Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°1 :

Equations et inéquations et systèmes partie3 : Equation du second degré

Exercice1 : (*) et (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :1) $x^2=16$ 2) $x^2=-8$

3) $(x+2)^2=9$ 4) $5x^2-4x=0$ 5) $3x^2-x-2=0$ (on peut utiliser l'écriture canonique)

6) $x^2-9+5(x+3)=0$

Solution : 1) L'équation : $x^2=16$

16 est positif donc l'équation admet deux solutions $x=\sqrt{16}=4$ et. $x=-\sqrt{16}=-4$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\{-4;4\}$

2) L'équation : $x^2=-8$ -8 est négatif donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Donc : $S=\varnothing$

3) L'équation : $(x+2)^2=9$

On a alors $x+2=3$ ou . $x+2=-3$

L'équation admet deux solutions $x=1$ et $x=-5$.Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\{-5;1\}$

4) $5x^2-4x=0$ Signifie que : $x(5x-4)=0$

Soit : $x=0$ ou $5x-4=0$ c'est-à-dire : $x=0$ ou $x=\frac{4}{5}$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\left\{0;\frac{4}{5}\right\}$

5) $3x^2-x-2=0$: On va d'abord Factoriser les trinômes $3x^2-x-2$

$$3x^2-x-2=3\left(x^2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)=3\left(x^2-2\frac{1}{2\times3}x+\left(\frac{1}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2-\frac{2}{3}\right)$$

$$3x^2-x-2=3\left(x^2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)=3\left(\left(x-\left(\frac{1}{6}\right)\right)^2-\frac{25}{36}\right)$$

$$3x^2-x-2=3\left(\left(x-\left(\frac{1}{6}\right)\right)^2-\frac{25}{36}\right)$$ Cette écriture s'appelle la forme canonique

$$3x^2-x-2=3\left(x-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\right)\left(x-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)=3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)$$

Donc : $3x^2-x-2=3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)$ la forme factorisée

$3x^2-x-2=0$ Signifie que : $(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)=0$

On a alors $x-1=0$ ou $x+\frac{2}{3}=0$

L'équation admet deux solutions $x=1$ et $x=-\frac{2}{3}$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\left\{-\frac{2}{3};1\right\}$

6) $x^2-9+5(x+3)=0$ Signifie que : $x^2-3^2+5(x+3)=0$ Signifie que : $(x+3)(x-3)+5(x+3)=0$

Signifie que : $(x+3)[(x-3)+5]=0$ Signifie que : $(x+3)(x+2)=0$ Signifie que : $x+3=0$ ou $x+2=0$

Signifie que : $x=-3$ ou $x=-2$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\{-3;-2\}$

Exercice2 : (**) Déterminer la forme canonique des trinômes suivants :

1) $5x^2+20x-65$ 2) $3x^2-x-2$

Solution :1) Pour écrire $5x^2+20x-65$ sous forme canonique on commence par factoriser le trinôme par le coefficient qui est devant x^2 : On obtient $5(x^2+4x-13)$

Puis on doit transformer : $x^2+4x-13$ en factorisant avec les identités remarquables :

Pour cela on utilise les deux premiers termes de $x^2+4x-13$ (x^2 correspond à a² et $4x$ à 2ab)

Donc : $a=x$ et $2ab=4x$ c'est-à-dire : $b=2$.

Donc : $x^2+4x-13=(x+2)^2-...-13$

Si on développe $(x+2)^2$ on obtient x^2+4x+4

Pour avoir seulement x^2+4x on doit retrancher 4.

Donc : $x^2+4x-13=(x+2)^2-4-13=(x+2)^2-17$

Donc : $5x^2+20x-65=5\left[(x+2)^2-17\right]$

Donc : $5x^2+20x-65=5(x+2)^2-85$

$5(x+2)^2-85$ est la forme canonique de $5x^2+20x-65$

2) $3x^2-x-2$: Autre méthode pour déterminer la forme canonique :

Calculons le discriminant de: $3x^2-x-2=ax^2+bx+c$: $a=3$; $b=-1$; $c=-2$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(-1)^2-4\times3\times(-2)=1+24=25>0$

La forme canonique de : ax^2+bx+c en générale est :

$ax^2+bx+c=a\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$ Avec $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=-\dfrac{\Delta}{4a^2}$

La forme canonique de $3x^2-x-2$ est:

$3x^2-x-2=3\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$ $\alpha=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-1}{2\times3}=\dfrac{1}{6}$ et $\beta=-\dfrac{\Delta}{4a^2}=-\dfrac{25}{4\times3^2}=-\dfrac{25}{36}$

Donc : $3x^2-x-2=3\left(x-\dfrac{1}{6}\right)^2-\dfrac{25}{36}$: La forme canonique

Exercice3 : (*) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et Factoriser les trinômes :

a) $2x^2-x-6=0$ b) $2x^2-3x+\dfrac{9}{8}=0$ c) $x^2+3x+10=0$ d) $6x^2-x-1=0$

Solution :a) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-x-6=0$: a = 2, b = -1 et c = -6

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times2}=-\dfrac{3}{2}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times2}=2$ donc : $S=\left\{-\dfrac{3}{2};2\right\}$

Et le trinôme $2x^2-x-6$ a une forme factorisée : $2x^2-x-6=a\left(x-\left(-\dfrac{3}{2}\right)\right)(x-2)$

C'est-à-dire : $2x^2-x-6=a\left(x+\dfrac{3}{2}\right)(x-2)$

b) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-3x+\frac{9}{8}=0$: a = 2, b = -3 et c = $\frac{9}{8}$

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{8} = 0$.

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une seule solution (dite double): $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2\times 2} = \frac{3}{4}$

Donc : $S=\left\{\frac{3}{4}\right\}$ et le trinôme $2x^2-3x+\frac{9}{8}$ a une forme factorisée : $2x^2-3x+\frac{9}{8}=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2$

c) Calculons le discriminant de l'équation $x^2+3x+10=0$: a = 1, b = 3 et c = 10
Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 10 = -31$.
Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle c'est-à-dire : $S=\varnothing$

d) $6x^2-x-1=0$. On a : $\Delta=1+24=25$: $x_1=\frac{1+5}{12}=\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{1-5}{12}=-\frac{1}{3}$

Donc : $S=\left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right\}$ par suite : $R(x)=6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$

Exercice4 : (**) Avec 60 dh j'ai acheté un nombre de jouets identique (ont donc le même prix)
Si chaque jouet avait couté 1dh de moins ; j'aurais pu en acheter 3 de plus
Combien en ai-je acheté ?

Solution : Soit n le nombre de jouets achetés et soit p le prix d'un jouet en dh

Nous avons donc : $60=np$ et $60=(n-1)(p+3)$

Nous déduisons donc l'équation : $n^2+3n-180=0$

Calcul du discriminant : $\Delta = 3^2 + 4 \times 180 \times 1 = 729 \succ 0$

La solution est : $n_1=\frac{-3+\sqrt{729}}{2\times 1}=12$ et $n_2=\frac{-3-\sqrt{729}}{2\times 1}=-15$

Nous rejetons $n_2=-15$ car le prix est positif

Donc : j'ai acheté 12 jouets

Exercice5 : (***) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\frac{x-2}{2x^2-3x-2}-\frac{x^2}{2x^2+13x+6}=0$

Solution : On commence par factoriser les expressions $2x^2-3x-2$ et $2x^2+13x+6$:
Le discriminant de $2x^2-3x-2$ est : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$ et ses racines sont :

$x_1=\frac{3-\sqrt{25}}{2\times 2}=-\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{3+\sqrt{25}}{2\times 2}=2$ et on a donc : $2x^2-3x-2=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)=(2x+1)(x-2)$.

Le discriminant de $2x^2+13x+6$ est : $\Delta' = 13^2 - 4 \times 2 \times 6 = 121$ et ses racines sont :

$x_1'=\frac{-13-\sqrt{121}}{2\times 2}=-6$ et $x_2'=\frac{-13+\sqrt{121}}{2\times 2}=-\frac{1}{2}$

On a donc : $2x^2+13x+6=2(x+6)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x+6)(2x+1)$.

- L'équation (E) s'écrit : $\frac{x-2}{(2x+1)(x-2)}-\frac{x^2}{(x+6)(2x+1)}=0$

Les valeurs -6, $-\frac{1}{2}$ et 2 annulent le dénominateur.

On résout alors (E) sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-6 ; -\frac{1}{2} ; 2\right\}$.

(E) s'écrit : $\frac{1}{2x+1} - \frac{x^2}{(x+6)(2x+1)} = 0$ c c a d $\frac{x+6}{(2x+1)(x+6)} - \frac{x^2}{(x+6)(2x+1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x+6-x^2}{(2x+1)(x+6)} = 0$

C'est-à-dire : $x+6-x^2=0$ car $x \neq -\frac{1}{2}$ et $x \neq -6$.

Le discriminant de $-x^2+x+6$ est :Δ" = 1^2 – 4 x (-1) x 6 = 25.

Les racines sont : $x_1" = \frac{-1-\sqrt{25}}{2\times(-1)} = 3$ et $x_2" = \frac{-1+\sqrt{25}}{2\times(-1)} = -2$

Les solutions de l'équation (E) sont : -2 et 3 donc $S = \{-2;3\}$

**Exercice6: (***) Soit le trinôme $2019x^2 - 2020x + 1$

a) Vérifier que 1 est racine du trinôme

b) Trouver l'autre racine du trinôme

Solution : a) $2019\times1^2 - 2020\times1+1 = 2019-2020+1 = 2020-2020 = 0$ donc $x_1 = 1$

b) a = 2019, b = -2020 et c = 1

On a : $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ donc $1\times x_2 = \frac{1}{2019}$ c'est-à-dire : $x_2 = \frac{1}{2019}$

Exercice7 : (***) Soit le trinôme (E) : $P(x) = -3x^2 + \sqrt{3}x + 3$

1) Prouver que le trinôme (E) admet deux racines distinctes α et β sans les calculer

2) Déduire les valeurs suivantes : $\alpha+\beta$; $\alpha\times\beta$; $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$; $\alpha^2+\beta^2$; $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$; $\alpha^3+\beta^3$

Solution : 1) $a=-3$: et et $b=\sqrt{3}$ et $c=3$

$\Delta = b^2-4ac = \sqrt{3}^2 - 4\times(-3)\times3 = 3+36 = 39$

Comme $\Delta > 0$: le trinôme (E) a deux racines distinctes : α et β

2) On a : $\alpha+\beta = -\frac{b}{a}$ et $\alpha\times\beta = \frac{c}{a}$ donc $\alpha+\beta = \frac{-\sqrt{3}}{-3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\alpha\times\beta = \frac{3}{-3} = -1$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{-1} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

On a : $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ donc $(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2+\beta^2$

Donc $\alpha^2+\beta^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2(-1) = \frac{3}{9}+2 = \frac{1}{3}+2 = \frac{7}{3}$

On a : $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} = \frac{\frac{7}{3}}{-1} = -\frac{7}{3}$

On sait que : $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

Donc : $\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2$ c'est-à-dire : $\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

Donc : $\alpha^3+\beta^3=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3-3(-1)\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{27}+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}+\sqrt{3}=\frac{10\sqrt{3}}{9}$

Exercice8 : (**) Donner une équation du second degré qui a pour solutions : α et β dans les cas suivants :

1) $\alpha=1$ et $\beta=-2$ 2) $\alpha=-1$ et $\beta=\sqrt{2}$ 3) $\alpha=-\frac{1}{2}$ et $\beta=\frac{1}{3}$

Solution : On sait que : Si x_1 et x_2 sont les racines du trinôme alors ils sont solutions de l'équation :

$x^2-sx+p=0$ avec : $\begin{cases} x+y=s \\ x\times y=p \end{cases}$

1) On a : $\alpha=1$ et $\beta=-2$ solutions de l'équation du second degré donc : $x^2-(1+(-2))x+1\times(-2)=0$

C'est-à-dire : $x^2+x-2=0$

2) On a : $\alpha=-1$ et $\beta=\sqrt{2}$ solutions de l'équation du second degré donc : $x^2-\left(-1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}\times(-1)=0$

C'est-à-dire : $x^2+\left(1-\sqrt{2}\right)x-\sqrt{2}=0$

3) On a : $\alpha=-\frac{1}{2}$ et $\beta=\frac{1}{3}$ solutions de l'équation du second degré

Donc : $x^2-\left(\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)\right)x+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ signifie que : $x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}=0$

C'est-à-dire : $6x^2-x-1=0$

Exercice9: (***) A)1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivante : $2x^2-3x-2=0$

2) En déduire les solutions des équations suivantes :

a) $2x-3\sqrt{x}-2=0$ b) $2x^2-3|x|-2=0$ c) $2x^4-3x^2-2=0$ d) $2x^3-3x^2=2x$

B) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $x^2+x-6=0$ et $x^2-x-2=0$

2) En déduire les solutions de l'équation suivante : $(E): x^2-|x-2|-4=0$

Solution : A)1) $2x^2-3x-2=0$

Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-3x-2=0$: a = 2, b = -3 et c = - 2

Donc : $\Delta = b^2-4ac = (-3)^2-4\times2\times(-2)=25$.

Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times2}=-\frac{1}{2}$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times2}=2$ Donc : $S=\left\{-\frac{1}{2};2\right\}$

2) $2x-3\sqrt{x}-2=0$ avec $x\geq0$

$2x-3\sqrt{x}-2=0$ Equivalent à : $2\left(\sqrt{x}\right)^2-3\sqrt{x}-2=0$ car $\sqrt{x}^2=x$

Faisons un changement de variable en posant : $X=\sqrt{x}$

Nous obtenons l'équation : $2X^2-3X-2=0$

Donc : d'après A) 1) on a : $X=-\frac{1}{2}$ ou $X=2$

Equivalent à : $\sqrt{x}=-\frac{1}{2}$ ou $\sqrt{x}=2$

Mais l'équation : $\sqrt{x}=-\frac{1}{2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$\sqrt{x}=2$ Signifie : $\left(\sqrt{x}\right)^2=2^2$ c'est-à-dire : $x=4$ et par suite : $S=\{4\}$.

2) b) $2x^2-3|x|-2=0$ Equivalent à : $2|x|^2-3|x|-2=0$ car $|x|^2=x^2$

Faisons un changement de variable en posant : $X=|x|$ nous obtenons l'équation : $2X^2-3X-2=0$

Donc : d'après A) 1) on a : $X=-\frac{1}{2}$ ou $X=2$ qui est équivalent à : $|x|=-\frac{1}{2}$ ou $|x|=2$

Mais l'équation : $|x|=-\frac{1}{2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$|x|=2$ Signifie : $x=2$ ou $x=-2$ par suite : $S=\{-1;1\}$

2) c) $2x^4-3x^2-2=0$ Equivalent à : $2\left(x^2\right)^2-3x^2-2=0$

Faisons un changement de variable en posant : $X=x^2$ nous obtenons donc : l'équation : $2X^2-3X-2=0$

Donc : d'après A) 1) on a : $X=-\frac{1}{2}$ ou $X=2$ et par suite : $x^2=-\frac{1}{2}$ ou $x^2=2$

Mais l'équation : $x^2=-\frac{1}{2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$x^2=2$ Signifie : $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$ par suite : $S=\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$.

d) $2x^3-3x^2=2x$ Equivalent à : $2x^3-3x^2-2x=0$

Equivalent à : $x\left(2x^2-3x-2\right)=0$

Equivalent à : $x=0$ ou $2x^2-3x-2=0$

Equivalent à : $x=0$ ou $x_1=-\frac{1}{2}$ ou $x_2=2$ et par suite : $S=\left\{-\frac{1}{2};0;2\right\}$.

B) 1) Résolution dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes : $x^2+x-6=0$ et $x^2-x-2=0$

Calculons le discriminant de l'équation $x^2+x-6=0$: a = 1, b = 1 et c = - 6

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{25}}{2\times 1}=-3$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{25}}{2\times 1}=2$ Donc : $S=\{-3;2\}$

Calculons le discriminant de l'équation $x^2-x-2=0$: a = 1, b = -1 et c = - 2

Donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-\sqrt{9}}{2\times 1}=-1$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+\sqrt{9}}{2\times 1}=2$ Donc : $S=\{-1;2\}$

2) Déduction des solutions de l'équation suivante : $(E): x^2-|x-2|-4=0$

Etudions le signe de : $x-2$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$x-2$	$-$ 0 $+$

Si $x\geq 2$ alors $x-2\geq 0$ donc : $|x-2|=x-2$

Donc : l'équation devient : $x^2-(x-2)-4=0$

Signifie : $x^2-x+2-4=0$ c'est-à-dire : $x^2-x-2=0$

Or : d'après B) 1) $x_1=-1$ et $x_2=2$ mais : $x_1=-1\notin[2;+\infty[$ donc : $S_1=\{2\}$

Si $x\prec 2$ alors $x-2\leq 0$ donc : $|x-2|=-(x-2)=-x+2$

Donc : l'équation devient : $x^2+(x-2)-4=0$ c'est à dire : $x^2+x-2-4=0$

Signifie : $x^2+x-6=0$ Or : d'après B) 1) $x_1=-3$ et $x_2=2$

Mais : $x_2=2\notin\left]-\infty;2\right[$ Donc : $S_2=\{-3\}$

Par suite : $S=S_1\cup S_2=\{-3;2\}$.

Exercice10 : (***) (Equations avec des racines carrées)
Résoudre dans $\mathbb{R}$; l'équation suivante : $\sqrt{x-3}=-x+5$

Corrigé :
Remarque : La relation $a=b\Leftrightarrow a^2=b^2$ n'est pas vraie si les deux nombres sont de signes contraires.
a) L'équation est définie si $x-3\geq 0$ Signifie que : $x\geq 3$
L'équation est donc définie sur : $D_E=[3,+\infty[$
b) Je travaille par équivalence en m'assurant que les deux membres sont positifs avant d´élever au carré.
$\sqrt{x-3}=-x+5$ Signifie que : $\sqrt{x-3}^2=(-x+5)^2$ et $-x+5\geq 0$

Signifie que : $x-3=x^2-10x+25$ et $-x\geq -5$
Signifie que : $x^2-11x+28=0$ et $x\leq 5$

Le discriminant de : $x^2-11x+28=0$ est : $\Delta=(-11)^2-4\times1\times28=121-112=9>0$ et ses solutions sont :

$x_1=\dfrac{11-\sqrt{9}}{2\times1}=\dfrac{8}{2}=4\in D_E$ et $x_1=\dfrac{11+\sqrt{9}}{2\times1}=\dfrac{14}{2}=7\notin D_E$

$x^2-5x+4=0$ Signifie que : $x=4\in D_E$

Par conséquent : $S=\{4\}$

Exercice11: (**) Factoriser les expressions suivantes : 1) $x^4-x^2+\dfrac{1}{4}$ 2) x^4-3x^2-4

Solution : 1) $x^4-x^2+\dfrac{1}{4}=\left(x^2\right)^2-x^2+\dfrac{1}{4}$ On pose : $X=x^2$

Donc : le trinôme devient : $X^2-X+\dfrac{1}{4}$; $a=1$; $b=-1$; $c=\dfrac{1}{4}$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(-1)^2-4\times1\times\dfrac{1}{4}=1-1=0$

Comme $\Delta=0$, le trinôme : $X^2-X+\dfrac{1}{4}$ a une racine double :

La racine double de : $X^2-X+\dfrac{1}{4}$ est : $X=\dfrac{-(-1)}{2\times1}=\dfrac{1}{2}$

Donc on a : $X^2-X+\dfrac{1}{4}=1\left(X-\dfrac{1}{2}\right)^2$ et comme : $X=x^2$

Alors : $x^4-x^2+\dfrac{1}{4}=1\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)^2=\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

2) $x^4-3x^2-4=\left(x^2\right)^2-3x^2-4$ On pose : $X=x^2$

Donc : le trinôme devient : X^2-3X-4
On a : $a=1$; $b=-3$; $c=-4$

$\Delta=b^2-4\times a\times c=(-3)^2-4\times1\times(-4)=9+16=25>0$

Le trinôme : X^2-3X-4 a deux racines : $X_1=\dfrac{-(-3)+5}{2\times1}=\dfrac{8}{2}=4$ et $X_2=\dfrac{-(-3)-5}{2\times1}=\dfrac{-2}{2}=-1$

$X^2-3X-4=1(X-4)(X+1)$ et comme : $X=x^2$

Alors : $x^4-3x^2-4=1(x^2-4)(x^2+1)=(x-2)(x+2)(x^2+1)$

Exercice12 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivantes : $x^4-7x^2+12=0$

2) Déterminer une factorisation de x^4-7x^2+12 en un produit de monômes du premier degré.

3)En déduire une résolution de l'inéquation : $x^4-7x^2+12\geq 0$

Corrigé :1)

Méthode : C'est une équation bicarrée, c'est à dire que l'inconnue est à la puissance 4, 2 et 0.
Je pose donc $X=x^2$ et je me ramène à une équation du second degré dont l'inconnue est X.
Je ne dois pas oublier à la fin de donner les solutions de l´équation de départ.

$x^4-7x^2+12=0$ Équivaut à : $(x^2)^2-7x^2+12=0$

Je pose : $X=x^2$ l'équation devienne : $X^2-7X+12=0$

Le discriminant de : $X^2-7X+12=0$ est : $\Delta=(-7)^2-4\times1\times12=49-48=1>0$ et ses solutions sont :

$X_1=\frac{7-\sqrt{1}}{2\times1}=\frac{6}{2}=3$ et $X_2=\frac{7+\sqrt{1}}{2\times1}=\frac{8}{2}=4$

C'est-à-dire : $x^2=3$ ou $x^2=4$

C'est-à-dire : $x=\pm\sqrt{3}$ ou $x=\mp2$

Donc l´équation $x^4-7x^2+12=0$ admet pour ensemble de solutions :

$S=\{-2;-\sqrt{3};\sqrt{3};2\}$

2) Résolution de l'inéquation : $x^4-7x^2+12\geq0$

On a une factorisation de x^4-7x^2+12 en un produit de monômes du premier degré :

$x^4-7x^2+12=1(x+2)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x-2)$

$x+2=0$ Équivaut à : $x=-2$ et $x+\sqrt{3}=0$ signifie que : $x=-\sqrt{3}$

$x-\sqrt{3}=0$ Signifie que : $x=\sqrt{3}$ et $x-2=0$ Équivaut à : $x=2$

On peut donc dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x+\sqrt{3}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-\sqrt{3}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$I(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$x^4-7x^2+12\geq0$ Équivaut à : $x\in]-\infty,-2]\cup[-\sqrt{3},\sqrt{3}]\cup[2;+\infty[$

Ainsi, l'ensemble solution de $F(x)>0$ est : $S=]-\infty,-2]\cup[-\sqrt{3},\sqrt{3}]\cup[2;+\infty[$

Exercice13 : (***) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter suivant le paramètre $m\in\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$x^2-2(m+1)x+4=0$; (E)

Corrigé : Soit $x\in\mathbb{R}$: $x^2-2(m+1)x+4=0$

Le discriminant de : $x^2-2(m+1)x+4=0$ est : $\Delta=[-2(m+1)]^2-4\times1\times4=(2m+2)^2-16$

$\Delta=(2m+2)^2-4^2=(2m+2-4)(2m+2+4)=(2m-2)(2m+6)=4(m-1)(m+3)$

On cherche le tableau de signe de l'expression : $\Delta=4(m-1)(m+3)$

m	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$m-1$	$-$	$-$	0	$+$
$m+3$	$-$	0	$+$	$+$
$(m-1)(m+3)$	$+$	0	$-$	0 $+$

1ére cas : $m\in\left]-\infty;-3\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ on a ; $\Delta=4(m-1)(m+3)>0$:

Donc : l'Equation (E) admet deux solutions réelles distinctes x1 et x2 telles que :

$x_1=\dfrac{2(m+1)-\sqrt{4(m-1)(m+3)}}{2}=(m+1)-\sqrt{(m-1)(m+3)}$ et

$x_2=\dfrac{2(m+1)+\sqrt{4(m-1)(m+3)}}{2}=(m+1)+\sqrt{(m-1)(m+3)}$

Donc : $S=\left\{(m+1)-\sqrt{(m-1)(m+3)};(m+1)+\sqrt{(m-1)(m+3)}\right\}$

2ére cas : $m\in\left]-3;1\right[$ on a $\Delta=4(m-1)(m+3)<0$:

Donc : L'équation n'admet pas de solutions

Donc : $S=\varnothing$

3ére cas : $m=1$: on a $\Delta=4(1-1)(1+3)=0$:

Donc : L'équation admet une solution unique (double): $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{2(m+1)}{2\times1}=m+1=2$

Donc : $S=\{2\}$

4ére cas : $m=-3$: on a $\Delta=4(-3-1)(-3+3)=0$:

Donc : L'équation admet une solution unique (double): $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{2(m+1)}{2\times1}=-3+1=-2$

Donc : $S=\{-2\}$

Exercice14 : (***) On considère l'équation : (E_m) $x^2-2x+(2m-1)=0$

1) Déterminer les valeurs du paramètre m pour que l'équation (E_m) admette deux solutions distinctes α et β

2) Déterminer la valeur du paramètre m pour que :

a) $\alpha\times\beta=-5$ b) $(\alpha-1)\times(\beta-1)=-10$ c) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-42$

Corrigé : 1) C'est une équation du second degré : $\Delta_m=b^2-4ac=4-4(2m-1)=4-8m+4=8-8m$

L'équation admet deux solutions distinctes α et β si et seulement si : $\Delta_m\succ0$

Signifie que : $8-8m\succ0$ c'est-à-dire : $m\prec1$

2) Déterminons la valeur du paramètre m pour que : a) $\alpha\times\beta=-5$:

On sait que : $\alpha\times\beta=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2m-1}{1}=2m-1$

Donc : $2m-1=-5$ qui signifie que : $2m=-4$ c'est-à-dire : $m=-2$

b) $(\alpha-1)\times(\beta-1)=-10$ signifie que : $\alpha\beta-\alpha-\beta+1=-10$

Signifie que : $\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=-10$

Signifie que : $\alpha\beta=2m-1$ et $\alpha+\beta=2$

Donc : $2m-1-2+1=-10$ signifie que : $2m=-8$ c'est-à-dire : $m=-4$

c) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-42$ signifie que : $\alpha\beta(\alpha+\beta)=-42$

Or on sait que : $\alpha+\beta=2$ et et $\alpha\times\beta=2m-1$

Donc : $2(2m-1)=-42$ équivaut à : $2m-1=-21$

Équivaut à : $2m=-20$ c'est-à-dire : $m=-10$

Exercice15 : (*) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $-5x^2+6x+8\geq 0$ b) $2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}>0$

c) $16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}<0$ d) $-\frac{1}{2}x^2+x-4<0$

Solution : a) $-5x^2+6x+8\geq 0$

Calculons le discriminant de l'équation $-5x^2+6x+8=0$: $a=-5$; $b=6$; $c=8$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=6^2-4\times 8\times(-5)=36+160=196=14^2>0$

Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6-\sqrt{196}}{2\times(-5)}=\frac{-6-14}{-10}=2$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6+\sqrt{196}}{2\times(-5)}=\frac{-6+14}{-10}=-\frac{4}{5}$

Le tableau de signe est :

x	$-\infty$		$-4/5$		2		$+\infty$
$-5x^2+6x+8$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $S=\left[-\frac{4}{5};2\right]$

b) $2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}>0$ Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}=0$:

$a=2$; $b=-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$; $c=\sqrt{6}$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=\left(-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)^2-4\times 2\times\sqrt{6}=\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-8\times\sqrt{6}$

$\Delta=\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-8\times\sqrt{6}=\left(2\sqrt{2}\right)^2+2\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2-8\sqrt{6}$

$\Delta=\left(2\sqrt{2}\right)^2+2\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2-8\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\left(2\sqrt{2}\right)^2-2\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2$

Donc : $\Delta=\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2>0$

Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}}{2\times 2}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\left|2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|}{4}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}}{2\times 2}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\left|2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|}{4}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{4}=\frac{4\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$

Le tableau de signe est :

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$2x^2-(2\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left]-\infty;\frac{\sqrt{3}}{2}\right[\cup\left]\sqrt{2};+\infty\right[$

c) $16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}<0$

Calculons le discriminant de l'équation $16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}$: $a=16$; $b=-\frac{8}{3}$; $c=\frac{1}{9}$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=\left(-\frac{8}{3}\right)^2-4\times16\times\frac{1}{9}=\frac{64}{9}-\frac{64}{9}=0$

Comme $\Delta=0$, l'équation possède une seule solution (dite double): $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-\frac{8}{3}}{2\times16}=\frac{1}{12}$

Le tableau de signe est :

x	$-\infty$	$\frac{1}{12}$	$+\infty$
$16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}$	$+$	0	$+$

Donc : $S=\varnothing$

d) $-\frac{1}{2}x^2+x-4<0$

Calculons le discriminant de l'équation $-\frac{1}{2}x^2+x-4=0$: $a=-\frac{1}{2}$; $b=1$; $c=-4$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=1^2-4\times(-4)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1-8=-7<0$ et $a=-\frac{1}{2}<0$

Le tableau de signe est :

x	$-\infty$	$+\infty$
$-\frac{1}{2}x^2+x-4$	$-$	

Donc : $S=\mathbb{R}$

Exercice16 : (***) Soit le trinôme : $P(x)=x^2+\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}$ et soit Δ son discriminant

1) Vérifier que : $\Delta=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$: (E)

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)>0$

4) En déduire les solutions de l'équation $x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

Solution : $P(x)=x^2+\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}$

1) $\Delta=b^2-4ac=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-4\times1\times2\sqrt{6}$

$\Delta=12-4\sqrt{6}+2+8\sqrt{6}=14+4\sqrt{6}$

$14+4\sqrt{6}=14+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\left(2\sqrt{3}\right)^2+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2$ $14+4\sqrt{6}=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E): x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}=0$

On a $\Delta=14+4\sqrt{6}>0$ donc

$x_1=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{14+4\sqrt{6}}}{2\times1}=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times1}$ et $x_2=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times1}$

$x_1=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\times1}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ et $x_2=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\times1}=\frac{-4\sqrt{3}}{2}=-2\sqrt{3}$

On a donc : $S=\left\{\sqrt{2},-2\sqrt{3}\right\}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)>0$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{2})x-2\sqrt{6}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc : $S=\left]-\infty,-2\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{2},+\infty\right[$

4) Déduction des solutions de l'équation : $x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

$x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$ Peut s'écrire sous la forme : $\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

On pose : $X=\sqrt{x}$ On a donc : $X^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)X-2\sqrt{6}=0$

D'après la question précédente les solutions sont : $X_1=\sqrt{2}$ et $X_2=-2\sqrt{3}$

On a donc : $\sqrt{x_1}=\sqrt{2}$ et $\sqrt{x_2}=-2\sqrt{3}$ or l'équation $\sqrt{x_2}=-2\sqrt{3}$ n'a pas de solutions

Donc : $\left(\sqrt{x_1}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$ donc : $x_1=2$ On a donc : $S=\{2\}$

Exercice17 : (**) Résoudre les inéquations suivantes : 1) $\frac{1}{x^2-x-6}\geq 2$ 2) $\frac{3x+9}{6x+2}\geq\frac{2x+1}{1-x}$

Solution : 1) $\frac{1}{x^2-x-6}\geq 2$

a) On va déterminer le domaine de définition de l'inéquation :
Cette inéquation est définie si et seulement si $x^2-x-6\neq 0$
On commence par déterminer les racines du trinôme x^2-x-6 :

Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$ et ses racines sont : $x_1=\frac{1-\sqrt{25}}{2\times 1}=-2$ et $x_2=\frac{1+\sqrt{25}}{2\times 1}=3$

Alors le domaine de définition de l'inéquation est : $D_I=\mathbb{R}-\{-2,3\}$

b) Résolvons l'inéquation :

$\frac{1}{x^2-x-6}\geq 2$ Signifie que : $\frac{1}{x^2-x-6}-2\geq 0$ Signifie que : $\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}\geq 0$

On cherche les racines de: $-2x^2+2x+13$

Le discriminant est : $\Delta = 2^2 - 4 \times (-2) \times 13 = 108$

Donc : les racines de $-2x^2+2x+13$ sont : $x_2'=\frac{-2+\sqrt{108}}{2\times(-2)}=\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$ et $x_1'=\frac{-2-\sqrt{108}}{2\times(-2)}=\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$

Donc le tableau des signes est :

x	$-\infty$		$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$		-2		3		$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+2x+13$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
x^2-x-6		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{1}{x^2-x-6} \geq 2$ est : $S=\left[\frac{1-3\sqrt{3}}{2};-2\right[\cup \left]3;\frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right]$.

2) $\frac{3x+9}{6x+2} \geq \frac{2x+1}{1-x}$

On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier les signes des trinômes : $\frac{3x+9}{6x+2} \geq \frac{2x+1}{1-x}$ Signifie que : $\frac{3x+9}{6x+2} - \frac{2x+1}{1-x} \geq 0$

Signifie que : $\frac{(3x+9)(1-x)-(2x+1)(6x+2)}{(6x+2)(1-x)} \geq 0$

Signifie que : $\frac{3x-3x^2+9-9x-12x^2-4x-6x-2}{(6x+2)(1-x)} \geq 0$

Signifie que : $\frac{-15x^2-16x+7}{(6x+2)(1-x)} \geq 0$ c'est-à-dire : $\frac{-(15x^2+16x-7)}{-(6x+2)(x-1)} \geq 0$

Signifie que : $\frac{15x^2+16x-7}{(6x+2)(x-1)} \geq 0$

On cherche les racines de : $15x^2+16x-7$

Le discriminant est : $\Delta' = 16^2 - 4 \times (-7) \times 15 = 676 = 26^2$

Donc : les racines de $15x^2+16x-7$: $x_1 = \frac{-16+26}{2\times 15} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{-16-26}{2\times 15} = \frac{-42}{30} = -\frac{7}{5}$

Donc le tableau des signes est:

x	$-\infty$	$-\frac{7}{5}$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$6x+2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$15x^2+16x-7$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{15x^2+16x-7}{(6x+2)(x-1)}$	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $S=\left]-\infty;-\frac{7}{5}\right] \cup \left]-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right] \cup \left]1;+\infty\right[$.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien