Tronc commun Sciences BIOF

Série N°1 : Les polynômes

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com/)

Exercice1 : (*) Déterminer parmi les expressions suivantes ceux qui sont des polynômes et déterminer si c'est possible leurs degrés : $a \in \mathbb{R}$

$P(x)=\frac{1}{4}x^3+\frac{\sqrt{2}}{2}x^2-\sqrt{3}$; $Q(x)=2x^2-x-\sqrt{x}$; $R(x)=5|x|^2+4|x|-5$;

$E(x)=(a-1)x^4+x^2+x+1$; $F(x)=(x-3)^2-4(5+x^6)+9+5(4x^6+x^3)$

$M(x)=\frac{5}{3}x^2+x+2-7x^4$; $N(x)=x^2+\frac{1}{x}x+3$; $O(x)=4$

Exercice2 : (*) Développer ; Réduire et ordonner et déterminer le degré du polynôme suivant :

$P(x)=(2x-1)^3+3(x+1)(1-x)-2x^2(2x-5)$

Exercice3 : (**) discuter suivant le paramètre m le degré du polynôme $P(x)$:

$P(x)=(m^2-m)x^3-(m^2-1)x^2+mx-1$

Exercice4 : (**) Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que : $P(0)=P(1)=5$ et $P(-2)=3$

Exercice5 : (*) Lesquels des polynômes ci-dessous sont égaux ? Expliquez

$P(x)=2x^3-2x^2+x-3$ et $Q(x)=2x^2(x-2)+(x-1)(2x+3)$ et $R(x)=2x^3+3x^2-2x-3$

Exercice6 (**) **:** Soit les polynômes suivants : $P(x)=12x^4-36x^3+47x^2-30x+7$

$Q(x)=(2x^2-3x+1)(ax^2+bx+c)$

Déterminer a ; b ; c sachant que : $P=Q$

Exercice7 : (*) Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes

I) Calculer dans chacun des cas suivants : $P(x)+Q(x)$; $P(x)-Q(x)$; $3P(x)-2Q(x)$

1) $P(x)=x^3+2x^2-1$; $Q(x)=3x^4-x^3+x$

2) $P(x)=x^5-x^2+3$; $Q(x)=-x^5+x^2-5$

II) Calculer $P(x)\times Q(x)$ et $(P(x))^2$

Dans chacun des cas suivants et comparer : $\deg(P\times Q)$ et $\deg(P)+\deg(Q)$

1) $P(x)=x^2-1$; $Q(x)=x^2+2x-3$

2) $P(x)=x^4-x^2+2$; $Q(x)=3x+2$

Exercice8 : (*) Soit le polynôme : $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

Est-ce que les nombres suivants sont des racines du polynôme $P(x)$ (justifier) ? 1 ;2 ;3 ; -2

Exercice9 : (*) Soit le polynôme : $P(x)=3x^3-2x^2+x+2$

Effectuer la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $x-1$ et vérifier que :

$P(x)=(x-1)(3x^2+x+2)+P(1)$

Exercice10 : (**) Soit le polynôme : $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

1) Vérifier que 1 est racine du polynôme $P(x)$

2) Factoriser : $P(x)$

Exercice11 : (***) Déterminer le nombre réel a pour que :

$P(x)=x^3-6x^2+(2+3a)x-2a$ Soit divisible par $x-3$ et factoriser $P(x)$ dans ce cas

Exercice12 : (***) On considère le polynôme : $P(x)=-5x^2+8x-3$

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

b) En déduire que : $P(x)=(x-1)(3-5x)$

2) On suppose que : $|x+1|<\frac{1}{5}$

a) Montrer que : $-\frac{6}{5}<x<-\frac{4}{5}$

b) Montrer que : $-\frac{99}{5}<P(x)<-\frac{63}{5}$

c) En déduire que $-16,2$ est une valeur approchée de $P(x)$ avec la précision $3,6$

Exercice13 : (**) Soit : $P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$

1) montrer que le polynôme $P(x)$ est divisible par $x-3$

2) En Effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x-3$ montrer que : $P(x)=(x-3)Q(x)$

Avec : $Q(x)=2x^2+x-1$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $Q(x)\geq 0$

5) En déduire une factorisation du polynôme $P(x)$ on produits de polynômes de 1ere degrés

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

7) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\succ 0$

Exercice14 : (***) Soit le polynôme suivant (E) : $P(x)=x^3-\sqrt{2}x^2-x+\sqrt{2}$

1) Montrer que 1 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrer que : $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)$

3) On pose : $Q(x)=x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$ et soit Δ son discriminant

a) Vérifier que : $\Delta=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $Q(x)=0$

4) En déduire les solutions de l'équation : $x-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $P(x)=0$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $P(x)\leq 0$

Exercice15 : (***) Soit : $P(x)=2x^4-9x^3+14x^2-9x+2$

1) Vérifier que 0 n'est pas racine du polynôme $P(x)$

2) Montrer que si α est racine du polynôme $P(x)$

Alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi racine du polynôme $P(x)$

3) Vérifier que 2 est racine du polynôme $P(x)$

4) En Effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x-2$ Trouver un polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x)=(x-2)\times Q(x)$

5) En déduire que : $Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$

6) Déterminer les réels a ; b et c tel que : $Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(ax^2+bx+c\right)$

7) En déduire une factorisation du polynôme P on polynômes de 1ere degrés

Exercice16 : (**) Soit le polynôme : $P(x)=x^3+3x^2-x-3$

1) Quels sont les diviseurs entiers relatifs du terme constant 3 ?

2) Déterminer (en cas d'existence) les racines relatives du polynôme $P(x)$

3) Factoriser le polynôme $P(x)$ en un produit de monômes

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{x-2}{P(x)}\geq 0$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien