Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°1 : Les polynômes

Exercice1 : (*) Déterminer parmi les expressions suivantes ceux qui sont des polynômes et déterminer si c'est possible leurs degrés : $a\in\mathbb{R}$

$P(x)=\frac{1}{4}x^3+\frac{\sqrt{2}}{2}x^2-\sqrt{3}$; $Q(x)=2x^2-x-\sqrt{x}$; $R(x)=5|x|^2+4|x|-5$;

$E(x)=(a-1)x^4+x^2+x+1$; $F(x)=(x-3)^2-4(5+x^6)+9+5(4x^6+x^3)$

$M(x)=\frac{5}{3}x^2+x+2-7x^4$; $N(x)=x^2+\frac{1}{x}x+3$; $O(x)=4$

Solution : $P(x)$ est un polynôme et $d^\circ P=3$

$Q(x)$ et $R(x)$ et $N(x)$ ne sont pas des polynômes

$M(x)$ Est un polynôme et $d^\circ M=4$

$O(x)$ Est un polynôme et $d^\circ O=0$

$E(x)$ Est un polynôme

Si $a-1\neq 0$ c'est-à-dire : $a\neq 1$ alors $d^\circ E=4$

Si $a=1$ alors $d^\circ E=2$

$F(x)=(x-3)^2-4(5+x^6)+9+5(4x^6+x^3)$ Signifie que : $F(x)=x^2-6x+9-20-4x^6+9+4x^6+2x^3$

Donc : $F(x)=2x^3+x^2-6x-2$ par suite : $d^\circ F=3$

Exercice2 : (*) Développer ; Réduire et ordonner et déterminer le degré du polynôme suivant :

$P(x)=(2x-1)^3+3(x+1)(1-x)-2x^2(2x-5)$

Solution : $P(x)=(2x-1)^3+3(x+1)(1-x)-2x^2(2x-5)$

$P(x)=(2x)^3-3(2x)^2\times 1+3(2x)\times 1^2-1^3+3(1-x^2)-4x^3+10x^2$

$P(x)=8x^3-12x^2+6x-1+3-3x^2-4x^3+10x^2$

$P(x)=8x^3-4x^3-12x^2+10x^2-3x^2+6x-1+3$

$P(x)=4x^3-5x^2+6x+2$; Par suite : $d^\circ P=3$

Exercice3 : (**) discuter suivant le paramètre m le degré du polynôme $P(x)$:

$P(x)=(m^2-m)x^3-(m^2-1)x^2+mx-1$

Solution : $P(x)=(m^2-m)x^3-(m^2-1)x^2+mx-1$

$m^2-m=0$ Signifie que : $m(m-1)=0$

Signifie que : $m-1=0$ ou $m=0$

Signifie que : $m=1$ ou $m=0$

- Si $m\neq 1$ et $m\neq 0$ alors : $m^2-m\neq 0$ et par suite : $d^\circ P=3$
- Si $m=0$ alors : le polynôme devient : $P(x)=(0^2-0)x^3-(0^2-1)x^2+0x-1$

c'est-à-dire : $P(x)=x^2-1$ et par suite : $d^\circ P=2$

- Si $m=1$ alors : le polynôme devient : $P(x)=(1^2-1)x^3-(1^2-1)x^2+1x-1$

c'est-à-dire : $P(x)=x-1$ et par suite : $d^\circ P=1$

Exercice4 : (**) Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que : $P(0)=P(1)=5$ et $P(-2)=3$

Solution : P de degré 2 donc P s'écrit sous la forme : $P(x)=ax^2+bx+c$

On a $P(0)=5$ donc $a\times 0^2+b\times 0+c=5$ par suite : $c=5$

On a $P(1)=5$ donc $a\times 1^2+b\times 1+c=5$ c'est-à-dire : $a+b+c=5$ donc $a+b+5=5$

Donc : $a+b=0$ (1)

On a $P(-2)=3$ donc $a\times(-2)^2+b\times(-2)+5=3$ c'est-à-dire : $4a-2b+5=3$

Donc $4a-2b=-2$ (2)

Donc : on a le système suivant : $\begin{cases}4a-2b=-2\\ a+b=0\end{cases}$ donc : $\begin{cases}4a-2b=-2\\ b=-a\end{cases}$

Par suite : $4a+2a=-2$ donc : $6a=-2$

Donc : $a=-\frac{1}{3}$ donc $b=\frac{1}{3}$

Alors : $P(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+5$

Exercice5 : (*) Lesquels des polynômes ci-dessous sont égaux ? Expliquez

$P(x)=2x^3-2x^2+x-3$ et $Q(x)=2x^2(x-2)+(x-1)(2x+3)$ et $R(x)=2x^3+3x^2-2x-3$

Solution : $Q(x)=2x^2(x-2)+(x-1)(2x+3)=2x^3-4x^2+2x^2+3x-2x-3$

$Q(x)=2x^2(x-2)+(x-1)(2x+3)=2x^3-4x^2+2x^2+3x-2x-3$

$Q(x)=2x^3-2x^2+x-3$ Donc : deg (P) = 3

Donc : $P(x)=Q(x)$ car : deg (P) = deg (Q) et les coefficients de leurs termes de même Degré sont égaux.

Mais $P(x)\neq R(x)$ car les coefficients de leurs monômes de même degré ne sont pas égaux

Exercice6 (**) **:** Soit les polynômes suivants : $P(x)=12x^4-36x^3+47x^2-30x+7$

$Q(x)=(2x^2-3x+1)(ax^2+bx+c)$

Déterminer a ; b ; c sachant que : $P=Q$

Solution : $P=Q$ si et seulement si $P(x)=Q(x)$ pout tout x

$Q(x)=(2x^2-3x+1)(ax^2+bx+c)=2ax^4+2bx^3+2cx^2-3ax^3-3bx^2-3cx+ax^2+bx+c$

$Q(x)=2ax^4+(2b-3a)x^3+(2c-3b+a)x^2+(b-3c)x+c$

Donc : $\begin{cases}2a=12\\ 2b-3a=-36\\ a-3b+2c=47\\ b-3c=-30\\ c=7\end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases}a=0\\ b=-9\\ c=7\end{cases}$

On vérifie que : $a-3b+2c=47$ est vraie

Donc : $Q(x)=(2x^2-3x+1)(6x^2-9x+7)$

Exercice7 : (*) Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes

I) Calculer dans chacun des cas suivants : $P(x)+Q(x)$; $P(x)-Q(x)$; $3P(x)-2Q(x)$

1) $P(x)=x^3+2x^2-1$; $Q(x)=3x^4-x^3+x$

2) $P(x)=x^5-x^2+3$; $Q(x)=-x^5+x^2-5$

II) Calculer $P(x)\times Q(x)$ et $(P(x))^2$

Dans chacun des cas suivants et comparer : $\deg(P\times Q)$ et $\deg(P)+\deg(Q)$

1) $P(x)=x^2-1$; $Q(x)=x^2+2x-3$

2) $P(x)=x^4-x^2+2$; $Q(x)=3x+2$

Solution: I) 1) $P(x)=x^3+2x^2-1$; $Q(x)=3x^4-x^3+x$

On a: $P(x)+Q(x)=x^3+2x^2-1+3x^4-x^3+x$

Donc : $P(x)+Q(x)=3x^4+2x^2+x-1$

On a: $P(x)-Q(x)=x^3+2x^2-1-3x^4+x^3-x$ $P(x)-Q(x)=-3x^4+2x^3+2x^2-x-1$

$3P(x)-2Q(x)=3(x^3+2x^2-1)-2(3x^4-x^3+x)$ $3P(x)-2Q(x)=3x^3+6x^2-3-6x^4+2x^3-2x$

$3P(x)-2Q(x)=-6x^4+5x^3+6x^2-2x-3$

$\deg(P)=3$; $\deg(Q)=4$; $\deg(P+Q)=4$; $\deg(P-Q)=4$

I) 2) $P(x)=x^5-x^2+3$; $Q(x)=-x^5+x^2-5$

On a: $P(x)+Q(x)=x^5-x^2+3-x^5+x^2-5=-2$

On a: $P(x)-Q(x)=x^5-x^2+3+x^5-x^2+8=2x^5-2x^2+8$

$3P(x)-2Q(x)=3(x^5-x^2+3)-2(-x^5+x^2-5)$

$3P(x)-2Q(x)=3x^5-3x^2+9+2x^5-2x^2+10$

$3P(x)-2Q(x)=5x^5-5x^2+19$

$\deg(P)=5$; $\deg(Q)=5$; $\deg(P+Q)=0$; $\deg(P-Q)=5$

II) 1) on a $P(x)=x^2-1$; $Q(x)=x^2+2x-3$

$P(x)\times Q(x)=(x^2-1)(x^2+2x-3)=x^5+2x^4-3x^3-x^2-2x+3$

$(P(x))^2=(x^2-1)^2=(x^2)^2-2x^2\times1+1=x^4-2x^2+1$

2) $P(x)=x^4-x^2+2$; $Q(x)=3x+2$

$P(x)\times Q(x)=(3x+2)(x^4-x^2+2)=3x^5+2x^4-3x^3-2x^2+6x+4$

$(P(x))^2=(x^4-x^2+2)^2=(x^4-x^2+2)(x^4-x^2+2)$ $(P(x))^2=(x^4-x^2+2)^2=x^8-2x^6+5x^4-4x^2+4$

$\deg(P\times Q)=5$ $\deg(P)=4$; $\deg(Q)=1$

Donc $\deg(P\times Q)=\deg(P)+\deg(Q)$ et $\deg(P^2)=2\deg(P)$

Exercice8: (*) Soit le polynôme : $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

Est-ce que les nombres suivants sont des racines du polynôme $P(x)$ (justifier) ? 1 ;2 ;3 ; -2

Solution : $P(1)=1^3-2\times1^2-5\times1+6=1-2-5+6=0$

Donc : 1 est racine du polynôme $P(x)$

$P(2)=2^3-2\times2^2-5\times2+6=8-8-10+6=-4\neq0$

Donc 2 n'est pas racine du polynôme $P(x)$

$P(3)=3^3-2\times3^2-5\times3+6=27-18-15+6=0$

Donc 3 est racine du polynôme $P(x)$

$P(-2)=(-2)^3-2\times(-2)^2-5\times(-2)+6=-8-8+10+6=0$

Donc : -2 est racine du polynôme $P(x)$

Exercice9 : (*) Soit le polynôme : $P(x)=3x^3-2x^2+x+2$

Effectuer la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $x-1$ et vérifier que :

$P(x)=(x-1)(3x^2+x+2)+P(1)$

Solution :

De la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $x-1$ nous obtenons alors :

$$\begin{array}{r|l} 3x^3-2x^2+x+2 & x-1 \\ \hline -\ \ 3x^3-3x^2 \qquad\qquad & 3x^2+x+2 \\ \boxed{x^2+x+2} & \\ -\ \ x^2-x \qquad & \\ 2x+2 & \\ -\ \ 2x-2 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(3x^2+x+2)+4$

Calculons : $P(1)$:

$P(1)=3\times1^3-2\times1^3+1+2=3-2+1+2=4$

Donc : $P(x)=(x-1)(3x^2+x+2)+P(1)$

Exercice10 : (**) Soit le polynôme : $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

1) Vérifier que 1 est racine du polynôme $P(x)$

2) Factoriser : $P(x)$

Solution :1) $P(1)=1^3-2\times1^2-5\times1+6=1-2-5+6=0$

Donc : 1 est racine du polynôme $P(x)$

2) 1 est racine du polynôme $P(x)$

Donc : $P(x)$ est divisible par $x-1$

En effectuant la division euclidienne de : $P(x)$ Par $x-1$:

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2-5x+6 & x-1 \\ \hline -\ \ x^3-x^2 \qquad\qquad & x^2-x-6 \\ -x^2-5x+6 & \\ -\ \ -x^2+x \qquad & \\ -6x+6 & \\ -\ \ -6x+6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

On trouve donc : $Q(x)=x^2-x-6$

Donc : $P(x)=(x-1)(x^2-x-6)$

Exercice11 : (***) Déterminer le nombre réel a pour que :

$P(x)=x^3-6x^2+(2+3a)x-2a$ Soit divisible par $x-3$ et factoriser $P(x)$ dans ce cas

Solution :1) $P(x)=x^3-6x^2+(2+3a)x-2a$ est divisible par $x-3$ donc : $P(3)=0$

Donc : $3^3-6\times3^2+3(2+3a)-2a=0$

Donc : $7a=21$ par suite : $a=3$

Factorisation de $P(x)$ dans le cas : $a=3$

$P(x)=x^3-6x^2+11x-6$

$$\begin{array}{r|l} x^3-6x^2+11x-6 & x-3 \\ \hline -\ \ x^3-3x^2 \qquad\qquad & x^2-3x+2 \\ \boxed{-3x^2+11x-6} & \\ -\ \ 3x^2+9x \qquad & \\ 2x-6 & \\ -\ \ 2x+6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$P(x)$ Soit divisible par $x-3$ donc : $P(x)=(x-3)(x^2-3x+2)$

Exercice12 : (***) On considère le polynôme : $P(x)=-5x^2+8x-3$

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

b) En déduire que : $P(x)=(x-1)(3-5x)$

2) On suppose que : $|x+1|<\frac{1}{5}$

a) Montrer que : $-\frac{6}{5}<x<-\frac{4}{5}$

b) Montrer que : $-\frac{99}{5}<P(x)<-\frac{63}{5}$

c) En déduire que $-16,2$ est une valeur approchée de $P(x)$ avec la précision $3,6$

Solution : $P(x)=-5x^2+8x-3$

1) a) Résolution dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

$P(x)=0$ Signifie que : $-5x^2+8x-3=0$; $\Delta=b^2-4ac=8^2-4\times(-5)\times(-3)=4$

Donc : $x_1=\frac{-8-\sqrt{4}}{2\times(-5)}=\frac{-10}{-10}=1$ et $x_2=\frac{-8+\sqrt{4}}{2\times(-5)}=\frac{-6}{-10}=\frac{3}{5}$

Par suite: $S=\left\{\frac{3}{5};1\right\}$

b) Déduction que : $P(x)=(x-1)(3-5x)$

$P(x)=-5x^2+8x-3$ Admet deux racines : $x_1=1$ et $x_2=\frac{3}{5}$

Donc : $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)=-5(x-1)\left(x-\frac{3}{5}\right)=(x-1)(-5x+3)=(x-1)(3-5x)$

2) On suppose que : $|x+1|<\frac{1}{5}$

a) Montrons que : $-\frac{6}{5}<x<-\frac{4}{5}$

On a : $|x+1|<\frac{1}{5}$ Signifie que : $-\frac{1}{5}<x+1<\frac{1}{5}$ Signifie que : $-\frac{1}{5}-1<x+1-1<\frac{1}{5}-1$

Signifie que : $-\frac{6}{5}<x<\frac{-4}{5}$

b) Montrons que : $-\frac{99}{5}<P(x)<-\frac{63}{5}$: on sait que : $P(x)=(x-1)(3-5x)$

On a : $-\frac{6}{5}<x<\frac{-4}{5}$ Signifie que : $\frac{4}{5}<-x<\frac{6}{5}$ Signifie que : $4<-5x<6$ Signifie que : $7<3-5x<9$ ①

On a : $-\frac{6}{5}<x<\frac{-4}{5}$ Signifie que : $-\frac{6}{5}-1<x-1<\frac{-4}{5}-1$ Signifie que : $-\frac{11}{5}<x-1<-\frac{9}{5}$

Signifie que : $\frac{9}{5}<-(x-1)<\frac{11}{5}$ ②

De : ① et ② on déduit que : $\frac{9}{5}\times7<-(x-1)(3-5x)<\frac{11}{5}\times9$ c'est-à-dire : $\frac{63}{5}<-P(X)<\frac{99}{5}$

Par suite: $-\frac{99}{5}<P(x)<-\frac{63}{5}$

c) Déduction que $-16,2$ est une valeur approchée de $P(x)$ avec la précision $3,6$

Il suffit de vérifier que : $|P(x)-(-16,2)|<3,6$? c'est-à-dire : $|P(x)+16,2|<3,6$

$P(x)+16,2$

On a : $-\frac{99}{5}<P(x)<-\frac{63}{5}$ donc : $-\frac{99}{5}+16,2<P(x)+16,2<-\frac{63}{5}+16,2$

Donc : $-\frac{18}{5} < P(x) + 16,2 < \frac{18}{5}$

Donc : $-6,3 < P(x) + 16,2 < 6,3$

Donc : $-6,3 < P(x) + 16,2 < 6,3$

Donc : $\left|P(x) - (-16,2)\right| < 3,6$

Par suite: $-16,2$ est une valeur approchée de $P(x)$ avec la précision $3,6$

Exercice13 : (**) Soit : $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

1) montrer que le polynôme $P(x)$ est divisible par $x-3$

2) En Effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x-3$ montrer que : $P(x) = (x-3)Q(x)$

Avec : $Q(x) = 2x^2 + x - 1$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x) = 0$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $Q(x) \geq 0$

5) En déduire une factorisation du polynôme $P(x)$ on produits de polynômes de 1ere degrés

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$

7) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \succ 0$

Solution :1) $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

On a $P(3) = 2\times 3^3 - 5\times 3^2 - 4\times 3 + 3 = 54 - 45 - 12 + 3 = 0$ donc 3est racine du polynôme $P(x)$

Donc $P(x)$ est divisible par $x-3$

2) Effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x-3$

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 & x-3 \\
\hline
+ \quad -2x^3 + 6x^2 \qquad\qquad & 2x^2 + x - 1 \\
\hline
x^2 - 4x + 3 & \\
-x^2 + 3x \quad & \\
\hline
-x + 3 & \\
x - 3 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

On trouve : $P(x) = (x-3)Q(x)$ ① et $Q(x) = 2x^2 + x - 1$

3) On a : $Q(x) = 2x^2 + x - 1$ et $Q(x) = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9$

Donc : $x_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times 2} = -1$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\times 2} = \frac{1}{2}$ par suite : $S = \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$

4) $Q(x) \geq 0$ On a $x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{1}{2}$ sont racines du polynôme $Q(x)$

Donc: le tableau de Signe:

x	$-\infty$		-1		$1/2$		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc: $S = \left]-\infty; -1\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$

5) Cherchons une factorisation du polynôme $P(x)$ en produits de polynômes de 1ere degrés:

On a : $P(x)=(x-3)Q(x)$ avec $Q(x)=2x^2+x-1$

Et les racines du polynôme $Q(x)$ sont : $x_1=-1$ et $x_2=\frac{1}{2}$

Donc : une factorisation de $Q(x)$ est : $Q(x)=2(x-x_1)(x-x_2)$

Donc : $Q(x)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)=(2x-1)(x+1)$ par suite : $P(x)=(x-3)(2x-1)(x+1)$

6) On a : $P(x)=(x-3)(2x-1)(x+1)$

$P(x)=0$ Signifie : $(x-3)(2x-1)(x+1)=0$

Signifie : $x-3=0$ ou $2x-1=0$ ou $x+1=0$

Signifie : $x=3$ ou $x=\frac{1}{2}$ ou $x=-1$ par suite : $S=\mathbb{R}-\left\{-3,-1,\frac{1}{2}\right\}$

7) $P(x)\succ 0$ Signifie: $(x-3)Q(x)\succ 0$:D'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Par suite : $S=\left]-1;-\frac{1}{2}\right[\cup]3;+\infty[$

Exercice14 : (***) Soit le polynôme suivant (E) : $P(x)=x^3-\sqrt{2}x^2-x+\sqrt{2}$

1) Montrer que 1 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrer que : $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)$

3) On pose : $Q(x)=x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$ et soit Δ son discriminant

a) Vérifier que : $\Delta=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $Q(x)=0$

4) En déduire les solutions de l'équation : $x-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $P(x)=0$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $P(x)\leq 0$

Solution : $P(x)=x^3-\sqrt{2}x^2-x+\sqrt{2}$

1) Montrons que 1 est racine du polynôme $P(x)$: $P(-1)=(-1)^3-\sqrt{2}(-1)^2-(-1)+\sqrt{2}$

$P(-1)=-1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}$

$P(-1)=0$

Donc 1 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrons que : $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)$

$(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)=x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+\sqrt{2}x+x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$

$$=x^3-\sqrt{2}x^2-x^2+\sqrt{2}x+x^2-\sqrt{2}x-x+\sqrt{2}$$
$$=x^3-\sqrt{2}x^2-x+\sqrt{2}$$
$$=P(x)$$

3) a)

$$\Delta=\left(\sqrt{2}+1\right)^2-4\times1\times\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}\right)^2+2\times1\times\sqrt{2}+1-4\times1\times\sqrt{2}$$

$$\Delta=\left(\sqrt{2}\right)^2-2\times1\times\sqrt{2}+1=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $Q(x)=0$: $\quad Q(x)=x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\left|\sqrt{2}-1\right|=\sqrt{2}-1$ car : $\sqrt{2}-1>0$

On a $\Delta\succ0$ donc : $x_1=\dfrac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{2\times1}=\dfrac{2}{2}=1$ et $x_2=\dfrac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1}{2\times1}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

Par suite: $S=\left\{\sqrt{2};1\right\}$

4) Recherche des solutions de l'équation : $x-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

$x-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$ peut s’écrire sous la forme : $\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

On pose : $X=\sqrt{x}$ On a donc : $X^2-\left(\sqrt{2}+1\right)X+\sqrt{2}=0$

D’après la question précédente les solutions sont : $X_1=\sqrt{2}$ et $X_2=1$

On a donc : $\sqrt{x}=\sqrt{2}$ et $\sqrt{x}=1$

Donc : $\left(\sqrt{x}\right)^2=\sqrt{2}^2$ et $\left(\sqrt{x}\right)^2=1^2$ c’est à dire : $x=2$ et $x=1$ par suite : $S=\{1;2\}$.

5) Recherche des solutions de l'équation $P(x)=0$:

On a : $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)$

$P(x)=0$ Signifie que : $x+1=0$ ou $x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}=0$

Signifie que : $x=-1$ ou $x=\sqrt{2}$ ou $x=1$ On a donc : $S=\left\{-1;1;\sqrt{2}\right\}$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\leq0$

$P(x)\leq0$ Signifie que : $(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)\leq0$

x	$-\infty$		-1		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$Q(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc : $S=\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;\sqrt{2}\right]$

Exercice15 : (***) Soit : $P(x)=2x^4-9x^3+14x^2-9x+2$

1) Vérifier que 0 n'est pas racine du polynôme $P(x)$

2) Montrer que si α est racine du polynôme $P(x)$

Alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi racine du polynôme $P(x)$

3) Vérifier que 2 est racine du polynôme $P(x)$

4) En Effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x-2$ Trouver un polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x)=(x-2)\times Q(x)$

5) En déduire que : $Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$

6) Déterminer les réels a ; b et c tel que : $Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(ax^2+bx+c\right)$

7) En déduire une factorisation du polynôme P on polynômes de 1ere degrés

Solution :1) $P(0)=2\times0^4-9\times0^3+14\times0^2-9\times0+2=2\neq0$

Donc 0 n'est pas racine du polynôme $P(x)$

2) α racine du polynôme est $P(x)$

Signifie que : $P(\alpha)=0$

Signifie que : $2\alpha^4-9\alpha^3+14\alpha^2-9\alpha+2=0$

On calcul $P\left(\frac{1}{\alpha}\right)$?

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{2}{\alpha^4}-\frac{9}{\alpha^3}+\frac{14}{\alpha^2}-\frac{9}{\alpha}+2$$

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{2}{\alpha^4}-\frac{9\alpha}{\alpha^4}+\frac{14\alpha^2}{\alpha^4}-\frac{9\alpha^3}{\alpha^4}+\frac{2\alpha^4}{\alpha^4}$$

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{2\alpha^4-9\alpha^3+14\alpha^2-9\alpha+2}{\alpha^4}$$

Et puisque $2\alpha^4-9\alpha^3+14\alpha^2-9\alpha+2=0$

Donc : $P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{0}{\alpha^4}=0$

Donc : $\frac{1}{\alpha}$ Est aussi racine du polynôme $P(x)$

3) $P(2)=2\times2^4-9\times2^3+14\times2^2-9\times2+2=32-72+56-18+2$

$P(2)=2\times2^4-9\times2^3+14\times2^2-9\times2+2=32-72+56-18+2=0$

Donc :2 est racine du polynôme $P(x)$

4) En effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x-2$

On trouve que : $P(x)=(x-2)\times\left(2x^3-5x^2+4x-1\right)$

5) On a 2 est racine du polynôme $P(x)$

Donc : $\frac{1}{2}$ est aussi racine du polynôme $P(x)$

Donc : $P\left(\frac{1}{2}\right)=0$ et puisque $P(x)=(x-2)\times Q(x)$ $\left(\frac{1}{2}-2\right)\times Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$

Alors : $\left(\frac{1}{2}-2\right)\times Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$ or $\frac{1}{2}-2\neq 0$ donc : $Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$

6) En Effectuant la division euclidienne de $Q(x)$ par : $x-\frac{1}{2}$ on trouve :

$Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(2x^2-4x+2\right)$

Donc : $a=2$ et $b=-4$ et $c=2$

7) On a : $P(x)=(x-2)\times Q(x)$ et $Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(2x^2-4x+2\right)$

Donc : $P(x)=(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(2x^2-4x+2\right)$

On factorise aussi : $2x^2-4x+2$: On remarque que 1 est racine

En Effectuant la division euclidienne de $2x^2-4x+2$ par $x-1$

On trouve : $2x^2-4x+2(x-1)(2x-2)$

Finalement : $P(x)=(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(2x-2)$

$P(x)=2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(x-1)$ C'est-à-dire : $P(x)=(x-2)(2x-1)(x-1)^2$

Exercice16 : (**) Soit le polynôme : $P(x)=x^3+3x^2-x-3$

1) Quels sont les diviseurs entiers relatifs du terme constant 3 ?

2) Déterminer (en cas d'existence) les racines relatives du polynôme $P(x)$

3) Factoriser le polynôme $P(x)$ en un produit de monômes

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{x-2}{P(x)}\geq 0$

Solution :1) les diviseurs entiers relatifs du terme constant 3 sont : -3 ; -1 ;1 ;3

2) S'il existe une racine $a\in\mathbb{Z}$ du polynôme $P(x)$ alors : $P(a)=0$

C'est-à-dire : $a^3+3a^2-a-3=0$

C'est-à-dire : $a\left(a^2+3a-1\right)=3$

C'est-à-dire : a est un diviseur de 3

C'est-à-dire : $a\in\{-3;-1;1;3\}$

Maintenant il ne nous reste plus qu'à tester chacun de ces nombres s'il est racine :

On trouve seulement : $\begin{cases} P(-3)=(-3)^3+3(-3)^2-(-3)-3=-27+27+3-3=0 \\ P(-1)=(-1)^3+3(-1)^2-(-1)-3=-1+3+1-3=0 \\ P(1)=1^3+3\times 1^2-1-3=1+3-1-3=0 \end{cases}$

Donc : les racines relatives du polynôme $P(x)$ sont : -3 et -1 et 1

3) Factorisons le polynôme $P(x)$ en un produit de monômes

On a :-3 est racine du polynôme $P(x)$ donc $P(x)$ est divisible par $x+3$

Il existe donc un polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x)=(x+3)Q(x)$

Mais aussi on a : -1 est racine du polynôme $P(x)$ c'est-à-dire : $P(-1)=(-1+3)Q(-1)=0$

C'est-à-dire : $Q(-1)=0$

C'est-à-dire : -1 est racine du polynôme $Q(x)$

C’est-à-dire : $Q(x)$ est divisible par $x+1$

C’est-à-dire : Il existe un polynôme $R(x)$ tel que : $Q(x)=(x+1)R(x)$

Donc : $P(x)=(x+3)(x+1)R(x)$

Mais aussi on a : 1 est racine du polynôme $P(x)$ c’est-à-dire : $P(1)=(1+3)(1+1)R(1)=0$

C’est-à-dire : $R(1)=0$

C’est-à-dire : 1 est racine du polynôme $R(x)$

C’est-à-dire : $R(x)$ est divisible par $x-1$

C’est-à-dire : $R(x)=(x-1)C(x)$

Donc : $P(x)=(x+3)(x+1)(x-1)C(x)$ Avec $C(x)=c=1$ est une constante car $\deg P=3$

Donc : $P(x)=(x+3)(x+1)(x-1)$

4) $\dfrac{2-x}{P(x)}\geq 0$

$(x+3)(x+1)(x-1)=0$ Signifie : $x+3=0$ ou $x+1=0$ ou $x-1=0$

Signifie : $x=-3$ ou $x=-1$ ou $x=1$

$2-x=0$ Signifie : Signifie : $x=2$

Donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-3		-1		1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{2-x}{P(x)}$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	

Donc : $S=]-3;-1[\cup]1;2]$

C’est en forgeant que l’on devient forgeron : Dit un proverbe.
C’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l’on devient un mathématicien