ et d'axe de symétrie la droite $x = -\alpha$. C'est-à-dire : $x = 1$

b) Tableau de variations de g : On a $a = 1 > 0$ donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$

3)a) $f(x) = \frac{5x-11}{4x-4}$

En générale si : $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ et $c \neq 0$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $W\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x = -\frac{d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$

Dans notre exercice on a : $f(x)=\frac{5x-11}{4x-4}$ donc (C_f) est une hyperbole de centre $W\left(1;\frac{5}{4}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x=1$ et $y=\frac{5}{4}$

b) Tableau de variations de f :

$f(x)=\frac{5x-11}{4x-4}$ on a : $\Delta=\begin{vmatrix}5 & -11\\ 4 & -4\end{vmatrix}=-20+44=24\succ 0$

Donc : g est strictement croissante sur les intervalles : $]1\ ;\ +\infty[$ et $]-\infty\ ;\ 1[$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$	
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

4)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l''équation : $f(x)=0$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{5x-11}{4x-4}=0 \Leftrightarrow 5x-11=0 \Leftrightarrow x=\frac{11}{5}$

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses est : $C\left(\frac{11}{5};0\right)$

b) Les points d'intersections de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses :

$g(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x-1=0$ $\quad\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times(-1)=4+4=8>0$

$x_1=\frac{-(-2)+\sqrt{8}}{2\times1}=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$ et $x_2=\frac{-(-2)-\sqrt{8}}{2\times1}=\frac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$

Donc : les points d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses sont :

$A\left(1+\sqrt{2};0\right)$ et $B\left(1-\sqrt{2};0\right)$.

5) a) Soit $x\in D_f$: $g(x)-f(x)=x^2-2x-1-\frac{5x-11}{4x-4}=\frac{4x^3-12x^2-x+15}{4x-4}=\frac{(x+1)(4x^2-16x+15)}{4x-4}$

Donc : $a=4$; $b=-16$; $c=15$

b) Détermination des points d'intersections de (C_f) et (C_g) :

$M(x;y)\in(C_f)\cap(C_g) \Leftrightarrow f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$

$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(4x^2-16x+15)}{4x-4}=0 \Leftrightarrow (x+1)(4x^2-16x+15)=0 \Leftrightarrow 4x^2-16x+15=0$ ou $x=-1$

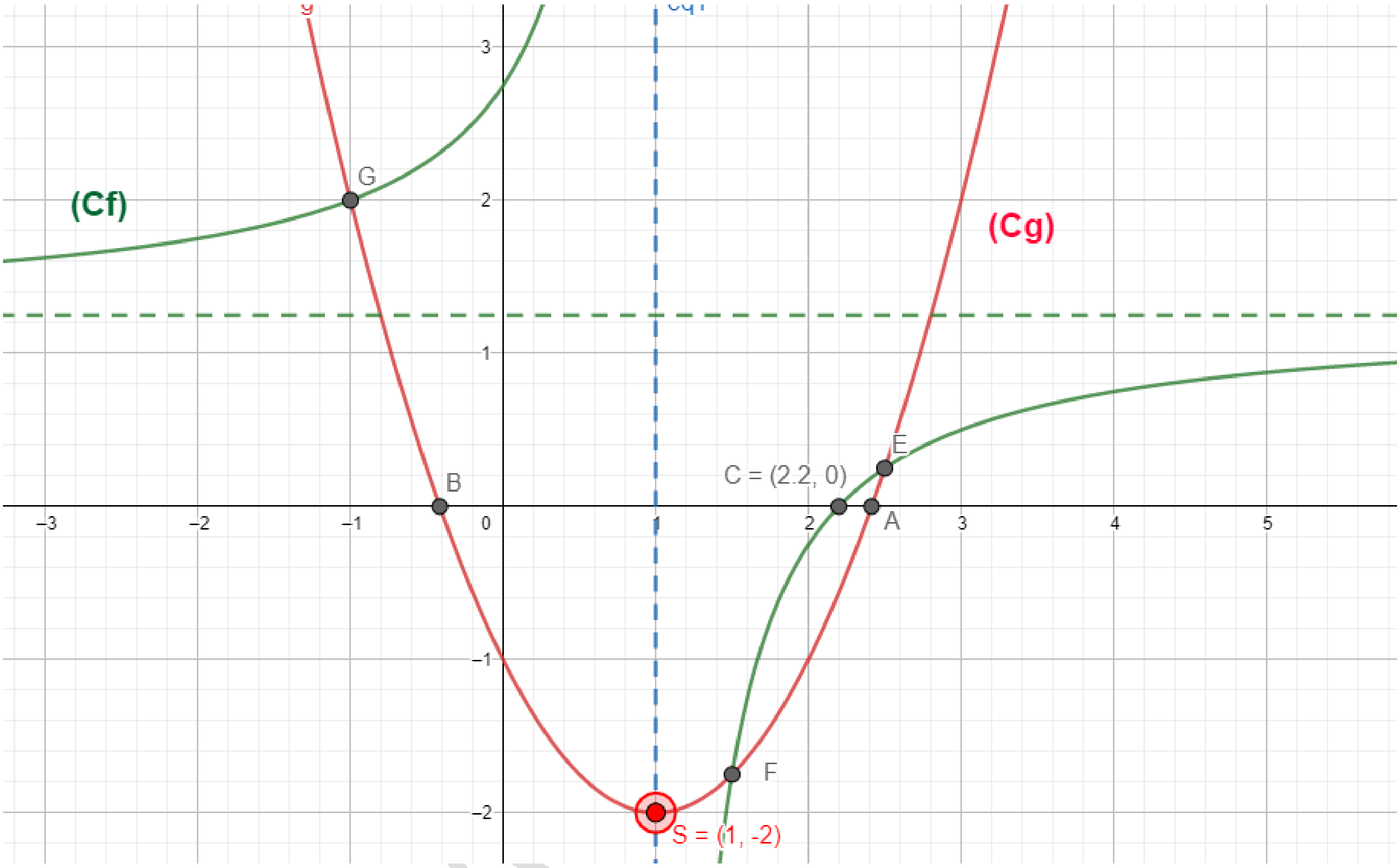
$\Delta=b^2-4ac=(-16)^2-4\times4\times15=16>0$

$x_1=\frac{-(-16)+\sqrt{16}}{2\times4}=\frac{16+4}{8}=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$ et $x_2=\frac{-(-16)-\sqrt{16}}{2\times4}=\frac{16-4}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

Donc : $(C_f)\cap(C_g)=\left\{E\left(\frac{5}{2};\frac{1}{4}\right);F\left(\frac{3}{2};-\frac{7}{4}\right);G(-1;2)\right\}$

6)Traçage des courbes (C_f) et (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$:

a) $f(x)=\frac{5x-11}{4x-4}$: (C_f) est l'hyperbole de centre $W\left(1;\frac{5}{4}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=1$ et $y=\frac{5}{4}$



4)a) Résolution graphique de l'inéquation : $g(x)\succ f(x)$

La courbe (C_g) est au-dessus de (C_f) si $x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

Donc : $S=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

4) b) Résolution graphique de l'inéquation : $f(x)\times g(x)\geq 0$

$f(x)\times g(x)\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq 0 \ et \ g(x)\geq 0$ ou $f(x)\leq 0 \ et \ g(x)\leq 0$

$f(x)\geq 0 \Leftrightarrow$ La courbe (C_f) est au-dessus de l'axe des abscisses $\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left[\frac{11}{5};+\infty\right[$

$g(x)\geq 0 \Leftrightarrow$ La courbe (C_g) est au-dessus de l'axe des abscisses $\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;1-\sqrt{2}\right]\cup\left[1+\sqrt{2};+\infty\right[$

$f(x)\geq 0 \ et\, g(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left(\left]-\infty;1\right[\cup\left[\frac{11}{5};+\infty\right[\right)\cap\left(\left]-\infty;1-\sqrt{2}\right]\cup\left[1+\sqrt{2};+\infty\right[\right)$

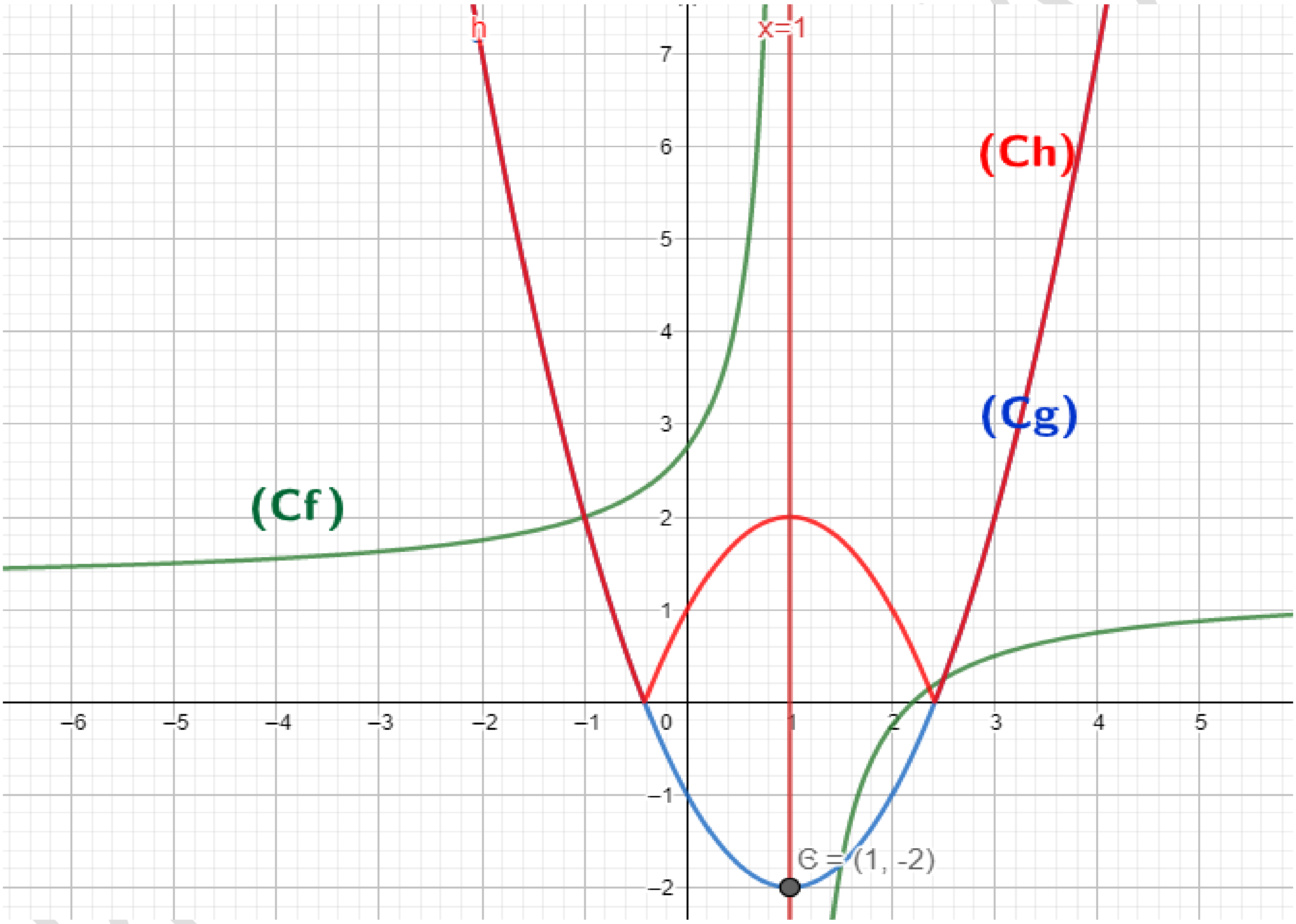
$f(x)\geq 0 \ et\, g(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;1-\sqrt{2}\right]\cup\left[1+\sqrt{2};1\right[$

De la même façon : $f(x)\le 0$ et $g(x)\le 0 \Leftrightarrow x\in\left[\frac{11}{5};+\infty\right[$

Donc : $f(x)\times g(x)\ge 0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;1-\sqrt{2}\right]\cup\left[\frac{11}{5};+\infty\right[\cup\left]1;1+\sqrt{2}\right]$

5) On a : $h(x)=|g(x)|$ donc : $\begin{cases} h(x)=g(x) & si\ g(x)\ge 0 \\ h(x)=-g(x) & si\ g(x)\le 0 \end{cases}$

Donc : Les courbes (C_h) et (C_g) sont confondues si $g(x)\ge 0$ c'est-à-dire : si La courbe (C_g) est au-dessus de l'axe des abscisses et Les courbes (C_h) et (C_g) sont symétriques si $g(x)\le 0$ C'est-à-dire : si La courbe (C_g) est au-dessous de l'axe des abscisses (voir figure)



Exercice 6 : (**) (***) Soit f une fonction numérique définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

1) Etudier le signe de $f(x)$

2) a) Démontrer que : $f(x)\le\frac{\sqrt{2}}{4}$ pour tout $x\in]1;+\infty[$

b) Est ce que $\frac{\sqrt{2}}{4}$ est une valeur maximale de f ?

Solution :1) Soit $x\in]1;+\infty[$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}$$

$$f(x)=\frac{x+1-2}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}$$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}\succ 0$ Donc : $f(x)\succ 0$ si $x\in]1;+\infty[$

2) a) $x\in]1;+\infty[$ Montrons que $f(x)\leq\frac{\sqrt{2}}{4}$

Soit $x\in]1;+\infty[$ donc $x>1$ cela implique que : $x+1\succ 2$

Donc $\sqrt{x+1}>\sqrt{2}$ alors : $\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\succ 2\sqrt{2}$

Donc $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}<\frac{1}{2\sqrt{2}}$ par suite : $f(x)<\frac{\sqrt{2}}{4}$ pour tout $x\in]1;+\infty[$

Alors : $f(x)<\frac{\sqrt{2}}{4}$ pour tout $x\in]1;+\infty[$

b) Puisque $f(x)\neq\frac{\sqrt{2}}{4}$ pour tout $x\in]1;+\infty[$ alors : $\frac{\sqrt{2}}{4}$ n'est pas une valeur maximale de f

Exercice 7 : (***) Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$

1) Déterminer D_f .

2) Démontrer que -1 est la valeur minimale de f .

3) Démontrer que : $f(x)<1$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$; et est-ce que 1 est une valeur maximale de f ?

Solution :1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\sqrt{x}+2\neq 0\ \ et\ \ x\geq 0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/\sqrt{x}\neq -2\ \ et\ \ x\geq 0\right\}$

Donc : $D_f=[0;+\infty[$

2) Montrons donc que : $f(x)\geq -1$ et que l'équation $f(x)=-1$ admet une solution dans $\mathbb{R}^+$

$$f(x)-(-1)=f(x)+1=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}+1=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\geq 0$$

Donc $f(x)\geq -1$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$

Et on a : $f(x)=-1\Leftrightarrow f(x)+1=0\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}=0\Leftrightarrow x=0$

Donc l'équation $f(x)=-1$ admet une solution dans $\mathbb{R}^+$

Et on a : $f(0)=-1$ donc : $f(x)\geq f(0)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$

Donc : $f(0)=-1$ est le minimum absolu de f sur $\mathbb{R}^+$

3) soit $x\in\mathbb{R}^+$ $f(x)-1=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}-1=\frac{-4}{\sqrt{x}+2}<0$

Donc $f(x)<1$. pour tout $x\in\mathbb{R}^+$

Et puisque $f(x)=1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^+$

Donc 1 n'est pas une valeur maximale de f

Exercice 8 : (***) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2-2x+3$

1)a) Démontrer que : $f(x)\geq 2\ \forall x\in\mathbb{R}$

b) Est ce que f admet une valeur minimale ?

2) Démontrer qu'il n'existe pas un réel $M\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)\leq M$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Solution : $D_f=\mathbb{R}$

1)a) $f(x)=x^2-2x+3=(x^2-2x+1)+2=(x-1)^2+2$

Donc $f(x)-2=(x-1)^2\geq 0$

Donc : $f(x)\geq 2\ \forall x\in\mathbb{R}$

Et on a : $f(1)=2$ donc : $f(x)\geq f(1)\ \forall x\in\mathbb{R}$

Donc f admet une valeur minimale c'est 2

2) Démontrons qu'il n'existe pas un réel $M\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)\leq M$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Supposons qu'il existe un réel $M\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)\leq M$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc : $(x-1)^2+2\leq M$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc : $(x-1)^2\leq M-2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc : $\sqrt{(x-1)^2}\leq\sqrt{M-2}$ (on peut toujours supposer $M\geq 2$) pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc : $|x-1|\leq\sqrt{M-2}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc on a : $-\sqrt{M-2}\leq x-1\leq\sqrt{M-2}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc on a : $-\sqrt{M-2}+1\leq x\leq\sqrt{M-2}+1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ absurde

Donc : il n'existe pas un réel $M\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)\leq M$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien