

Exercice 01

Comparer  $a$  et  $b$  dans les cas suivants :

$$a = 1 + 3\sqrt{2} ; b = 3\sqrt{2}$$

$$a = -5\sqrt{3} ; b = -6\sqrt{2}$$

$$a = \sqrt{4x^2 + 1} ; b = 2x + 1 \quad (x \in \mathbb{N})$$

$$a = \frac{x}{x+1} ; b = \frac{y}{y+1} \quad (0 < x < y)$$

$$a = \sqrt{x-y} ; b = \sqrt{x} - \sqrt{y} \quad (0 < y < x)$$

$$a = \frac{7x+2y}{7x} ; b = \frac{8y}{7x+2y} \quad (x \in \mathbb{R}_+^* ; y \in \mathbb{R}_+^*)$$

Exercice 02

1) Soient  $A = 3\sqrt{18} - \sqrt{72} ; B = \sqrt{28} + \sqrt{32} - 2\sqrt{2}$

a) Montrer que  $A - B = \sqrt{2} - 2\sqrt{7}$

b) Comparer  $A$  et  $b$

2) On pose  $x = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$  et  $y = \sqrt{39 - 12\sqrt{10}}$

a) Montrer que  $x \geq 0$

b) Calculer  $x^2$  et  $y^2$

c) Comparer  $\frac{1}{x}$  et  $\frac{1}{y}$

3) Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$  avec  $a \geq 2$  et  $b \geq 2$

On pose  $X = \sqrt{a} + \sqrt{b}$  et  $Y = \sqrt{ab} + 1$

a) Montrer que  $X^2 - Y^2 = (a-1)(1-b)$

b) Comparer  $X$  et  $Y$

Exercice 03

Soient  $a, b$  et  $c$  des nombres réels.

On pose  $A = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$

1) Montrer que  $2A = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2$

2) En déduire que  $ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2$

3) Soient  $x$  et  $y$  deux nombres strictement positifs tels que

$$x^2 + y^2 = 2$$

a) Montrer que  $(x+y)^2 = 2(1+xy)$

b) En déduire que  $x+y > \sqrt{2}$

Exercice 04

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $3 \leq a \leq 9$  et  $2 \leq b \leq 7$  Encadrer

les expressions suivantes :  $a+b ; a-b ; a \times b ; 2a+3b ;$

$$-a+5b ; \frac{a}{b} ; \frac{2a+3b}{-a+5b} \text{ et } a^2+b^2$$

Exercice 05

1) Soient  $x$  et  $y$  deux réels :  $-4 \leq x \leq -1$  et  $3 \leq y \leq 5$

Encadrer :  $x+y ; x-y ; x \times y$  et  $\frac{x^2}{y^2 - 2xy}$

Exercice 11

2) Soient  $a$  et  $b$  deux réels :  $-2 \leq a \leq 2$  et  $5 \leq b \leq 9$

Encadrer  $a+b ; a-b ; a \times b$  et  $\frac{a}{b}$

Exercice 06

Soit  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $5 \leq x \leq 7$ . On pose  $A = x^2 - 2x - 8$

1) Encadrer  $A$

2) a) Vérifier que  $A = (x-4)(x+2)$

b) En déduire un autre encadrement de  $A$

3) a) Vérifier que  $A = (x-1)^2 - 9$

b) En déduire un autre encadrement de  $A$

4) Quel est l'encadrement le plus précis ?

Exercice 07

Soient  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $1 \leq x \leq 2$  et  $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$

On pose  $A = x^2 - y^2 + x + y$

1) Encadrer  $A$

2) a) Vérifier que  $A = (x+y)(x-y+1)$

b) En déduire un autre encadrement de  $A$

3) Déduire que  $\frac{3}{4} \leq A \leq \frac{29}{4}$

Exercice 08

Déterminer l'intersection et la réunion de  $I$  et  $J$  :

$$I = [-10; 2] \text{ et } J = [-3; 7] ; I = ]-\infty; 3] \text{ et } J = [-6; +\infty[$$

$$I = [7; +\infty[ \text{ et } J = [-5; +\infty[ ; I = \left[-\frac{2}{3}; \frac{3}{5}\right] \text{ et } J = \left[\frac{5}{7}; 1\right]$$

$$I = \left] -\infty; -\frac{5}{4} \right] \text{ et } J = \left] -\frac{4}{3}; +\infty \right[ ; I = [1; 2[ \text{ et } J = [-1; 2]$$

Exercice 09

1) On considère le nombre  $A = \sqrt{6 - \sqrt{11}} - \sqrt{6 + \sqrt{11}}$

a) Déterminer le signe de  $A$

b) Calculer  $A^2$  puis déduire la valeur de  $A$

2) On considère le nombre  $B = (\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{\sqrt{3} + 2})$

Montrer que  $B^2 = 4$  puis déduire la valeur de  $B$

3) On considère le nombre  $C = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$

Sachant que  $x \in [-1; 1]$ . Simplifier le nombre  $C$

Exercice 10

Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$  tels que  $a \geq -2 ; b \leq -1$  et  $a - b = 6$

1) Calculer le nombre  $A = \sqrt{(a+2)^2} + \sqrt{(b+1)^2}$

2) Montrer que  $a \leq 5$  et  $b \geq -8$

3) Déterminer la valeur de  $B = |a+b-4| + |a+b+10|$

Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < 3$  et  $0 < b < \frac{1}{2}$  et  $ab = 1$

- 1) Montrer que  $2 < a < 3$  puis déduire que  $\frac{1}{3} < b < \frac{1}{2}$
- 2) Montrer que  $\frac{3}{7} < \frac{1}{a-2b} < 1$

#### Exercice 12

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et les inéquations suivantes :

$$|2x-3|=8 ; |x-1|=-1 ; |4x-3|=|x+1| ; |x-3|=|x+2| ;$$

$$|4x+5|=||x|-3|$$

$$|2x+3| < 1 ; |5-4x| \leq 1 ; |x-2| \geq 1 ; |-2x+1| > 3 ;$$

$$1 \leq |x+2| \leq 2$$

#### Exercice 13

Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$  avec  $a \in ]0;1[$  et  $b = \frac{1+\sqrt{a}}{2}$

- 1) Montrer que  $\frac{1}{2} < b < 1$
- 2) Montrer que  $b-1 = \frac{a-1}{2(1+\sqrt{a})}$
- 3) En déduire que  $|b-1| < \frac{1}{2}|a-1|$
- 4) Déduire une valeur approchée de  $\frac{1+\sqrt{0,6}}{2}$  à  $2 \times 10^{-2}$  près

#### Exercice 14

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On pose  $E = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

- 1) Montrer que  $E-1 = \frac{-x^2}{\sqrt{1+x^2}+1+x^2}$
- 2) Montrer que  $x^2 + \sqrt{1+x^2} + 1 \geq 2$
- 3) Déduire que  $|E-1| \leq \frac{1}{2}|x^2|$
- 4) Déterminer une valeur approchée de  $\frac{1}{\sqrt{1.0004}}$  à  $2 \times 10^{-4}$  près.

PROF: ATMANI NAJIB

#### Exercice 15

Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ . On pose  $Y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

- 1) Montrer que  $Y - \frac{1}{x} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$
- 2) Montrer que  $\sqrt{1+x^2}+1 \geq 2$
- 3) Déduire que  $\left|Y - \frac{1}{x}\right| \leq \frac{1}{2}|x|$
- 4) Déterminer une valeur approchée de  $\frac{\sqrt{0.0001}}{0.01}$  à  $5 \times 10^{-3}$  près.

#### Exercice 16

Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$

- 1) Montrer que  $1 + \sqrt{1+a} > 2$
- 2) En déduire que  $0 < \frac{1}{1+\sqrt{1+a}} < \frac{1}{2}$
- 3) Montrer que  $1 < \sqrt{1+a} < 1 + \frac{a}{2}$
- 4) Déduire un encadrement de  $\sqrt{1.04}$
- 5) Montrer que  $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}} = \sqrt{a+1} - \sqrt{a}$
- 6) Déduire une valeur de la somme
 
$$S = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

PROF: ATMANI NAJIB