Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°1 :

Système d'équations du premier degré a deux inconnues

Exercice1 : (*) Soit dans $\mathbb{R}^2$ l'équation : $2x-y+4=0$

1) Vérifier que les couples : $(0;4)$ et $(1;6)$ sont solution de l'équation : $2x-y+4=0$

2) Pourquoi $(1;2)$ n'est pas solution de l'équation ?

3) Donner deux autres couples solution de l'équation : $2x-y+4=0$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation : $2x-y+4=0$

Solution : a) $2\times0-4+4=-4+4=0$

Donc : $(0;4)$ est solution de l'équation : $2x-y+4=0$

b) $2\times1-6+4=2-6+4=0$

Donc : $(1;6)$ est solution de l'équation : $2x-y+4=0$

2) On a : $2\times1-2+4=2-2+4=4\neq0$

Donc : $(1;2)$ n'est pas solution de l'équation : $2x-y+4=0$

3) on donne par exemple à x une valeur et on cherche y :

a) Par exemple : $x=2$ donc : $2\times2-y+4=0$ Équivalent à : $-y+8=0$

Équivalent à : $y=8$ donc : Donc : $(2;8)$ est solution de l'équation

a) Par exemple : $x=-1$ donc : $2\times(-1)-y+4=0$ Équivalent à : $-y+2=0$

Équivalent à : $y=2$ donc : Donc : $(-1;2)$ est solution de l'équation

Remarques : L'équation $2x-y+4=0$ a une infinité de solutions

4) Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ l'équation : $2x-y+4=0$

On a $2x-y+4=0$ équivalent à : $y=2x+4$ Donc : $S=\{(x;2x+4)/x\in\mathbb{R}\}$

Exercice2 : (*) On considère le système suivant : $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=-2 \end{cases}$

les couples suivants : $(1;3)$ et $(5;-1)$ sont-ils solutions de ce système ?

Solution : a) $(1;3)$???? On 1+3=4 et 1-3=-2 donc : $(1;3)$ vérifie les deux équations : simultanément donc : $(1;3)$ est solution du système

b) $(5;-1)$???? On a : 5+(-1) =4 mais 5-(-1) = 6$\neq -2$

Donc : $(5;-1)$ ne vérifie pas les deux équations simultanément

Donc : $(5;-1)$ n'est pas solution du système.

Exercice3 : (*) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants : 1) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$

Solution : 1) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$

Méthode de substitution : Substituer, c'est remplacer par (Mettre à la place de).

Dans le système $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$, on exprime *x* en fonction de *y* dans la première équation et on obtient le système équivalent : $\begin{cases} x=3-2y \\ 2x+3y=4 \end{cases}$.

On remplace ensuite *x* par $3-2y$ dans la seconde équation, ce qui donne le système :

$\begin{cases} x=3-2y \\ 2(3-2y)+3y=4 \end{cases}$ ce qui signifie que : $\begin{cases} x=3-2y \\ -y+6=4 \end{cases}$, soit encore à $\begin{cases} x=3-2y \\ y=2 \end{cases}$

et on remplace y par 2 dans la première équation on trouve $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ donc: $S=\{(-1,2)\}$

2) $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$

Méthode de combinaison linéaire ou méthode par addition : Cette méthode consiste à faire apparaître des coefficients opposés pour l'une des inconnues, en multipliant les équations par des facteurs bien choisis. En additionnant membre à membre les deux équations transformées, on obtient une équation à une seule inconnue que l'on peut résoudre.

Dans le système $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$, on multiplie les termes de la première équation par 2 et ceux de la seconde par 3 et on obtient le système équivalent : $\begin{cases} 4x+6y=14 \\ 9x-6y=12 \end{cases}$.

On additionne membre à membre les deux équations et on remplace la seconde équation du système par le résultat ; on obtient le système $\begin{cases} 4x+6y=14 \\ 13x=26 \end{cases}$ équivalent : $\begin{cases} 8+6y=14 \\ x=2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 6y=6 \\ x=2 \end{cases}$

encore ou $\begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$.

On en déduit le couple solution : $S=\{(2,1)\}$.

Exercice4 : (*) Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} 3x+y=5 \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$

Par les 3 Méthodes suivantes :
1) Par la Méthode de substitution
2) Par la méthode des combinaisons linéaires
3) Méthode des déterminants

Solution : 1) Par la *Méthode de substitution* : $3x+y=5$ Signifie que : $y=5-3x$

On obtient alors le système : $\begin{cases} y=5-3x \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$

On va maintenant remplacer le y de la seconde équation par son expression en fonction de x qu'on vient de trouver. Cela donne alors : $\begin{cases} y=5-3x \\ 2x-3(5-3x)=-4 \end{cases}$

On développe et on simplifie l'écriture de la deuxième équation : $\begin{cases} y=5-3x \\ 11x=11 \end{cases}$

On résout maintenant l'équation du premier degré pour trouver la valeur de x : $\begin{cases} y=5-3x \\ x=1 \end{cases}$

Maintenant qu'on connaît la valeur de x, il ne nous reste plus qu'à remplacer x par sa valeur dans la première équation. $\begin{cases} y=5-3\times1=2 \\ x=1 \end{cases}$ Donc : $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

La solution de notre système est donc : $S=\{(1,2)\}$

Il peut être utile de procéder à une vérification. Pour cela, on remplace les inconnues par les valeurs qu'on vient de trouver dans chacune des équations et on vérifie si on retrouve bien l'égalité

$$\begin{cases} 3\times1+2=3+2=5\checkmark \\ 2\times1-3\times2=2-6=-4\checkmark \end{cases}$$

2) Par la méthode combinaison linéaire ou méthode par addition.

Le but de cette méthode est de multiplier les équations par des nombres judicieusement choisis pour qu'en additionnant ou soustrayant les équations on n'ait plus qu'une seule inconnue.

On va chercher, par exemple, à "éliminer" l'inconnue x. Pour cela on va :

multiplier la première équation par 2 qui est le coefficient de l'inconnue de la seconde équation.

Multiplier la seconde équation par 3 qui est le coefficient de l'inconnue de la première équation.

On obtient alors le système : $\begin{cases} 6x+2y=10 \\ 6x-9y=-12 \end{cases}$

On va maintenant soustraire nos deux équations pour ainsi ne plus avoir de termes en x.

$$\begin{array}{rrrrl} & 6x & + & 2y & =10 \\ -(& 6x & - & 9y & =-12) \\ \hline & & & 11y & =22 \\ & & \text{donc} & y & =2 \end{array}$$

On remplace maintenant cette valeur dans l'une des deux équations :

Si on choisit la première équation $3x+2=5$ soit $3x=3$ et donc $x=1$.

La solution du système est donc : $S=\{(1,2)\}$

3) Méthode des déterminants : On calcule le déterminant du système suivant

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=3\times(-3)-2=-11\neq0 \quad (I)\begin{cases} 3x+y=5 \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$$

Alors le système (I) admet un couple solution unique :

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}}{-11}=\frac{-15-(-4)}{-11}=\frac{-15+4}{-11}=\frac{-11}{-11}=1 \quad \text{et} \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{-13}=\frac{-12-10}{-11}=\frac{-22}{-11}=2$$

Donc : $S=\{(1,2)\}$

Exercice5 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ et graphiquement les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} -x+y+3=0 \\ 2x-y-4=0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+y-1=0 \\ 6x+2y-2=0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -3x-2y=-3 \\ 6x+4y+1=0 \end{cases}$

Solution : Cette méthode consiste à relier chaque équation à une droite, puis on représente chacune des droites dans un même repère orthonormé. La solution, si elle existe, est donnée par les coordonnées du point d’intersection des deux droites.

□ Pour chaque équation on exprime y en fonction de x, et on obtient :

$\begin{cases} -x+y+3=0 \\ 2x-y-4=0 \end{cases}$ C’est-à-dire : $\begin{cases} y=x-3 \\ y=2x-4 \end{cases}$

Dans un repère on trace les deux droites (D) d’équation : $y=x-3$,

et (Δ) d’équation : $y=2x-4$

Pour : (D) d’équation : $y=x-3$ pour tracer (D) on va chercher deux points :

Si : $x=1$ alors : $y=1-3=-2$ donc : $A(1;-2)\in(D)$

Si : $x=0$ alors : $y=0-3=-3$ donc : $B(0;-3)\in(D)$

Et on peut tracer : $(D)=(AB)$

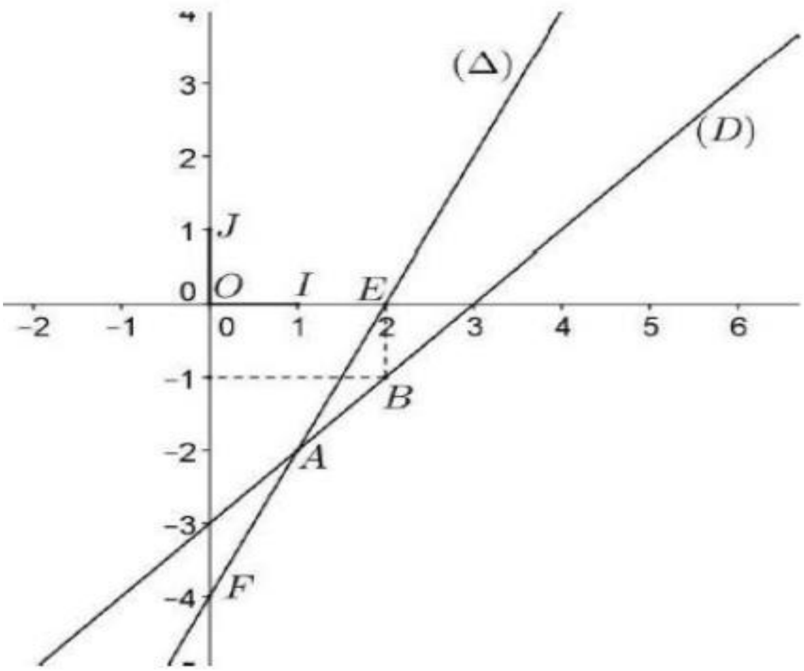
Pour : (Δ) d’équation : $y=2x-4$ pour tracer (Δ) on va chercher deux points :

Si : $x=0$ alors : $y=2\times 0-4=-4$ donc : $E(0;-4)\in(\Delta)$

Si : $x=1$ alors : $y=2\times 1-4=-2$ donc : $F(1;-2)\in(\Delta)$

Et on peut tracer : $(\Delta)=(EF)$

Dans un repère orthonormé, on trace les deux droites (D) et (Δ)



Les deux droites (D) et (Δ) se coupent en un point : $A(1;-2)$

□ Alors le couple $(2;6)$ est la solution de ce système.

<u>Remarque :</u>

- Si les deux droites ont le même coefficient directeur, alors le système n’a pas de solution.
- Si les deux droites ont le même coefficient directeur et le même ordonné à l’origine, alors le système a plusieurs solutions.

2) $\begin{cases}3x+y-1=0\\6x+2y-2=0\end{cases}$ Équivalent $\begin{cases}y=-3x+1\\2y=-6x+2\end{cases}$: C'est-à-dire : $\begin{cases}y=-3x+1\\y=-3x+1\end{cases}$

On considère les deux droites (D) d'équation : $y=-3x+1$,

et (Δ) d'équation : $y=-3x+1$

On observe que les deux droites ont le même coefficient directeur et le même ordonné à l'origine.
Alors le système a plusieurs solutions.
Dans ce cas résoudre le système c'est résoudre l'équation $y=-3x+1$
Alors on a : $S=\{(x;-3x+1)/x\in\mathbb{R}\}$

3) $\begin{cases}-3x-2y=-3\\6x+4y+1=0\end{cases}$ Équivalent $\begin{cases}-2y=3x-3\\4y=-6x-1\end{cases}$ Équivalent $\begin{cases}y=-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\\y=-\frac{6}{4}x-\frac{1}{4}\end{cases}$ C'est-à-dire : $\begin{cases}y=-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\\y=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}\end{cases}$

On observe que les deux droites ont le même coefficient directeur.
Alors le système n'a pas de solutions.

Exercice6 : (**) Pouvez-vous donner le poids de chacun ?

Solution : Les nombres «x : poids du garçon » et « y poids du fille » et « z poids du chien »

Satisfont donc au système formé par les équations : $\begin{cases}x+y=50\\y+z=29\\x+z=35\end{cases}$

Résolvons ce système : $\begin{cases}x+y=50\\y+z=29\\x+z=35\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}y=50-x\\y+z=29\\x+z=35\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}y=50-x\\50-x+z=29\\x+z=35\end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases}y=50-x\\-x+z=29-50\\x+z=35\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}y=50-x\\-x+z=-21\\x+z=35\end{cases}$

Résolvons le système : $\begin{cases}-x+z=-21\\x+z=35\end{cases}$ On additionne les deux membres terme à terme

Donc : $2z=35-21$ Donc : $2z=14$ Donc : $z=7kg$

On reporte ce résultat dans le système : $\begin{cases}x+y=50\\y+7=29\\x+7=35\end{cases}$ Donc : $\begin{cases}x+y=50\\y=29-7\\x=35-7\end{cases}$ Donc : $\begin{cases}x+y=50\\y=22\\x=28\end{cases}$

Finalement : $x=28kg$ et $y=22kg$ et $z=7kg$

Exercice7 : (**) 1) On considère le système suivant : $\begin{cases} 45x+30y=510 \\ 27x+20y=316 \end{cases}$

a) Les nombres $x=10$ et $y=2$ sont-ils solutions de ce système ?

b) Résoudre le système.

2. Pour les fêtes de fin d'année, un groupe d'amis souhaite emmener leurs enfants assister à un spectacle.

Les tarifs sont les suivants :

- 45 dh par adulte et 30 par enfant s'ils réservent en catégorie 1.
- 27 dh par adulte et 20 dh par enfant s'ils réservent en catégorie 2.

Le coût total pour ce groupe d'amis est de 510 dh s'ils réservent en catégorie 1 et 316 dh s'ils réservent en catégorie 2.

Déterminer le nombre d'adultes et d'enfants de ce groupe?

Solution : 1). a. Regardons si les nombres $x=10$

Et $y=2$ vérifient chacune des deux équations

$45\times 10+30\times 2=450+60=510\checkmark$
$27\times 10+20\times 2=270+40=310\neq 316$

Le couple $(10,2)$ n'est donc pas solution du système.

b. Nous allons résoudre ce système à l'aide de combinaisons linéaires :

$$\begin{cases} 45x+30y=510 & (\times 20) \\ 27x+20y=316 & (\times 30) \end{cases}$$

$$\begin{array}{rrcrl} & 900x & + & 600y & =10\ 200 \\ -(& 810x & + & 600y & =9\ 480) \\ \hline & 90x & & & =720 \\ & & \text{donc} & x & =8 \end{array}$$

On reporte ce résultat dans la première équation :

$45\times 8+30y=510$ soit $360+30y=510$

Donc : $30y=150$ d'où : $y=5$.

On vérifie que le couple $(8,5)$ est bien solution de

la seconde équation :

$27\times 8+20\times 5=216+100=316\checkmark$.

Par conséquent la solution du système est : $(8,5)$

Par suite : $S=\{(8,5)\}$

2. On appelle A le nombre d'adultes et E le nombre d'enfants.

Avec la première catégorie on obtient l'équation $45A+30E=510$.

Avec la seconde catégorie on obtient l'équation $27A+20E=316$.

On est donc ramené à résoudre le système :

$$\begin{cases} 45A+30E=510 \\ 27A+20E=316 \end{cases}$$

D'après la question précédente le couple $(8,5)$ est solution de ce système.

Exercice8 : (**) Dans une boulangerie, Ali a acheté deux croissants et un pain. Il a payé 6 dh 50

Dans la même boulangerie, Aicha a acheté un croissant et trois pains. Elle a payé 5dh 50.

Quel est le prix d'un croissant et d'un pain dans cette boulangerie ?

Solution : **Méthode de résolution :** Pour résoudre un problème avec deux inconnues :

1) On pose x="la première inconnue" et **y =** "la deuxième inconnue".

Pour ce problème, on écrit : "J'appelle x le prix d'un croissant et y le prix d'un pain "

Ou : "Soit x le prix d'un croissant et y le prix d'un pain ".

2) On écrit les équations correspondant au problème : $2x+1y=6.5$ et $1x+3y=5.5$

On place les équations l'une en dessous de l'autre dans une grande accolade : $\begin{cases}2x+1y=6.5\\1x+3y=7\end{cases}$

3) On résout le système avec l'une des trois méthodes on trouve : $x=2,5$ et $y=1,5$

4) Vérification des résultats : $\begin{cases}2\times 2.5+1\times 1.5=6.5\\1\times 2.5+3\times 1.5=7\end{cases}$

5) le prix d'un croissant est $x=2,5$ DH et le prix d'un pain $y=1,5$ DH

Exercice9 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants : 1) $\begin{cases}3x-y=5\\2x+4y=-6\end{cases}$ 2) $\begin{cases}8x+4y=4\\2x+y=3\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sqrt{2}x-y=\sqrt{2}\\2x-\sqrt{2}y=2\end{cases}$ 4) $(I)\begin{cases}4x+2y=-2\\x-3y=-11\\2x+4y=8\end{cases}$ **5)** $(I)\begin{cases}x-2y=1\\3x+y=2\\x-y=3\end{cases}$

Solution :1) Le déterminant est : $\Delta=\begin{vmatrix}3 & -1\\2 & 4\end{vmatrix}=3\times 4-(-1)\times 2=14\neq 0$

Alors le système (I) admet un couple solution unique :

$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}5 & -1\\-6 & 4\end{vmatrix}}{14}=\frac{5\times 4-(-6)\times(-1)}{14}=\frac{20-6}{14}=\frac{14}{14}=1$ $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}3 & 5\\2 & -6\end{vmatrix}}{14}=\frac{3\times(-6)-5\times 2}{14}=\frac{-18-10}{14}=\frac{-28}{14}=-2$

On en déduit le couple solution : $S=\{(1,-2)\}$.

2) Le déterminant est : $\Delta=\begin{vmatrix}8 & 4\\2 & 1\end{vmatrix}=8-8=0$

Alors on calcule $\Delta_x=\begin{vmatrix}4 & 4\\3 & 1\end{vmatrix}=4-12=-8\neq 0$; Donc $S=\varnothing$

3) $\begin{cases}\sqrt{2}x-y=\sqrt{2}\\2x-\sqrt{2}y=2\end{cases}$ Le déterminant est : $\Delta=\begin{vmatrix}\sqrt{2} & -1\\2 & -\sqrt{2}\end{vmatrix}=-2+2=0$

Alors on calcule $\Delta_x=\begin{vmatrix}\sqrt{2} & -1\\2 & -\sqrt{2}\end{vmatrix}=-2+2=0$

Alors on calcule $\Delta_y=\begin{vmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2}\\2 & 2\end{vmatrix}=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=0$

Donc les deux équations $\sqrt{2}x-y=\sqrt{2}$ et $2x-\sqrt{2}y=2$ sont équivalentes et dans ce cas Résoudre le système c'est Résoudre l'une des équations par exemple en choisi $\sqrt{2}x-y=\sqrt{2}$ c a d $\sqrt{2}x-\sqrt{2}=y$ et alors on a : $S=\{(x;\sqrt{2}x-\sqrt{2})/x\in\mathbb{R}\}$

4) $(I)\begin{cases}4x+2y=-2\\x-3y=-11\\2x+4y=8\end{cases}$ Soit le système $(I')\begin{cases}4x+2y=-2\\x-3y=-11\end{cases}$

Le déterminant est : $\Delta=\begin{vmatrix}4 & 2\\1 & -3\end{vmatrix}=-12-2=-14\neq 0$

Alors le système (I') admet une solution unique

$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -11 & -3\end{vmatrix}}{-14}=\frac{28}{-14}=-2$ $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}}{1}=\frac{2}{1}=2$

Donc $(-2,3)$ est une solution du système (I')

On remplace dans la dernière équation c a d $x-3y=-11$

On a $2\times(-2)+4\times 3=-4+12=8$

Donc $(-2,3)$ vérifie toutes les équations et par suite: $S=\{(-2,3)\}$

5) $(I)\begin{cases}x-2y=1\\ 3x+y=2\\ x-y=3\end{cases}$ Soit le système $(I')\begin{cases}x-2y=1\\ x-y=3\end{cases}$

Le déterminant est : $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1+2=1\neq 0$

Alors le système (I') admet une solution unique : $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{vmatrix}}{1}=\frac{5}{1}=5$ et

$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}4 & -2\\ 1 & -11\end{vmatrix}}{-14}=\frac{-42}{-14}=3$

Donc $(-2,3)$ est une solution du système (I')

On remplace dans la deuxième équation c a d $3x+y=2$

On a $3\times 5+2=17\neq 2$

Donc $(-2,3)$ ne vérifie pas toutes les équations et par suite : $S=\varnothing$

Exercice10 : (**) **1)** Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases}-7x-3y=4\\ 4x+5y=-2\end{cases}$

2) En déduire les solutions du système suivant : $\begin{cases}\frac{-7}{x}-\frac{3}{y}=4\\ \frac{4}{x}+\frac{5}{y}=-2\end{cases}$

Solution : 1) Le déterminant du système est : $\Delta=\begin{vmatrix}-7 & -3\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-35+12=-23\neq 0$

Donc : $x=\frac{\begin{vmatrix}4 & -3\\ -2 & 5\end{vmatrix}}{\Delta}=-\frac{14}{23}$ **et** $y=\frac{\begin{vmatrix}-7 & 4\\ 4 & -2\end{vmatrix}}{\Delta}=-\frac{2}{23}$

Donc : $S=\left\{\left(-\frac{14}{23},-\frac{2}{23}\right)\right\}$

2) Pour que le système existe il faut que : $x\neq 0$ et $y\neq 0$

$\begin{cases}-7\frac{1}{x}-3\frac{1}{y}=4\\ 4\frac{1}{x}+5\frac{1}{y}=-2\end{cases}$ On pose : $X=\frac{1}{x}$ et $Y=\frac{1}{y}$ Le système devient : $\begin{cases}-7X-3Y=4\\ 4X+5Y=-2\end{cases}$

D'après 1) on a : $X = -\frac{14}{23}$ et $Y = -\frac{2}{23}$

Donc : $\frac{1}{x} = -\frac{14}{23}$ et $\frac{1}{y} = -\frac{2}{23}$

Donc : $x = -\frac{23}{14}$ et $y = -\frac{23}{2}$ par suite : : $S = \left\{\left(-\frac{23}{14}, -\frac{23}{2}\right)\right\}$

Exercice11 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 6 \\ -3\sqrt{x} + 5\sqrt{y} = 17 \end{cases}$

Solution : Pour que le système existe il faut que : $x \geq 0$ et $y \geq 0$ on pose : $X = \sqrt{x}$ et $Y = \sqrt{y}$

Le système devient : $\begin{cases} 2X + Y = 6 \\ -3X + 5Y = 17 \end{cases}$

On résolve ce système et on trouve : $X = 1$ et $Y = 4$

Donc : $\sqrt{x} = 1$ et $\sqrt{y} = 4$ donc : $\left(\sqrt{x}\right)^2 = (1)^2$ et $\left(\sqrt{y}\right)^2 = 4^2$

Donc : $x = 1$ et $y = 16$ par suite : $S = \{(1,16)\}$

Exercice12 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} 2x^2 - 5y^2 = 1 \\ 4x^2 + 3y^2 = 15 \end{cases}$

Solution : On pose : $X = x^2$ et $Y = y^2$

Le système devient : $\begin{cases} 2X - 5Y = 1 \\ 4X + 3Y = 15 \end{cases}$

On résolve ce système et on trouve : $X = 3$ et $Y = 1$

Donc : $x^2 = 3$ et $y^2 = 4$

Donc : $x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$ et $y = \sqrt{1}$ ou $y = -\sqrt{1}$

Donc : $x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$ et $y = 1$ ou $y = -1$

Par suite : $S = \left\{\left(\sqrt{3},1\right), \left(\sqrt{3},-1\right), \left(-\sqrt{3},1\right), \left(-\sqrt{3},-1\right)\right\}$

Exercice13 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} \left(x^2 - 3x + 1\right) + \left(y^2 - 5y + 4\right) = -3 \\ 2\left(x^2 - 3x + 1\right) - 3\left(y^2 - 5y + 4\right) = 4 \end{cases}$

Solution : On pose : $X = x^2 - 3x + 1$ e $Y = y^2 - 5y + 4$ t

Le système devient : $\begin{cases} X + Y = -3 \\ 2X - 3Y = 4 \end{cases}$

On résolve ce système et on trouve : $X = -1$ et $Y = -2$

Donc : $x^2 - 3x + 1 = -1$ et $y^2 - 5y + 4 = -2$ c'est-à-dire : $x^2 - 3x + 21 = 0$ et $y^2 - 5y + 6 = 0$

On résolve l'équation : $x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (2) = 1 > 0$

Donc : $x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2$ **et** $x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{3}{2}$

On résolve l'équation $y^2 - 5y + 6 = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$

Donc **:** $y_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 3$ **et** $y_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2$ par suite on a : $S = \{(1,3), (1,2), (2,3), (2,2)\}$

Exercice14 : (**) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation suivante : $\sqrt{x^2 + 1} = 1$

2)Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} x-y=-8 \\ 4x+3y=31 \end{cases}$

3)Déduire des questions précédents les solutions du système : $\begin{cases} \sqrt{x^2+1}-y^2+8=0 \\ 8\sqrt{x^2+1}+6y^2=62 \end{cases}$

Solution : 1) $\sqrt{x^2+1}=1$ équivalent : $\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2=1^2$ équivalent : $x^2+1=1$ équivalent : $x^2=0$

Équivalent : $x=0$

Donc : $S=\{0\}$

2) Résolution dans $\mathbb{R}^2$ du système : $\begin{cases} x-y=-8 \\ 4x+3y=31 \end{cases}$

$\begin{cases} x-y=-8 \\ 4x+3y=31 \end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases} y=x+8 \\ 4x+3(x+8)=31 \end{cases}$ équivalent : $\begin{cases} y=x+8 \\ 4x+3x+24=31 \end{cases}$

Équivalent : $\begin{cases} y=x+8 \\ 7x=7 \end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases} y=1+8 \\ x=1 \end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases} y=9 \\ x=1 \end{cases}$

La solution du système est donc : $S=\{(1,9)\}$

3) $\begin{cases} \sqrt{x^2+1}-y^2+8=0 \\ 8\sqrt{x^2+1}+6y^2=62 \end{cases}$ Déduction des questions précédents des solutions du système :

$\begin{cases} \sqrt{x^2+1}-y^2+8=0 \\ 8\sqrt{x^2+1}+6y^2=62 \end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases} \sqrt{x^2+1}-y^2=-8 \\ 2\left(4\sqrt{x^2+1}+3y^2\right)=62 \end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases} \sqrt{x^2+1}-y^2=-8 \\ 4\sqrt{x^2+1}+3y^2=31 \end{cases}$

On pose : $\begin{cases} X=\sqrt{x^2+1} \\ Y=y^2 \end{cases}$ Donc on a: $\begin{cases} X-Y=-8 \\ 4X+3Y=31 \end{cases}$

Des questions précédentes on déduit que : $X=1$ et $Y=2$

Donc : $\sqrt{x^2+1}=1$ et $y^2=9$

Donc : ($x=0$) et ($y=-3$ ou $y=3$) Par suite : $S=\{(0,3);(0,-3)\}$

Exercice15 : (***) On considère dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : (I) $\begin{cases} (m+1)x+3y=m \\ 3x+(m+1)y=2 \end{cases}$

On va utiliser la Méthode des déterminants pour Résoudre ce système

1)a) Vérifier que : le déterminant du système est : $\Delta=(m-2)(m+4)$

b) En déduire les valeurs de m pour lesquelles $\Delta=0$

2) Vérifier que : $\Delta_x=(m-2)(m+3)$ et $\Delta_y=-(m-2)$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ et discuter suivant le paramètre m le système : (I)

Solution :1) a) On calcule le déterminant du système (I)

$$\Delta=\begin{vmatrix} m+1 & 3 \\ 3 & m+1 \end{vmatrix}=(m+1)\times(m+1)-3\times3=(m+1)^2-3^2=(m+1-3)(m+1+3)=(m-2)(m+4)$$

b) $\Delta=0$ Signifie que : $(m-2)(m+4)=0$ Signifie que : $m-2=0$ ou $m+4=0$

$\Delta=0$ Signifie que : $m=2$ ou $m=-4$

2) $\Delta_x=\begin{vmatrix} m & 3 \\ 2 & m+1 \end{vmatrix}=m(1+m)-6=m^2+m-6$: a = 1, b = 1 ; c = -6

Le discriminent est : $b^2 - 4ac = 1^2 + 24 = 25 > 0$

Donc : $x_1=\frac{-1-\sqrt{25}}{2a}=\frac{-1-5}{2\times 1}=\frac{-6}{2}=-3$ et $x_2=\frac{-1+\sqrt{25}}{2a}=\frac{-1+5}{2\times 1}=\frac{4}{2}=2$

Donc : $\Delta_x=m^2+m-6=1(m-(-3))(m-2)=1(m+3)(m-2)$

$\Delta_y=\begin{vmatrix} m+1 & m \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=2(1+m)-3m=-(m-2)$

3)*1ere cas* : si $\Delta\neq 0$ c'est-à-dire : $m\neq 2$ et $m\neq -4$

Alors le système (I) admet un couple solution unique :

$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{(m-2)(m+3)}{(m-2)(m+4)}=\frac{m+3}{m+4}$ et $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-(m-2)}{(m-2)(m+4)}=-\frac{1}{m+4}$

Donc : $S=\left\{\left(\frac{m+3}{m+4};-\frac{1}{m+4}\right)\right\}$

2ere cas : si $\Delta=0$ c'est-à-dire : $m=2$ ou $m=-4$

Si $m=2$ on remplace m par 2 on trouve : $\begin{cases} 3x+3y=2 \\ 3x+3y=2 \end{cases}$ qui est équivalent a : $3x+3y=2$

Dans ce cas résoudre le système c'est résoudre l'équation $3x+3y=2$

$3x+3y=2$ est équivalent a : $3y=2-3x$ Signifie que : $y=\frac{2}{3}-x$

Alors on a : $S=\left\{\left(x;\frac{2}{3}-x\right)/\,x\in\mathbb{R}\right\}$

Si $m=-4$ on remplace m par -4 on trouve : $\begin{cases} -3x+3y=-4 \\ 3x-3y=2 \end{cases}$ qui est équivalent à : $\begin{cases} 3x-3y=4 \\ 3x-3y=2 \end{cases}$

impossible Donc: $S=\varnothing$

Exercice16 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants : 1) $\begin{cases} x+y=5 \\ x\times y=4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x\times y=-2 \end{cases}$

Solution : $\begin{cases} x+y=5 \\ x\times y=4 \end{cases}$ signifie que : $\begin{cases} x=5-y \\ (5-y)\times y=4 \end{cases}$

Donc on a : $(5-y)\times y=4$ équivalent à : $-y^2+5y=4$ équivalent à : $y^2-5y+4=0$

Donc on va résoudre le système suivant : $\begin{cases} x=5-y \\ y^2-5y+4=0 \end{cases}$

Résolution de l'équation : $y^2-5y+4=0$ on a : a = 1, b = -5 و c = 4

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 > 0$ alors : $y_1=\frac{5-\sqrt{9}}{2a}=\frac{5-3}{2\times 1}=1$ et $y_2=\frac{5+\sqrt{9}}{2a}=\frac{5+3}{2\times 1}=4$

Si $y=1$ alors $x=5-1=4$ et Si $y=4$ alors $x=5-4=1$ Par suite : $S=\{(4,1);(1,4)\}$

2) $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x\times y=-2 \end{cases}$ signifie que : $\begin{cases} y=2x-5 \\ x\times(2x-5)=-2 \end{cases}$ c'est-à-dire : $x\times(2x-5)=-2$

Équivalent à : $2x^2-5x+2=0$; Résolution de l'équation $2x^2-5x+2=0$: a = 2, b = -5 ; c = 2

Δ = b^2 – 4ac = (-5)^2 – 4 x 2 x2)= 9> 0

Donc : $x_1=\frac{5-\sqrt{9}}{2a}=\frac{5-3}{2\times2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{5+\sqrt{9}}{2a}=\frac{5+3}{2\times2}=\frac{8}{4}=2$

Si $x=2$ alors $y=2\times2-5=-1$ et Si $x=\frac{1}{2}$ alors $y=2\times\frac{1}{2}-5=-4$ Par suite : $S=\left\{(2,-1);\left(\frac{1}{2},-4\right)\right\}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien