Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°9 : FONCTIONS - *Généralités*

Exercice 1 : (*) (**) Soit la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{4+x}\times\sqrt{6-x}$

1)a) Déterminer D_f

b) Calculer : $f(0)$; $f(-3)$

c) Déterminer les antécédents de 0 et 1 par f (s'ils existent)

4) On considère la fonction g définie par : $g(x)=\sqrt{-x^2+2x+24}$ Montrer que : $f=g$

Solution : 1) a) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/4+x\geq 0 \ \ et \ \ 6-x\geq 0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -4 \ \ et \ \ x\leq 6\}$ Donc $D_f=[-4,6]$

b) Calcul des images :

$f(0)=\sqrt{4+0}\times\sqrt{6-0}=\sqrt{4}\times\sqrt{6}=2\sqrt{6}$ et $f(-3)=\sqrt{4-3}\times\sqrt{6+3}=\sqrt{1}\times\sqrt{9}=3$

c)

• x est l'antécédents de 0 par f signifie que 0 est l'image de x par f .

Équivaut à: chercher les réels x tels que : $f(x)=0$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$

Équivaut à : $\sqrt{4+x}\times\sqrt{6-x}=0$

Équivaut à : $\sqrt{4+x}=0$ ou $\sqrt{6-x}=0$

Équivaut à : $4+x=0$ ou $6-x=0$

Équivaut à : $x=-4$ ou $x=6$

Finalement les antécédents de 0 par f sont : -4 et 6 .

• x est l'antécédents de 1 par f signifie que 1 est l'image de x par f .

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=1$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=1$

Équivaut à : $\sqrt{4+x}\times\sqrt{6-x}=0$

Équivaut à : $(4+x)(6-x)=1$

Équivaut à : $24-4x+6x-x^2=1$

Équivaut à : $-x^2+2x+23=0$

$\Delta=b^2-4ac=4+4\times(-23)=4+92=96>0$

$x_1=\dfrac{-2+\sqrt{96}}{2\times -1}=\dfrac{2-\sqrt{96}}{2}$ et $x_1=\dfrac{-2-\sqrt{96}}{2\times -1}=\dfrac{2+\sqrt{96}}{2}$

Finalement les antécédents de 1 par f sont : $\dfrac{2-\sqrt{96}}{2}$ et $\dfrac{2+\sqrt{96}}{2}$

4) On considère la fonction g définie par : $g(x)=\sqrt{-x^2+2x+24}$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}/-x^2+2x+24\geq 0\}$

Soit Δ son discriminant : $\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times 24\times -1=4+96=100>0$

$x_1=\frac{-2+\sqrt{100}}{2\times -1}=\frac{8}{-2}=-4$ et $x_2=\frac{-2-\sqrt{100}}{2\times -1}=\frac{-12}{-2}=6$

x	$-\infty$		-4		6		$+\infty$
$-x^2+2x+24$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $D_g=[-4,6]$

On a donc : $D_f=D_g$.

$f(x)=\sqrt{4+x}\times\sqrt{6-x}=\sqrt{(4+x)(6-x)}=\sqrt{-x^2+2x+24}=g(x)$

Conclusion : $f=g$

Exercice 2 : (*) (**) (***) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+1}{1-x^2}}$ 2) $f(x)=\frac{\sqrt{2x^2-4x+6}}{2x-1}$ 3) $f(x)=\frac{\sqrt{4x^2-8x+3}}{x-3}$

4) $f(x)=\frac{x^2-5x+1}{\sqrt{4x^4+4x^2-3}}$ 5) $f(x)=\sqrt{\frac{2x^2-3x+1}{x^2-5}}$ 6) $f(x)=\sqrt{\frac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}}$

Solution : 1) $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+1}{1-x^2}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{x^2+1}{1-x^2}\geq 0 \;\; et \;\; 1-x^2\neq 0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{x^2+1}{1-x^2}\geq 0 \;\; et \;\; x^2\neq 1\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{x^2+1}{1-x^2}\geq 0 \;\; et \;\; x\neq 1 \; et \;\; x\neq -1\right\}$

Déterminons le signe de l'expression suivante : $F(x)=\frac{x^2+1}{1-x^2}$

Le numérateur est positif pour tout x, et le dénominateur est un trinôme du second degré de racines −1 et 1, on peut donc dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2+1		$+$		$+$		$+$	
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$F(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	

Donc : $D_f=]-1,1[$

2) $f(x)=\frac{\sqrt{2x^2-4x+6}}{2x-1}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-4x+6\geq 0 \;\; et \;\; 2x-1\neq 0\}$

Calculons le discriminant : a = 2, b = -4 et c = 6 donc : $\Delta=b^2-4ac=16-48=-32<0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$2x^2-4x+6$		$+$	

Par suite : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/ \;\; 2x-1\neq 0\}$

Donc : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq\frac{1}{2}\right\}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

3) $f(x)=\frac{\sqrt{4x^2-8x+3}}{x-3}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}/4x^2-8x+3\geq 0 \;\; et \;\; x-3\neq 0\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 4x^2 - 8x + 3 \geq 0 \quad et \quad x \neq 3 \}$

Étudions le signe du trinôme : $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4\times4\times3 = 64 - 48 = 16 > 0$

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{8+4}{2\times4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{8-4}{8} = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x^2-8x+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[- \{3\}$

Par suite : $D_f = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; 3\right[\cup \left]3; +\infty\right[$

4) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{\sqrt{4x^4 + 4x^2 - 3}}$; $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 4x^4 + 4x^2 - 3 > 0 \}$

a) D'abord on va trouver les racines de $4x^4 + 4x^2 - 3$

C'est un polynôme bicarré, c'est à dire que l'inconnue est à la puissance 4, 2 et 0.

Je pose donc $X = x^2$ et je me ramène à un trinôme dont l'inconnue est X.

$4x^4 + 4x^2 - 3$ Équivaut à : $4(x^2)^2 + 4x^2 - 3$

Je pose : $X = x^2$ polynôme devient : $4X^2 + 4X - 3$

Le discriminant de : $4X^2 + 4X - 3$ est : $\Delta = 4^2 - 4\times4\times(-3) = 16 + 48 = 64 > 0$ et ses racines sont :

$X_1 = \frac{-4-\sqrt{64}}{2\times4} = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}$ et $X_2 = \frac{-4+\sqrt{64}}{2\times4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Déterminons une factorisation de $4x^4 + 4x^2 - 3$.

On a : $4X^2 + 4X - 3 = 4\left(X + \frac{3}{2}\right)\left(X - \frac{1}{2}\right) = (2X+3)(2X-1)$

Donc : $4x^4 + 4x^2 - 3 = (2x^2+3)(2x^2-1)$ et $2x^2 + 3 > 0$

$4x^4 + 4x^2 - 3 \geq 0$ Équivaut à : $2x^2 - 1 \geq 0$

$2x^2 - 1 = 0$ Signifie que : $x^2 = \frac{1}{2}$ Signifie que : $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

On peut donc dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}/2$		$\sqrt{2}/2$		$+\infty$
$p(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$4x^4 + 4x^2 - 3 \geq 0$ Équivaut à : $x \in \left]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$

Ainsi : $D_f == \left]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$

5) $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 5}}$; $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 5} \geq 0 \quad et \quad x^2 - 5 \neq 0 \right\}$

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{2x^2-3x+1}{x^2-5} \geq 0 \ \ et \ \ x \neq -\sqrt{5} \ \ et \ \ x \neq \sqrt{5} \right\}$

$2x^2-3x+1=0$: $\Delta = 1 > 0$ donc $2x^2-3x+1=0$ admet deux solutions Distinctes $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{1}{2}$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$1/2$		1		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$2x^2-3x+1$		+	|	+	0	−	0	+	|	+	
x^2-5		+	0	−	|	−	|	−	0	+	
$q(x)$		+	||	−	0	+	0	−	||	+	

Par suite : $D_f = \left]-\infty; -\sqrt{5}\right[\cup \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup \left]\sqrt{5}, +\infty\right[$

6) $f(x) = \sqrt{\frac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}}$; $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17} \geq 0 \ \ et \ -x^2+8x-17 \neq 0 \right\}$

- $-x^2+8x-17$: Calculons son discriminant : $a=-1$; $b=8$; $c=-17$

Donc : $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = 8^2 - 4 \times (-1) \times (-17) = 64 - 68 = -4 < 0$

Ce polynôme ne possède donc pas de racines réelles

Comme : Le coefficient principal est : $a=-1<0$ et $\Delta < 0$, alors : $-x^2+8x-17<0$

- Pour déterminer le signe du trinôme : $-6x^2-9x-3$

Calculons son discriminant : $a=-6$; $b=-9$; $c=-3$

Donc : $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = (-9)^2 - 4 \times (-6) \times (-3) = 81 - 72 = 9 > 0$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1 = \frac{9-\sqrt{9}}{2a} = \frac{9-3}{2\times(-6)} = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{9+\sqrt{9}}{2a} = \frac{9+3}{2\times(-6)} = \frac{12}{-12} = -1$

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$C(x)$		−	0	+	0	−	
$D(x)$		−	⋮	−	⋮	−	
$\frac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}$		+	0	−	0	+	

Par suite : $D_f = \left]-\infty; -1\right] \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

Exercice 3 : (**) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = x^2+3x+1$

1) Préciser le domaine de définition de f

2) Montrer que f est strictement croissante sur $\left[\frac{-3}{2}; +\infty\right[$ et strictement décroissante sur $\left]-\infty; \frac{-3}{2}\right]$

3) Dresser le tableau de variation de f

4) a) En déduire que : pour tout $x \in [-1;3]$ on a : $-1 \leq f(x) \leq 19$

b) En déduire que : pour tout $x \in [-5;-2]$ on a : $-1 \leq f(x) \leq 11$

Solution : 1) f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

2) soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(x_1^2+3x_1+1)-(x_2^2+3x_2+1)}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{x_1^2-x_2^2+3(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2+3)}{x_1-x_2}$$

Donc : $T(x_1;x_2)=x_1+x_2+3$ par suite :

Si : $x_1\in\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[$ et $x_2\in\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[$

Alors $x_1\geq\frac{-3}{2}$ et $x_2\geq\frac{-3}{2}$ et $x_1\neq x_2$ ce qui donne : $x_1+x_2\succ-3$

Donc $x_1+x_2+3\succ0$ par suite : $T(x_1;x_2)\succ0$

D'où : f est strictement croissante sur $\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[$

Si : $x_1\in\left]-\infty;\frac{-3}{2}\right]$ et $x_2\in\left]-\infty;\frac{-3}{2}\right]$

Alors : $x_1\leq\frac{-3}{2}$ et $x_2\leq\frac{-3}{2}$ et $x_1\neq x_2$ cela implique $x_1+x_2\prec-3$

Donc $x_1+x_2+3\prec0$ par suite : $T(x_1;x_2)\prec0$

D'où : f est strictement décroissante sur $\left]-\infty;\frac{-3}{2}\right]$

4) <u>Résumé</u> : tableau de variation : On a : $f\left(\frac{-3}{2}\right)=\left(\frac{-3}{2}\right)^2+3\left(\frac{-3}{2}\right)+1=\frac{-5}{4}$

Donc :

x	$-\infty$	$\frac{-3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{-5}{4}$	$\nearrow$

5) a) Puisque f est strictement croissante sur $\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[$ alors f est strictement croissante sur $[-1;3]$

Car : $[-1;3]\subset\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[$

Si on a $x\in[-1;3]$ alors : $f(-1)\leq f(x)\leq f(3)$ (f est strictement croissante)

On a : $f(-1)=(-1)^2+3(-1)+1=1-3+1=-1$ et $f(3)=3^2+3\times3+1=9+9+1=19$

Par suite : $-1\leq f(x)\leq19$ si $x\in[-1;3]$

b) Puisque f est strictement décroissante sur $\left]-\infty;\frac{-3}{2}\right]$ alors f est strictement croissante sur

$x\in[-5;-2]$ Car : $[-5;-2]\subset\left]-\infty;\frac{-3}{2}\right]$

Si on a $x\in[-5;-2]$ alors : $f(-2)\leq f(x)\leq f(-5)$ (f est strictement décroissante)

On a : $f(-2)=(-2)^2+3(-2)+1=4-6+1=-1$ et $f(-5)=(-5)^2+3(-5)+1=25-15+1=11$

Par suite : $-1\leq f(x)\leq11$ si $x\in[-5;-2]$

Exercice 4 : (***) Soient f et g les deux fonctions définies par : $f(x)=x^2-2x-1$ et $g(x)=2x-4$

1) Déterminer D_f

2) Ecrire $f(x)$ sous la forme canonique : $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$ (déterminer a; α et β)

3) En déduire la nature de (C_f) et ses éléments caractéristiques

4) Déterminer le Tableau de variations de f

5)Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g)

6)Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation $f(x)=g(x)$

7)Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation $f(x)>g(x)$

8)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f)avec les axes du repère

Solution : 1) On a : $f(x)=x^2-2x-1$: f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

2) Méthode1 : $f(x)=x^2-2x-1=x^2-2x+1-1-1=(x-1)^2-2=1(x-1)^2-2$

Donc : $f(x)=x^2-2x-1=1(x-1)^2-2$ et $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$

Donc $\alpha=-1$ et $\beta=-2$ et $a=1$

Méthode2 : $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$ On a : $a=1$ et $b=-4$ et $c=-2$

Donc $\alpha=\frac{b}{2a}=\frac{-2}{2\times1}=-1$ et $\beta=f(-\alpha)=f(1)=(1)^2-2\times(1)-1=-2$

Donc : $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta=1(x-1)^2-2$

3) la courbe(C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta)$;$W(1;-2)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\alpha$. C'est-à-dire : $x=1$

4)<u>Tableau de variations de f : On a</u> $a=1>0$ donc :

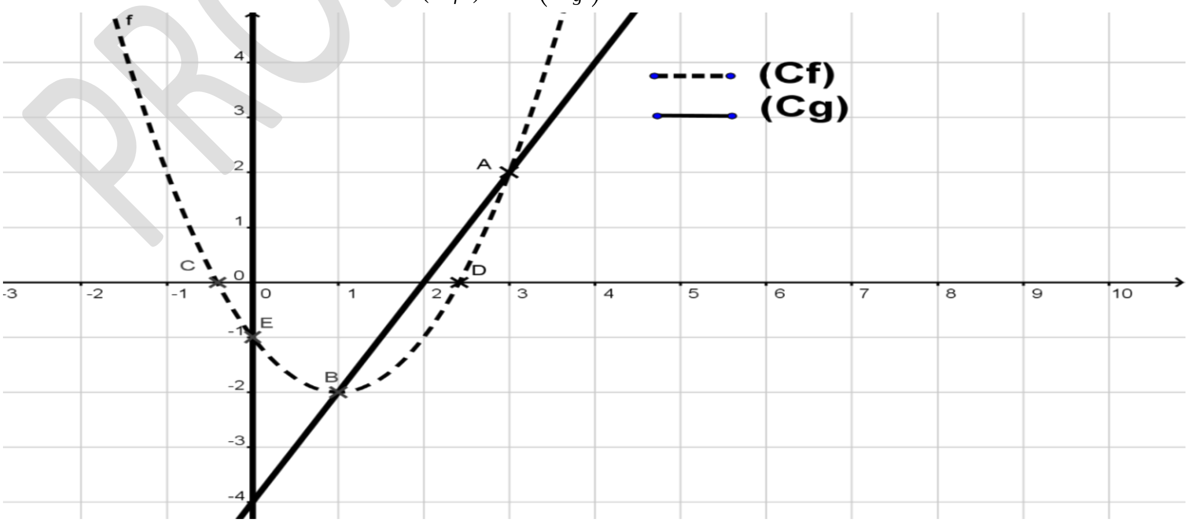
x	$-\infty$ $\quad -1 \quad$ $+\infty$
$f(x)$	$\searrow$ $\quad -2 \quad$ $\nearrow$

3) $g(x)=2x-4$

g est une fonction affine donc la courbe (C_f)de f est une droite(D) :

$g(0)=2\times0-4=-4$ Alors $(0;-4)\in(D)$ et $g(1)=2\times1-4=-2$ alors $(1;-2)\in(D)$

Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) sont données dans le repère ci-dessous :



2) a) Résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x=1$ et $x=3$ donc $S=\{1;3\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ Signifie : $x^2-2x-1=2x-4$ c'est-à-dire : $x^2-4x+3=0$

$a=1$ et $b=-4$ et $c=+3$; $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times3=16-12=4>0$

Donc : $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

C'est-à-dire : $x_1=\dfrac{-(-4)+\sqrt{4}}{2\times1}=\dfrac{4+2}{2}=\dfrac{6}{2}=3$ et $x_2=\dfrac{-(-4)-\sqrt{4}}{2\times1}=\dfrac{4-2}{2}=\dfrac{2}{2}=1$

Donc $S=\{1;3\}$

3) a) Résolution graphique de l'inéquation $f(x)>g(x)$

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left]3;+\infty\right[$

Donc $S=\left]-\infty;1\right[\cup\left]3;+\infty\right[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation $f(x)>g(x)$

$f(x)>g(x)$ Signifie $x^2-2x-1>2x-4$ c'est-à-dire : $x^2-4x+3>0$

Les racines sont : $x_1=3$ et $x_2=1$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S=\left]-\infty;1\right[\cup\left]3;+\infty\right[$

4)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l''équation $f(x)=0$

$f(x)=0$ Signifie $x^2-2x-1=0$; $a=1$ et $b=-2$; $c=-1$; $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times(-1)=4+4=8=\left(2\sqrt{2}\right)^2>0$

$x_1=\dfrac{-(-2)+2\sqrt{2}}{2\times1}=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$ et $x_2=\dfrac{-(-2)-2\sqrt{2}}{2\times1}=\dfrac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$C\left(1-\sqrt{2};0\right)$ et $D\left(1+\sqrt{2};0\right)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $f(0)=0^2-2\times0-1=-1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $E(0;-1)$

Exercice 5 : (***) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x|x|-4x+3$

1)a) Montrer que $f(x)=(x-2)^2-1$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$

b) Montrer que $f(x)=-(x+2)^2+7$ pour tout $x\in\mathbb{R}^-$

2) Tracer la courbe représentative (C_f) de f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

3) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation :

$-x|x|+4x-3+m=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Solution : 1) a) Soit : $x \in \mathbb{R}^+$ alors : $|x| = x$

Donc : $f(x) = x^2 - 4x + 3 = x^2 - 2x \times 2 + 2^2 - 2^2 + 3 = (x-2)^2 - 4 + 3 = (x-2)^2 - 1$

Par suite : $f(x) = (x-2)^2 - 1$

1)b) Soit : $x \in \mathbb{R}^-$ alors : $|x| = -x$

Donc : $f(x) = -x^2 - 4x + 3 = -(x^2 + 4x) + 3 = -(x^2 + 4x + 4 - 4) + 3$

Donc : $f(x) = -\left((x+2)^2 - 4\right) + 3$ c'est-à-dire : $f(x) = -(x+2)^2 + 4 + 3$

Par suite : $f(x) = -(x+2)^2 + 7$

2) ☞ sur $\mathbb{R}^+$: on a ; $f(x) = (x-2)^2 - 1 = a(x+\alpha)^2 + \beta$

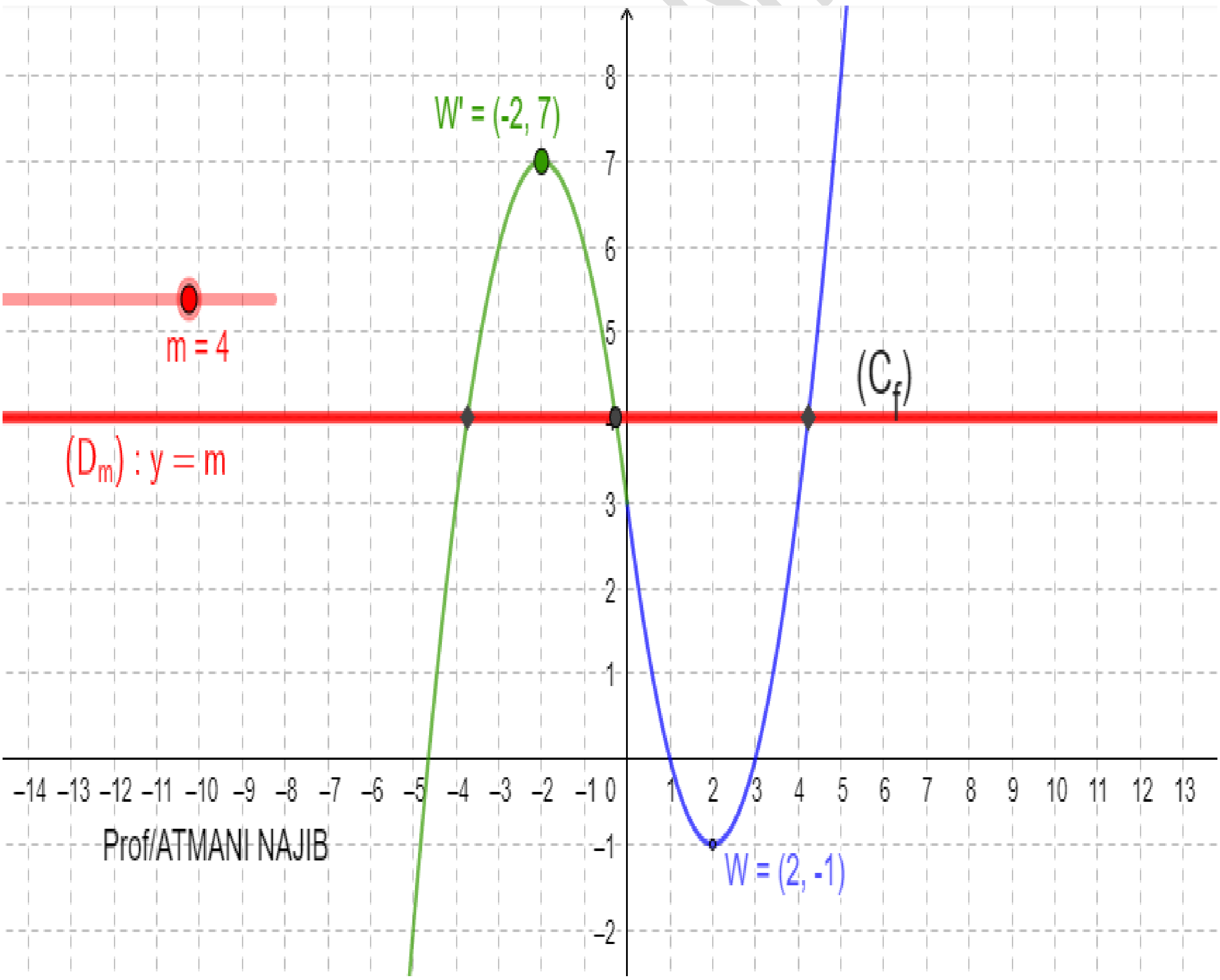
Donc $\alpha = -2$ et $\beta = -1$

La courbe (C_f) est une partie d'une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta)$; $W(2;-1)$ et d'axe de symétrie la droite $x = -\alpha$. C'est-à-dire : $x = 2$

☞ Sur $\mathbb{R}^-$: on a ; $f(x) = -(x+2)^2 + 7 = a(x+\alpha)^2 + \beta$

Donc $\alpha = 2$ et $\beta = 7$

La courbe (C_f) est une partie d'une parabole de sommet $W'(-\alpha;\beta)$; $W'(-2;7)$ et d'axe de symétrie la droite $x = -\alpha$. C'est-à-dire : $x = -2$



3) Résolution graphique de l'équation $-x|x|+4x-3+m=0$ avec $m\in\mathbb{R}$:

$-x|x|+4x-3+m=0$ Signifie $m=x|x|-4x+3$

Signifie : $m=f(x)$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) et la droite : $y=m$

Si : $m>7$ ou $m<-1$ il y'a une solution
Si : $m=7$ ou $m=-1$ il y'a deux solutions
Si : $-1<m<7$ il y'a une trois solutions

Exercice 6 : (*) (**) **Partie A** : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2+2x-2$

(C_f) Sa courbe représentative

1) Déterminer D_f

2) Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$ (déterminer a; α et β)

3) En déduire la nature de (C_f) et ses éléments caractéristiques

4) Dresser le Tableau de variations de f

5) Tracer la courbe représentative (C_f) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Partie B : Soit g une fonction numérique tel que : $g(x)=\frac{2x+3}{x+1}$ (C_g) Sa courbe représentative

1) Déterminer D_g

2) Ecrire $g(x)$ sous la forme : $g(x)=\beta+\frac{k}{x+\alpha}$ (déterminer α et β et k)

3) En déduire la nature de (C_g) et ses éléments caractéristiques

4) Dresser le Tableau de variations de f

5) Tracer la courbe représentative (C_g) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

6) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)<g(x)$

(On admet que (C_g) coupe (C_f) en 3 points d'abscisse : $-3,2$; $-1,2$; $1,2$

Solution : Partie A :1) On a : f est une fonction polynôme ; donc : $D_f=\mathbb{R}$

2) Méthode1 : $f(x)=(x^2+2x)-2=(x^2+2x+1^2-1^2)-2=((x+1)^2-1)-2=(x+1)^2-3$

Donc : $f(x)=(x+1)^2-3$ Donc $\alpha=1$ et $\beta=-3$ et $a=1$

Méthode2 : $(f(x)=ax^2+bx+c)$ On a : $a=1$ et $b=2$ et $c=-2$

Donc $\alpha=\frac{b}{2a}=\frac{2}{2\times 1}=1$ et $\beta=f(-\alpha)=f(-1)=(-1)^2+2\times(-1)-2=-3$

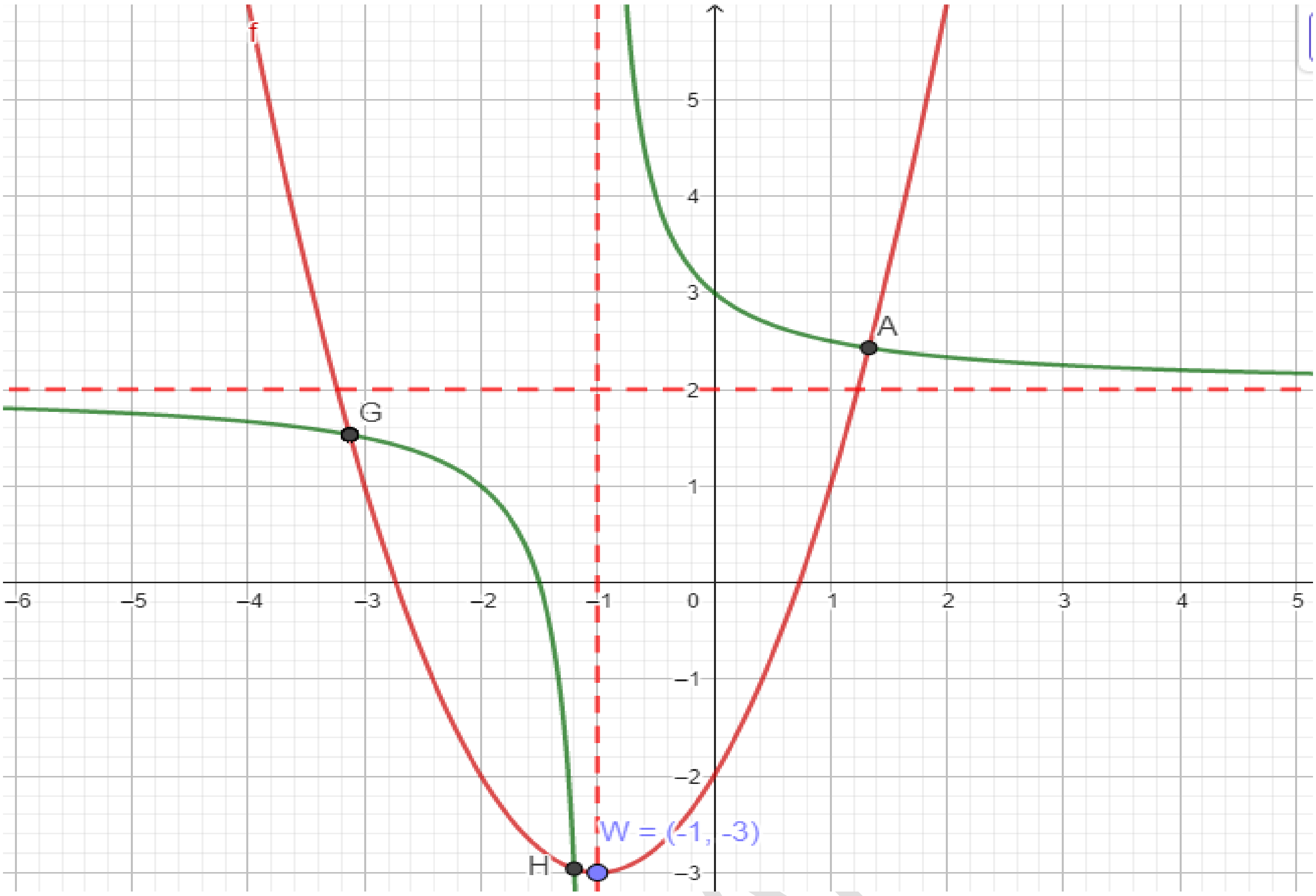
Donc : $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta=1(x+1)^2-3$

3) la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta)$; $W(-1;-3)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

4)Tableau de variations de f : On a $a=1>0$ donc :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$

3)



Partie B :1) Soit g une fonction numérique : $g(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}/x+1\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\neq -1\}$; Donc $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$

2) Si $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ on a : la division euclidienne de : $2x+3$ *par* $x+1$ donne : $2x+3=2(x+1)+1$

$g(x)=\dfrac{2(x+1)+1}{x+1}=2+\dfrac{1}{x+1}$ et $g(x)=\beta+\dfrac{k}{x+\alpha}$

Donc : $\alpha=1$ et $\beta=2$ et $k=1>0$

3) Donc : (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(-\alpha;\beta)$; $\Omega(-1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=-1$ et $y=2$

4) Le tableau de variations de g: $k=1>0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g	$\searrow$	‖	$\searrow$

5) Voir partie1

x	-1	0	1	2
g(x)		3	5/2	7 /3

6)Résolution graphique de l'inéquation : $f(x)<g(x)$

(On admet que (C_g) coupe (C_f) en 3 points d'abscisse : $-1,2$; $-3,2$; $1,2$

(C_g) est au-dessus de (C_f) si $x\in]-3,2;-1,2[\cup]-1;1,2[$

Donc : $S=]-3,2;-1,2[\cup]-1;1,2[$

Exercice 7 : (***) Soit f une fonction tel que : $f(x)=\frac{x}{|x|-2}$

(C_f) Sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer D_f

2) Montrer que : f est impaire

3)a) Montrer que la courbe représentative de f sur $D_f\cap\mathbb{R}^+$ est une portion d'une hyperbole que l'on précisera

b) En déduire une méthode pour tracer la courbe (C_g) de fonction g

4)Etudier les variations de de f sur $D_f\cap\mathbb{R}^+$ puis donner le tableau de variation de f sur D_f

5) Construire (C_f) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Solution : $f(x)=\frac{x}{|x|-2}$

1)On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie $|x|-2\neq 0$

Signifie $|x|\neq 2$ c'est-à-dire : $x\neq 2$ et $x\neq -2$

Par suite : $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

2)a) Montrons que f est impaire :

☞ $x\in D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$ Signifie $x\neq 2$ et $x\neq -2$

Signifie $-x\neq -2$ et $-x\neq -(-1)$

Signifie $-x\neq -1$ et $-x\neq 2$

Signifie $-x\in D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

☞ $f(-x)=\frac{-x}{|-x|-2}=\frac{-x}{|x|-2}$ car $|-x|=|x|$

Donc : $f(-x)=-\frac{x}{|x|-2}=-f(x)$ par suite : f est impaire

3)a) Soit : $x\in D_f\cap\mathbb{R}^+$ donc : $x\geq 0$

Donc : $|x|=x$ par suite : $f(x)=\frac{x}{|x|-2}=\frac{x}{x-2}$

Et puisque f est impaire alors il suffit de tracer son symétrique par rapport au centre du repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Soit $x\in[0;2[\cup]2;+\infty[$ on a : $f(x)=\frac{x}{x-2}=\frac{x-2+2}{x-2}=\frac{x-2}{x-2}+\frac{2}{x-2}=1+\frac{2}{x-2}$

Donc : $f(x)=1+\frac{2}{x-2}$ Pour tout $x\in[0;2[\cup]2;+\infty[$

Puisque : $f(x)=\beta+\frac{k}{x+\alpha}$ Alors : $\alpha=-2$ et $\beta=1$ et $k=1>0$

Donc : sur $[0;2[\cup]2;+\infty[$ (C_f) est une portion d'une hyperbole de centre $W(-\alpha;\beta)$; $W(2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=2$ et $y=1$

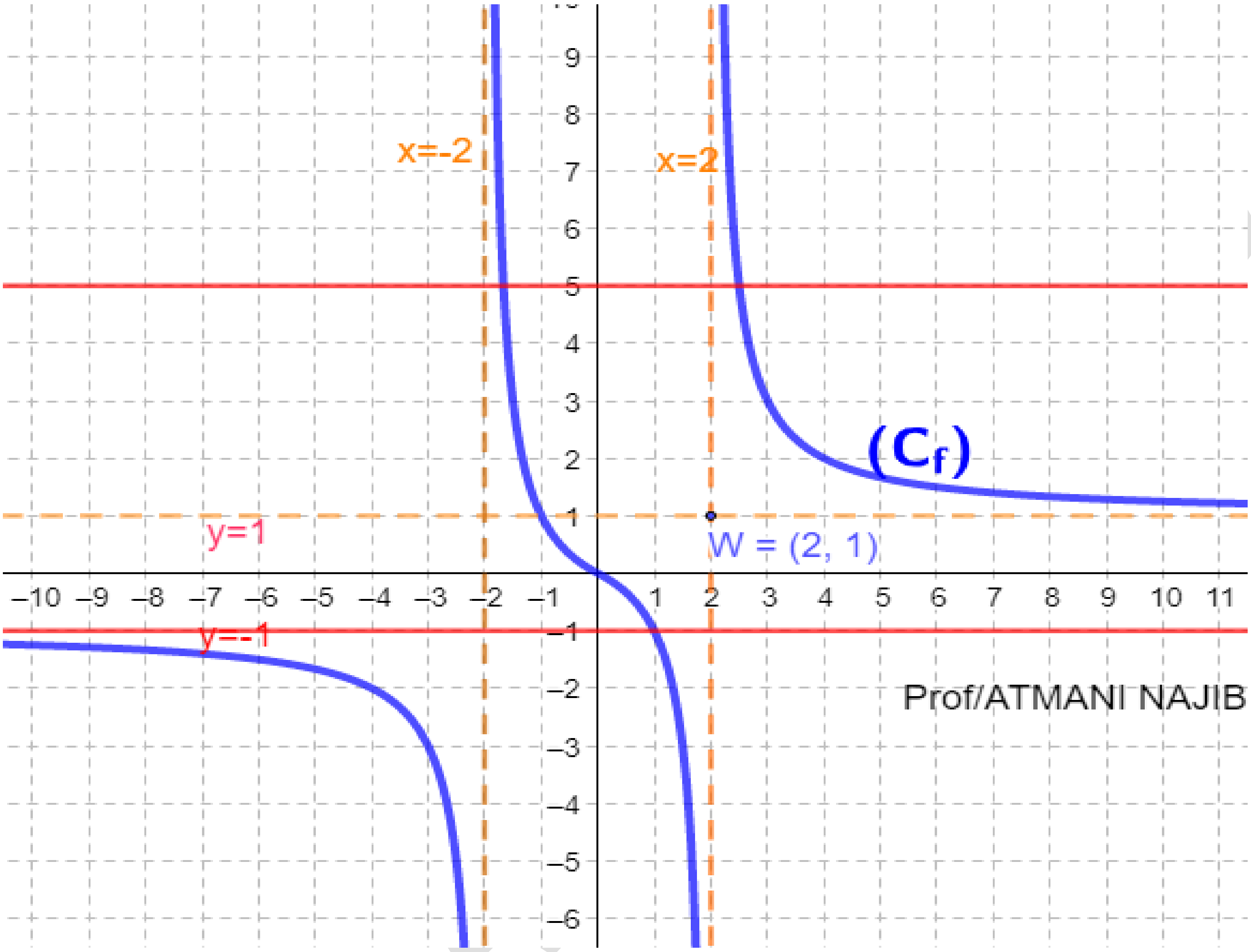
b) la courbe (C_f) de fonction f sur $[0;2[\cup]2;+\infty[$ coïncide avec la portion de l'hyperbole de centre $W(-\alpha;\beta)$; $W(2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=2$ et $y=1$

4)Puisque : $k=1>0$ alors f est strictement décroissante sur $[0;2[$ et $]2;+\infty[$

Puisque f est impaire alors en déduit le tableau de variation de f sur D_f

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	‖	$\searrow$	0	$\searrow$	‖	$\searrow$

5) Construction de (C_f) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$



C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien